49. a. 802.

ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

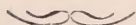
SOCIETÀ REALE DI NAPOLI

ATTI

DELL' ACCADEMIA

DELLE

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

Volume II.

NAPOLI
STAMPERIA DEL FIBRENO
1865

SOCII DELL' ACCADEMIA

DELLE

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

Presidente — PADULA FORTUNATO

Vice-Presidente — LUCA (DE) SEBASTIANO

Segretario — SCACCHI ARCANGELO

Tesoriere — GUISCARDI GUGLIELMO

SOCII ORDINARII

1. Tucci Francesco; 24 settembre 1861. *Napoli.*
2. Martini (De) Antonio; 24 settembre 1861. *Napoli.*
3. Nicolucci Giustiniano; 24 settembre 1861. *Isola di Sora.*
4. Scacchi Arcangelo; 24 settembre 1861. *Napoli.*
5. Guiscardi Guglielmo; 24 settembre 1861. *Napoli.*
6. Gasparis (De) Annibale; 24 settembre 1861. *Napoli.*
7. Padula Fortunato; 24 settembre 1861. *Napoli.*
8. Costa Oronzio Gabriele; 24 settembre 1861. *Napoli.*
9. Luca (De) Ferdinando; 24 settembre 1861. *Napoli.*

10. Costa Achille; 24 settembre 1861. *Napoli.*

11. Gussone Giovanni; 24 settembre 1861. *Napoli.*

12. Trudi Nicola; 19 novembre 1861. *Napoli.*

13. Battaglini Giuseppe; 19 novembre 1861. *Napoli.*

14. Fergola Emanuele; 19 novembre 1861. *Napoli.*

15. Palmieri Luigi; 19 novembre 1861. *Napoli.*

16. Napoli Raffaele; 19 novembre 1861. *Napoli.*

17. Semmola Giovanni; 19 novembre 1861. *Napoli.*

18. Luca (De) Sebastiano; 19 novembre 1861. *Napoli.*

19. Gasparrini Guglielmo; 19 novembre 1861. *Napoli.*

20. Bertoloni Antonio; 16 dicembre 1862. *Bologna.*

21. Piria Raffaele; 16 dicembre 1862. *Napoli.*

22. Sella Quintino; 16 dicembre 1862. *Torino.*

23. Matteucci Carlo; 3 maggio 1864. *Torino.*

24. Brioschi Francesco; 3 maggio 1864. *Milano.*

SOCII STRANIERI

1. Cayley Arturo; 3 maggio 1864. *Londra.*

2. Chasles Michele; 3 maggio 1864. *Parigi.*

3. Dumas Giovan Battista; 3 maggio 1864. *Parigi.*

4. Faraday Michele; 3 maggio 1864. *Londra.*

5. Flourens Maria Giov.; 3 maggio 1864. *Parigi.*

6. Marzius Federico; 3 maggio 1864. *Monaco.*

7. Owen Riccardo; 3 maggio 1864. *Londra.*

8. Sylvester G. G.; 3 maggio 1864. *Londra.*

SOCII CORRISPONDENTI NAZIONALI

1. Bellavitis Giusto; 13 gennaio 1863. *Padova.*
2. Betti Errico; 13 gennaio 1863. *Pisa.*
3. Santini Giovanni; 13 gennaio 1863. *Padova.*
4. Tortolini Barnaba; 13 gennaio 1863. *Roma.*
5. Cannizzaro Stanislao; 3 marzo 1863. *Palermo.*
6. Notaris (De) Giuseppe; 3 marzo 1863. *Genova.*
7. Pacini Filippo; 3 marzo 1863. *Firenze.*
8. Panizza Bartolomeo; 3 marzo 1863. *Pavia.*
9. Savi Paolo; 3 marzo 1863. *Pisa.*
10. Stoppani Antonio; 3 marzo 1863. *Milano.*
11. Albini Giuseppe; 1° dicembre 1863. *Napoli.*
12. Briganti Francesco; 1° dicembre 1863. *Napoli.*
13. Giordano Giuliano; 1° dicembre 1863. *Napoli.*
14. Meneghini Giuseppe; 1° dicembre 1863. *Pisa.*
15. Pasquale Giuseppe Antonio; 1° dicembre 1863. *Napoli.*
16. Secchi Angelo; 1° dicembre 1863. *Roma.*
17. . . . .
18. . . . .
19. . . . .
20. . . . .

INDICE DELLE MEMORIE

NICOLUCCI G. — *La stirpe ligure in Italia ne' tempi antichi e ne' moderni.* . . . . N.° 1

PALMIERI L. — *Sopra un nuovo udometro autografico* . . . » 2

SCACCHI A. — *Ricerche sulle relazioni tra la geminazione dei cristalli ed il loro ingrandimento* . . . » 3

PALMIERI L. — *Sull' ozono atmosferico* . . . . » 4

GUISCARDI G. — *Studii sulla famiglia delle Rudiste* . . . » 5

PALMIERI L. — *Nuovo elettrometro bifiliare*. . . . . . » 6

GASPARRINI G. — *Osservazioni sulla origine del calice monosepalo e della corolla monopetala in alcune piante* . . . . » 7

TRUDI N. — *Sulla determinazione delle costanti arbitrarie negl' integrali delle equazioni lineari, così differenziali che a differenze finite*. . . » 8

SCACCHI A. — *Della polisimmetria e del polimorfismo dei cristalli* . . . . » 9

GASPARIS (DE) A. — *Sul calcolo delle orbite delle stelle doppie* . . » 10

PALMIERI L. — *Del periodo diurno dell'elettricità atmosferica e delle sue attenenze con quello delle correnti telluriche*. . . . . » 11

TRUDI N. — *Sulla decomposizione delle funzioni fratte razionali* . . . . » 12

GASPARRINI G. — *Osservazioni sul cammino di un micelio fungoso nel fusto vivente dell'*Acacia dealbata. » 13

Tucci F. P. — *Ricerche geometriche o grafiche delle minime e delle massime distanze* assolute *fra punti, linee e superficie qualunque, combinate a due a due in tutti i modi possibili* . . . . N.° 14
Palmieri L. — *Nuovo anemografo elettromagnetico* . . . » 15
Costa O. G. — *Studî sopra i terreni ad ittioliti delle provincie napolitane; diretti a stabilire l'età geologica de' medesimi* . . . . » 16
Trudi N. — *Sullo sviluppo delle funzioni fratte razionali.* » 17
Battaglini G. — *Sulle forme geometriche di seconda specie* . » 18
» *Sulle involuzioni dei diversi ordini nei sistemi di seconda specie* . . . . » 19
Nicolucci G. — *Sulla stirpe Japigica, e sopra tre cranî ad essa appartenenti rinvenuti presso Fasano* (Gnathia) *e presso Ceglie* (Cœlium) *nell'Italia meridionale.* . . . . » 20
Gasparrini G. — *Nuove osservazioni su taluni agenti artifiziali che accelerano la maturazioue nel fico.* . » 21
Costa O. G. — *Nuove osservazioni e scoperte intorno ai fossili della calcarea ad ittioliti di Pietraroja.* . » 22
Trudi N. — *Sulla partizione de' numeri.* . . . . . » 23

Vol. II. N.° 1.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

LA STIRPE LIGURE IN ITALIA NE' TEMPI ANTICHI E NE' MODERNI.

MEMORIA

DEL SOCIO ORDINARIO G. NICOLUCCI

letta nella tornata del dì 6 ottobre 1863.

« Les Liguriens sont du nombre de ces peuples dont la petite portée de notre histoire n'atteint que la décadence ».
Niehbur, *Hist. Rom.*, trad. Golbery, t. I, p. 229.

Qual popolo mai abitasse in antico la nostra Italia, d' onde movesse, per quali vie penetrasse nelle terre d'Ausonia, quali tracce ne rimanessero ancora in mezzo alle odierne popolazioni della Penisola egli è tal problema, che io non so veramente se mai sarà dato a scienza umana di risolverlo adeguatamente. Imperocchè se indagini siffatte riescono difficili per qualsivoglia popolo della Terra, difficilissime parmi si debbano considerare rispetto all'Italia, alla quale, perciocchè collocata in mezzo del mediterraneo, e per la catena delle Alpi congiunta col continente dell' Europa, non v' ha gente che l' avvicini che non abbia preteso al vanto di aver dato i primi abitatori ; onde le varie sentenze degli eruditi, che a cercare le nostre origini si sono rivolti quando alla Grecia o alla Fenicia, quando all'Egitto o alla Libia, quando all'Illirico, alla Gallia od alla Germania.

Nè maggior luce sopra questo oscuro argomento ha potuto spargere la linguistica, dalla quale non si è potuto ricavare altro vero, se non che gli antichi parlari del centro e del mezzogiorno dell' Italia si ranno-

dano al gran ceppo delle lingue ariane, mentre tutti gli altri idiomi dell'Italia settentrionale, non esistendo che pochissimi e dubbî monumenti scritti, sono affatto sconosciuti, e sulla stessa natura dell'etrusco, di cui pure abbondano ricordi letterati, è tanto il dubbio e la incertezza, che non si osa pronunziarne giudizio.

A ben altra fonte adunque è mestieri di attingere quando si voglia rischiarare la origine degli antichissimi popoli italiani, ed io non temo di asserire, che le nuove vie d'indagini che l'Etnologia oramai ci dischiude potranno somministrare sufficiente materia onde illustrare una sì ardua e controversa quistione, soprattutto quando alle congetture saranno sostituite le pruove dirette, ed alla incerta autorità degli scrittori i risultati della scienza e della osservazione.

Io limiterò per ora le mie investigazioni a' soli Liguri, rinomatissimi fra le vetuste popolazioni della Penisola, e verrò dimostrando, che questa gente fu forse la prima che pose stanza nel suolo italiano, e che, non ostante il volgere di tanti secoli e tante e sì diverse vicissitudini, parte di essi perdura tuttavia nelle sue antiche sedi, e conserva anche al presente que' medesimi caratteri e quelle medesime qualità di natura onde era distinta nell'età più remota.

§ 1.

Popolazioni primitive dell' Europa occidentale.

Uno degli argomenti, e forse il più degno di considerazione, per giudicare dell'affinità delle stirpi egli è quello della fisica lor conformazione, di quella fattura primigenia, che, quando non sia alterata da straniero connubio, si conserva immutata a traverso i secoli, non ostante il variar de'climi, il trasmigrar di contrada e il cangiare d'abitudini e di costumi. E chi con occhio non prevenuto da sistema si darà a volgere uno sguardo ai tanti fatti che l'Umanità ci presenta, non potrà non rimaner maravigliato di quella costanza onde alcune razze dell'uomo conservano la lor purezza primitiva, e tendono incessantemente a riacquistarla, se imeneo straniero ne intorbidasse per avventura le sorgenti originarie. Laonde io credo che se io potrò dimostrare che la schiatta de' Liguri

odierni si raffronta con quelle che prime abitarono il territorio dell'Europa, io avrò ragione a conchiuderne, che fra le stirpi più antiche del nostro continente si debbano annoverare anche i Liguri, al di là de' quali e degli altri popoli ad essi affini non vi ha ricordo che altra gente avesse mai popolato le solitudini dell'Europa.

Il nostro Continente, com'è noto pe' progressi recenti della Geologia, fu abitato dall'umana razza fin da quando vi esistevano que' grandi pachidermi e quelle altre specie di animali ora estinte, che sono caratteristici de' terreni *post-pliocenici* o *diluviani*. Ma di quelle schiatte primitive che videro sotto i loro occhi raffreddarsi il nostro suolo e coprirsi in parte d'immense ghiacciaie, e quindi riacquistare lentamente quel tepore di temperatura che ravvivò i germi di tante piante e di tanti animali, niun avanzo considerevole a noi rimane dal quale possiamo formarci un'idea della loro fisica conformazione. Tuttocciò che ne avanza sono frammenti di ossami, qualche mascella, qualche dente, e forse molti potrebbero dubitare ancora dell'esistenza dell'uomo in quel tempo sì lontano da noi, se a comprovarlo non venissero ogni dì più le opere della sua mano, armi ed utensili in pietra rozzamente lavorati da lui, e il cui numero è oramai così soddisfacente da far giudicare non essere state molto povere di abitatori, in quelle epoche sì lontane, le nostre regioni (1). Si è creduto eziandio essersi rinvenuti cranî umani, più o meno completi, riferibili a quel periodo in talune caverne ossifere del Belgio, della Germania, della Francia, dell'Inghilterra, ma noi abbiamo fatto osservare in altra nostra precedente comunicazione, che que' cranî, atteso la natura del terreno in cui furono trovati, non possono pretendere a quell'antichità che molti loro attribuiscono (2), e che non si debbono punto considerare apparte-

(1) Conf. Boucher de Perthes, *Antiquités celtiques et antédiluviennes*. Paris, 1846, 2 vol. in 8.° — *De l'homme antédiluvien et de ses œuvres*. Paris, 1860. — Rigollot, *Mém. sur les instrumens en silex trouvés à S.t Acheul*. Amiens, 1854. — Prestwich, *On the occurrence of flint implements associated with the Remains of extinct Mammalia*, ne' *Proceedings of the Royal Society of London*, 29 maggio, 1859. — Gaudry, *Comptes-Rendus de l'Acad. des sciences de Paris*, 26 7.bre, 3 ott. 1859. — Lartet, *Ibid.* 19 aprile 1860. — E. Collomb, *Biblioth. universelle de Genève*, t. VIII. 1860. — G. Pouchet, *Archiv. du Musée d'hist. nat. de Rouen*, 1860, p. 33. — J. Evans, *Flint implements in the Drift; being an account of further Discoveries on the Continent and in England, comunicated to the Society of Antiquaries*. London, 1862. — C. Lyell, *Geological evidences of the Antiquity of Man*. London, 1863, p. 93-170.

(2) Nicolucci, *Di alcune armi ed utensili in pietra rinvenuti nelle Province meridionali dell'Italia, e delle popolazioni, ne' tempi antestorici, della Penisola Italiana*. *Atti della Società Reale di Napoli. (Accad. delle scienze fis. e matem.)* t. I. 1863.

nenti a quelle stirpi che abitarono innanzi alle altre le nostre contrade, tantoppiù che le forme loro hanno l'impronta di quel tipo che giunse in Europa in tempi più vicini a noi, e che penetrò nel nostro continente quando esso era già tenuto ed abitato da altre genti che da lungo tempo vi soggiornavano. Monumenti craniologici adunque di quel tempo anteriore al periodo geologico attuale noi non possediamo, ma se ci fanno difetto materiali antropologici in quell'età sì vetusta, ne abbiamo invece in certa copia in quel periodo *litico* meno antico, il quale, sotto le condizioni geologiche attuali, precedè di lunga mano le successive epoche del *bronzo* e del *ferro*.

In molte regioni di Europa si sono rinvenuti cranî umani o in tombe o in altri antichi depositi associati ad armi ed utensili di pietra, e quindi riferibili a quell'età preistorica oggi chiamata *epoca della pietra*. In altre contrade parimenti di Europa non si sono, è vero, fin quì trovati teschi umani di quel tempo, ma essendovisi raccolti in abbondanza ed armi ed utensili lapidei della stessa materia, forma e lavoro dei precedenti, non è congettura azzardata se si crede, che anche ivi fossero esistiti in quella medesima età quegli stessi uomini che abitavano il resto del nostro continente, e i cui cranî ci forniscono materiali per determinarne i caratteri della razza. I quali, secondo si desume dalle osservazioni fatte sui teschi raccolti tanto in Danimarca ed in Germania, quanto in Isvizzera, in Francia e nelle Isole Britanniche, si riassumono nella forma *brachicefala* (teschio breve) del Retzius, cioè in quella forma craniale corta, larga, quasi sferica, il cui diametro trasversale è nella relazione col diametro longitudinale come 4 o più a 5, ovvero come 80 o più a 100 (1). L'occipite in questi cranî è poco o nulla proeminente ed è privo di tubercolo o protuberanza, onde il profilo della calvaria è così disposto, che la linea che lo segna, innalzatasi gradatamente dalla fronte alla regione posta fra le protuberanze parietali, declina quivi rapidamente per discendere, quasi in linea retta, sull'osso occipitale. La base del cranio è larga, soprattutto fra i meati uditivi, e la faccia lo è egualmente in corrispondenza della larghezza della calvaria.

(1) Il Retzius diceva il diametro longitudinale maggiore del trasversale di $^1/_5$—$^1/_8$ di pollice. Le proporzioni che io ho indicate sono determinate dal celebre antropologo signor J. B. Davis in quella sua scrittura che ha per titolo: *Observations upon sixteen ancient human Skulls found in Kirkhill, S.t Andrews*, 1860. *Edimburgh New Philosophical Journal*, Oct. 1861.

È questa la forma che si è incontrata costantemente ne' cranî che si riferiscono all'epoca della pietra. I teschi delle altre razze che comparvero in Europa nell'età del bronzo e del ferro si distinguono a primo aspetto dai primi, e si collocano in quell'altra grande categoria di cranî che il Retzius chiamava *dolicocefali* (teschi lunghi), e che sono caratterizzati dalla figura ovale della calvaria, dal diametro antero-posteriore più lungo di $^1/_4$ o più del trasversale, dal poco sviluppo delle proeminenze parietali, dalla sporgenza più o men notevole della protuberanza occipitale, dalla faccia lunga ed ovale, e da tutti quegli altri caratteri che costituiscono la forma ovoide del Prichard, quella forma che è propria della maggior parte de' popoli dell'Europa, de' Greci, degli Italiani, degli Spagnuoli, dei Francesi, Svizzeri, Tedeschi, Neerlandesi, Inglesi, Scandinavi.

Non però di meno nell'età del bronzo sono frequenti anche i cranî brachicefali, ma il lor numero scema gradatamente secondo che avvicinasi l'epoca del ferro, al mostrarsi della quale que' cranî son quasi tutti scomparsi, e le nuove razze sostituite pressochè dappertutto alle antiche. Nè poteva essere altrimenti, imperocchè i paesi di Europa, conquistati da nuove stirpi nell'epoche del bronzo e del ferro, si diradarono de' lor prischi abitatori. Non tutti i vinti sostennero il giogo de' vincitori; molti andarono in cerca d'altre sedi, o ricoverarono in luoghi non contaminati dalla presenza dello straniero. Que' che non furono assorbiti da' nuovi venuti e rimasero immuni da estraneo mescolamento, conservarono immutate le loro impronte originarie, ed anche a' dì nostri, dopo il volgere di tanta età, rappresentano i tipi di quelle razze primitive. Avanzi di queste schiatte durano tuttora nel settentrione e nel centro dell'Europa, nella stirpe de' Finno-Ugoriani, avanzi ne esistono ancora in quel gruppo di popoli che abita verso il punto di congiunzione de' Pirenei e de' Monti Cantabri, in Francia ed in Ispagna, avanzi finalmente ne vivono in Italia, in quel tratto di paese che ha nome di Liguria e di Piemonte, e che dal Varo si distende fino alla Macra, dal Mediterraneo fino al Ticino.

Non è mio proponimento occuparmi di quel ramo de' popoli della pietra che scelsero a lor dimora il settentrione ed il centro dell'Europa; nè dirò de' Baschi se non quanto è necessario a dar luce al mio argomento. Cercherò bensì di dimostrare, che i Liguri furon le prime genti che, per quanto si può raccogliere da' più vetusti ricordi, abitarono la nostra

Penisola, che il lor dominio si estese in antico probabilmente sopra tutta l'Italia, e che eziandio coloro che oggidì li rappresentano, per la conformazione craniale, si differenziano da' rimanenti Italiani, e si ricongiungono direttamente con quelle altre razze che ne' tempi antestorici signoreggiavano per tutta l'Europa.

§ 2°

I Liguri dell' antichità rintracciati con l' aiuto della Storia e della Filologia.

I

Gli scrittori greci e latini concordano nell'assegnare agli antichi Liguri quanto è il littorale mediterraneo da Emporia in Ispagna fino a' confini dell'Etruria in Italia (1). Pura credevasi quella porzione di essi che abitava la nostra Penisola, ma de' Liguri estesi dall'Alpi ai Pirenei quegli a levante del Rodano eran frammisti a' Celti, e si dicevano perciò Celto-Liguri, mentre coloro che si allargavano dal Rodano a' Pirenei si reputavano misti agli Iberi e si chiamavano Ibero-Liguri.

Tre popoli ligustici possedevano l'Ibero-Liguria, i Sordi o Sardi (2) a piè de' Pirenei e sulla marina iberica, gli Elesici fra i Sordi ed il Rodano (3), ed i Bebrici là dove ai Pirenei si congiungono le Cevenne, e nel versante occidentale di quest' ultima catena di montagne (4). La floridezza di questi popoli scomparve non appena i Volki, tribù celtica, ne occuparono il territorio al quale imposero i loro nomi. Le terre degli Elesici si dissero de' Volki Arecomici, quelle de' Bebrici de' Volki Tectosagi. I soli Sordi rimasero indipendenti, ma ridotti a piccol numero

(1) Ἀπὸ δὲ Ἰβήρων ἔχονται Λίγυες καὶ Ἴβηρες μιγάδες μέχρι ποταμοῦ Ῥοδανοῦ .... Ἀπὸ Ῥοδανοῦ ἔχονται Λίγυες μέχρι Ἄρνου (al. Ἀλπίου, Ἀντίου, Ἀντιπόλεως?). Scilace Cariand, § 3. seg. — Plin. *Hist. Nat.* Lib. III, cap. 7. — Erod. VII. 165. — Strabone, *Geograf.* IV. — Scimno da Chio, vers. 201-202. — Festo Avieno, *Ora maritima*, v. 609.

(2) Mela, Lib. II, cap. 5. — Plinio, III, 4. — Festo Avieno, *Or. marit.* v. 552.

(3) Festo Avieno, *Ora marit.* v. 585 e seg.

(4) Scimno da Chio, *Orbis Descriptio*, v. 200-201. — Sil. Italico, II, 421. — Tzetzes Isac in *Lycophr. Cassand.* v. 516.

decaddero rapidamente, e non divennero che l'ombra di quel che eglino erano già stati per l' innanzi.

A' Liguri distesi fra il Rodano e il Varo, fin da quando s'ebbe conoscenza dei medesimi, erano già miste parecchie tribù celtiche; nondimeno di puro sangue ligustico si dicevano essere i Salì Salluvì (1) nel paese a mezzogiorno della Durance, gli Albici a levante de' Salì verso i monti e verso la Durance, e presso il mare i Verrucini, i Suelteri, gli Oxibì, i Deceati, i Nerusì che aveano per frontiera il Varo, limite comune della Gallia e dell'Italia. Dalla Durance fino all'Isère inverso borea si stendevano i Voconzì (2), e da questi al Rodano, i Tricastini ed i Cavari, i quali si dividevano co' Voconzî il dominio di tutta la contrada fra l' Isère e la Durance.

Erano queste le tribù de' Liguri che abitavano fuori i limiti dell' Italia, e ch' erano distinti col nome generico di Liguri Transalpini. Ben più numerose e potenti erano le popolazioni ligustiche della Penisola, delle quali, benchè ai tempi in che di loro ci favellano Latini e Greci i confini fossero assai ristretti, nondimanco una gran parte dell' Italia superiore era ancora in loro dominio, e non pure tutta la Liguria e il Piemonte attuale, ma parte dell' Emilia e della Lombardia era posseduta da popoli di quella stirpe. Si hanno inoltre memorie che li ricordano in varie altre parti del bel paese, anzi una tradizione antichissima riferita da Eliano (3) ripeteva che *Mar* era stato il primo uomo italiano, e *Mar* era ligure, progenitore di que' Liguri Marici che erano la tribù, se non la più antica, certo delle più illustri e popolose della ligustica confederazione. Licofrone in un passo (v. 1351) in cui ci favella dell' arrivo in Italia dei due fratelli Tarconte e Tirreno, dopo averli condotti in Agilla li fa combattere e vincere in dura guerra per appunto i Liguri che occupavano quant' era il paese da essa Agilla a Pisa, e Servio grammatico estende il territorio de' Liguri fin sulla riva sinistra del Tevere, nel Settimonzio, narrandoci che vi successero a' Sicani di Spagna per esserne poscia cacciati a loro volta, in un co' Sicoli coabitanti, da' Sacrani, Sabini, mentre i Sacrani patirono la stessa sorte dagli Aborigeni (4), e questi di nuovo da' Sacrani; onde si pare che i Liguri non

(1) Ligurum celeberrimi ultra Alpes Salluvii, Deceates, Oxubii, Plin. III, 5.

(2) DE·LIGVRIBVS·VOCONTIEIS·SALLVVIEISQ. *Grut. Inscript.* p. 298, N.° 3.

(3) *Variarum histor.* Lib. IX, 10.

(4) Illi (Siculi) a Liguribus pulsi sunt. Ligures a Sacranis, Sacrani ab Aboriginibus. *Ad Æneid.* XI, 317.

solamente aveano abitato un tempo la Tuscia, ma la stessa sorte era toccata anche al Lazio. Del resto quest' antica possessione delle terre italiche da ligustiche genti ci è non meno attestata da Dionigi Alicarnasseo, il quale citando Filisto Siracusano fa intenderci, che furono non altro che Liguri coloro i quali sotto nome di Siculi invasero la Sicilia, preceduti già tempo dai Sicani, cui cacciati essi avevano dall'italico continente, cacciatine poscia eglino stessi al sopravvenire degli Umbri e de' Pelasghi (1). I quali Siculi erano già, come si raccoglie da autentiche testimonianze, anche nell' Umbria antica (2) che allargavasi ad oriente degli Apennini dall' Alpi alla Nera, nella Sabina, nel Lazio, nel Piceno (3), fra gli Equi (4), fra i Marsi ove anch' oggi esiste un paese (Goriano Sicolo) che ne ricorda il nome. Parte di essi era rimasta ancora, nel primo secolo di Roma, intorno al monte Esope dove furono ritrovati da' Locresi quando vennero errando al capo Zefirio (5), ed altri abitavano tuttavia nella stessa meridionale Italia fino al tempo delle guerre del Peloponneso (6).

Più rilevanti sono le notizie che ci rimangono intorno ai Liguri dell'Italia superiore. Qui abbondando autorità e memorie, fa d' uopo limitarsi nel numero, e contentarsi delle sole di maggior peso.

Nella Liguria marittima dal Varo al Paglione erano i Vedianzi (7) che aveano per capitale *Cemenelum*, oggi Cimiés, presso Nizza: alla Turbìa *(Trophæa Augusti)* cominciavan gli Intemelii con la capitale *Albium Intemelium*, or Ventimiglia (8), e confinavano a levante con gli Ingauni di cui era metropoli *Albingauno*, ora detta Albenga (9). Seguivano i Sabazî

(1) *Stor. Rom.* I, 22.

(2) Siculi et Liburni plurima Umbriae tractus tenuere, in primis Palmensem, Praetutianum, Adrianumque agrum. Umbri eos expulerunt, hos Hetruria, hanc Galli. Plin. III, 14.

(3) Dionigi di Alicarnasso, I, 19-22.

(4) La valle del Salto ha conservato ancora il nome de' Siculi nella sua appellazione attuale di *Cicoli*, o *Cicolano*.

(5) Polibio, *Stor.* XII, 5

(6) Tucidid. *Stor.* VI, 5.

(7) Oppidum Vediantiorum Civitatis Cemelion. Plin. III, 5. Nell'istesso luogo li ricorda una iscrizione scolpita in antico piedistallo di pietra rinvenuto nella Chiesa parrocchiale di Torretal, Diocesi di Nizza, e riferita dal Gioffredi nella sua *Corografia delle Alpi marittime*, Lib. II, cap. 5.

(8) Varro, *De re rustica*, III, IX-17. — Tacito, *Hist.* II, 13. — Plinio, III, 7. — Gioffredo, *loc. cit.* — G. Rossi, *Storia della Città di Ventimiglia dalle sue origini fino ai nostri tempi.* Torino, 1859.

(9) Gioffredo, *loc. cit.* Agli Ingauni fu mutato dai Romani fino a trenta volte il terreno. *Ingaunis Liguribus agro tricies dato.* Plin. III, 5.

che tenevano il golfo di Vado (1), e quasi nel bel mezzo della Liguria signoreggiavano i Genuati, la cui capitale sedeva sulla ridentissima riva ov'oggi è Genova (2), e il cui territorio prolungavasi sino a Portofino, eccetto la deliziosa valletta della Polcevera occupata da' Veturì (3). Da Portofino al Capo Mesco tutta la costa apparteneva a'Tigulì (4), ma le vallate de'monti, le cui acque riunite formano l'Entella, albergavano le tribù de'Lapicini, de'Garuli e degli Ercati (5). Nella limitrofa valle della Vara erano i Briniati o Friniati (6), ma dal confine de'Tigulì oltre alla Magra, tutto il littorale, non meno che gli alti gioghi eran tenuti da'bellicosi Apuani (7).

A tramontana de'monti il lor dominio si estendeva largamente nel territorio circumpadano fra l'Apennino, il Ticino e le Alpi. Dal Tanaro al Po erano i Vagienni (8), fra il Gesso e la Stura i Veneni (9), nella bassa valle del Tanaro i Levi (10) ed i Marici (11). Seguivano appresso gli Stazielli fra il Tanaro e l'Orba, de'quali era capoluogo la moderna Acqui (12), e sulle rive della Scrivia e della Staffora i Dertuniani (13), fondatori di Libarna, ora distrutta, non meno che d'*Iria* e *Dertuna*, oggi chiamate Voghera e Tortona. Dalle sorgenti della Trebbia al Po si ripartivano il territorio i Celetati, i Cerdiciati e gli Illuati (che dalla lor Vel-

(1) Oggi porto di Vai. Strabone IV, VI, 2. — Anche il lago Bracciano nel Lazio fu chiamato anticamente *Sabatino*, come il golfo di Vado *Vada Sabatia*. Una città che sorgeva presso quel lago ebbe egualmente il nome di *Sabatia*.

(2) Τοῦ τῶν Λιγύων ἐμπόριον. Strab. V, 1. — Tolomeo, III, 1. — Livio XXI, 32. — XXVIII, 46, XXX, 1. — Mela, II, 4. — Valerio Mass. VI, 7.

(3) Delle loro controversie co'Genuati fa menzione un Decreto del Senato Romano dell'anno 687. DE · CONTROVERSIEIS · INTER · GENVATEIS · ET · VEITVRIOS. Gruter. *Thes. Inscript.* l. 204.

(4) Plinio, III, 5.

(5) *Cis Apenninum Garuli et Lapicini et Hercates* Liv. XLI, 19.

(6) *Trans Apenninum Briniates fuerunt.* Livio. *Ibid.* e XXIX, 2.

(7) Livio XXXIV, 56; XXXV, 3-6-40; XXXVI, 38; XXXVII, 2. — Floro, II, 3, ove sono descritte le feroci guerre che i Romani sostennero contro gli Apuani per impossessarsi del porto di Luni che dagli Etruschi era ricaduto ai Liguri confinanti.

(8) Plinio, III, 5. — *Tum pernix Ligur et sparsi per saxa Vagienni.* Silio Ital. VIII, 607.

(9) Plin. loc. cit.

(10) Livio, V, 35. — XXXIII, 37. — Plinio, III, 21.

(11) Plinio, III, 21. — Tacito, *Histor.* II, 61.

(12) Plinio III, 7 — In una lapide presso l'Orelli, N.° 4927: AQVIS STATIELLIS.

(13) Oppure *Dertunenses*, come son detti presso Cassiodoro, *Variar.* X, 27; XII, 27. — Stef. Bizant. Δερτῶν, πολις Λιγυρῶν. Ἀρτεμίδωρος ἐν ἐπιτομαῖ τῶν ια· τὴν καλουμένην Δερτῶνα πόλιν τὸ ἐθνικὸν Δερτώνιος.

leja, costruita sul pendio del monte della Negra, furono anche chiamati Eliati o Veliati (1)), e dalla Trebbia al Panaro i Friniati che davan la mano a' Liguri dello stesso nome che popolavano i gioghi e le valli dei monti Apuani.

È vero che gli Etruschi avean tolto ai Liguri la costiera marina dall'Arno alla Magra, e che al di là degli Apennini gli aveano scacciati da gran parte del territorio oltre la Secchia, ma quando i Galli ebbero espulsi i Raseni dall' Etruria circumpadana, i Liguri riacquistarono quasi tutti i loro antichi dominî, e ritornarono padroni di quelle sedi, onde i Romani non più con gli Etruschi, ma sì coi Liguri ebbero a contendere pel possesso di quelle fertili terre (2).

Nè a questi soli restringevansi i territorî della gente ligustica nell'Italia superiore, avvegnachè quel popolo valoroso, allargavasi anch' oltre la sinistra sponda dell'Eridano, che in sua lingua chiamava Bodinco, (3) ed è noto per antiche memorie che i Vagienni fondarono Torino, i cui abitanti presero il nome di Taurini, ed erano padroni delle terre chiuse tra il Po, il Mallone e le Alpi (4). Stretti in federazione con essi erano i Segusiani (5) sulle rive della Dora Riparia, da Susa a Brianzone, e nelle valli di Viù e di Lanzo i Garocelli che si stendevano fin sull'alta Moriana, dove a confine di essi stavano i Salassi (6) in tutta la Valle d'Aosta fino al moderno Montestrutto o Montestretto in quel d'Ivrea. Limitrofi a' Salassi, dal lato del Vallese, erano i Seduni nel Fossignì, e nella Tarantasia i Centroni; di qua dalle Alpi a greco, nella region sesite (val di Sesia), d'onde dominavano fino in Valtellina i Leponzî (7), a mezzogiorno i Libui, e nel rimanente del territorio fra il Ticino ed il Po i Levi. Una tribù de' Leponzî, detta de' Viberi, era padrona dell'alto Valle-

(1) *De Eleatum populo triumphavit (M. Fulvius Co.).... quia soli propemodum Ligures magis loco quam viribus freti arma retinebant.* Liv.

(2) Il porto di Luni fu ritolto da' Liguri agli Etruschi scaduti dalla loro potenza. Anche Pisa ridivenne città ligure, se prestiamo fede a Giustino (*Histor.* XXI) e a Licofrone (*Cassand.* in fine). Ai Liguri la tolsero i Romani, non senza gravi e micidiali contese. I marmi di Luni erano chiamati ligustici da Stazio, Giovenale e Persio.

(3) « Boding o Poding vale privo di fondo. Tal radice è comune in Liguria, come si ha in Po-ra, Po-irino, Po-lengo, Po-lenzo, etc. » Celesia, *Dell' antichissimo idioma de' Liguri.* Genova, 1863, p. 7.

(4) *Augusta Taurinorum antiqua Ligurum stirpe.* Plinio, III, 17.

(5) Plinio, *loc. cit.*

(6) *Salassos.... Tauriscæ gentis Cato arbitratur.* Plin. III, 20.

(7) Plinio, *loc. cit.* — Strabone, IV, VI. — Tolomeo, III, I.

se, un'altra, chiamata de'Mesiati, avea fissato sua dimora in Val di Mesocco, e quella degli Agoni abitava presso le sorgenti dell'Agogna e della Sesia, non molto lungi dal Verbano, o Lago Maggiore.

I Canini, schiatta ligustica perchè appartenenti a'Levi Liguri di Ticino, si crede vivessero fra il lago Maggiore e quel di Como. Degli Orobì, fondatori di Como e sparsi nelle basse montagne fra Como e il lago d'Iseo, erano ignote le origini (1), ma pare ch' ei fossero anche Liguri come chiamavali Sidonio Apollinare. Liguri erano altresì gli Euganei che tennero i monti del Bresciano, del Veronese, del Vicentino e del Trentino, imperocchè fra le trentaquattro non saprei se comunanze o borgate che si contavano di essi la principale era quella degli Stoni o Steni (2), che nei Fasti Consolari pubblicati dal Grutero sono appellati Liguri, de'quali trionfò Q. Marcio nell'anno 118 innanzi l'era volgare (3). Dirò di più, che anche la Città di Brescia, se crediamo alle diligenti ricerche di uno storico dottissimo, ebbe da'Liguri le sue prime origini. « Narra Pausania (e qui mi permetto di ripetere le parole dell'insigne « scrittore) di un Cidno che fu re de'Liguri, e tenne i luoghi presso « l'Eridano. « *Λιγυῶν τῶν Ἠριδανου περαν υπερ γης της* Κελτικης Κυκνον « *ανδρα γενεσθαὶ βασιλεα φασι* » (4). A quel passo risponde un verso di « Virgilio che appella Cidno *fortissimo condottiere* de'Liguri (5), e Servio lo conferma, e Ovidio anch'esso lo ricorda (6), ed Igino con lui (7). « E quando io trovo chiamarsi Cidnea fino nel secolo di Augusto la

(1) *Originem gentis ignorare* (*Cato*) *se fatetur*. Plin. III, 17. Se questo nome vien dal greco, esso non sarebbe che una traduzione di quel di *Liguri*, montanari, poichè quell'appellazione in greco val quanto abitatori di monti.

(2) *Caput eorum Stonos*, Plin. III, 19.

(3) Q · MARCIVS · Q · F · Q · N · REX · PRO · COS · ANN · DCX · DE LIGVRIBVS STOENIS · III · NON · DEC ·

(4) *Cicnum Ligurum, qui in Celtica prope Heridanum sunt, regem musicæ clarissimum fuisse memorant.* Pausan. *Att.* c. 30. La lezione in *Gallia Transpadana* del Gagliardi acchiude un arbitrio ed un anacronismo. Sambuca, *Mem. Cenom.* p. 1.

(5) *Non ego te Ligurum dux fortissime bello*
Transierim Cycne.
Æneid. X., e veggasi come il fortissimo corrisponda alla tradizionale gagliardia de'Liguri.

(6) . . . . *Proles Steneleia Cycnus,*
Nam Ligurum populos et magnas rexerat urbes.
Metamorph. 11, 367.

(7) Hyginii *fab* 154.

« rocca bresciana (1) (*Cycnea specula*), è scusabile il sospetto che Li-
« guri si fossero per avventura i suoi principi. Arrogi ancora, che ai Li-
« guri presumibilmente spettavano le terre bresciane, «Στονος πόλις
« Λιγυῶν » (2), e che Livio raccontaci avessero tenuto i Libui (ch'erano
« forse una diramazione, come i Levi-Liguri, de' Liguri stessi) i luoghi
« dove ora sorgono le città di Brescia e di Verona (3) ».

Anche i Liburni, che a' tempi del predominio romano erano nell'Istria attuale, e che in tempi assai vetusti aveano occupato, insieme a' Siculi, eziandio le spiagge tra l'Adige ed Ancona, e vi esercitavano la nautica audacemente, i Liburni, che con fondamento storico il Mannert (4) potè dire il più antico ed attivo popolo nautico dell'Europa, dalla radice del loro nome, *Libu*, dall'arte marinaresca, dall'associazione co' Siculi lasciano credere con molta verosimiglianza che sieno stati anche un ramo di Libui o Liguri estesi per quel territorio che fu dei primi ad essere abitato nella nostra penisola (5).

Tracce adunque di sangue ligustico non iscarseggiano in verun luogo dell'Italia, ma da ogni parte risospinti coll'accrescersi dell'etrusca potenza, coll'estendersi de' Galli Cisalpini e col perenne allargarsi della dominazione latina, i popoli liguri furon ristretti a poco a poco in più angusti confini. Dopo gravi e reiterate sconfitte toccate per mano di soldati romani non più s'ebbe a parlar degli Apuani, che lasciarono a' vincitori le grasse terre fra la Trebbia e la Secchia, e la pianura a mare fra l'Arno e la Magra. I Galli a lor volta gli scacciarono dalle terre lombarde, dove prima de' Galli erano stati espulsi in gran parte dagli Etru-

(1) Catulli *Carmina*, LXVI.

(2) *Locos tenuere Libui.* Livio, *Hist. cit.*

(3) Oderici, *Storie bresciane dai primi tempi sino all'età nostra.* Brescia, 1853 e seg. I, p. 72.— Anche il dotto Zuccagni-Orlandini nella sua *Corografia d'Italia*, parlando degli abitanti antichi della Lombardia così conchiude. « Terremo quindi, se non come certa, almeno prossima alla certezza la discendenza ligure di quei popoli, i quali secondo ogni apparenza abitarono un tempo le province lombarde, vergini allora del contatto de' Galli. » t. V, p. 76. — E l'egregio signor Giovenale Vegezzi-Ruscalla, favellando in generale de' nativi delle valli alpine dal Mar Tirreno fino alla Rezia, così si esprime: « Bene mi basta sia ammesso che i più antichi abitanti dell'Italia settentrionale siano stati i Liguri, il cui territorio si estendeva lungo la catena delle Alpi dal Mar Tirreno sino alla Rezia per dimostrare l'unità genetica di quella zona alpina. » *Diritto e necessità di abrogare il francese, come lingua officiale, in alcune valli della Provincia di Torino.* Torino, 1861, pag. 14.

(4) *Geograph. d. Griech. und Römer*, Lib. III.

(5) G. Rosa, *Le origini della civiltà in Europa.* Milano, 1862, t. 2, p. 214.

schi, e prima di questi dagli Umbro-Sabelli, e i limiti ultimi non più turbati che segnarono finalmente il lor territorio furono il Varo, il Ticino, l'Enza e la Magra.

I Liguri tenner fermo in quest'ultimo riparo a cui li ridusse la prepotenza di più forti vicini. Uniti in leghe e confederazioni fra loro, benchè non formanti una compatta unità, pur si mantennero ordinati e forti, e non mai piede di vincitore calcò più terra da essi difesa. « Il « Piemonte (riferisco qui le parole di un egregio storico subalpino) può « riguardarsi come un paese intatto ed inviolato fino a'tempi dell'occu- « pazione romana. Il Gallo probabilmente non pervenne a toccarlo, il « Cartaginese s'aprì a gran forza il passo, ma non si trattenne fra i Li- « guri Subalpini, e il Cimbro-Teutono fece due volte il giro della lor « cerchia de'monti senza mai trovarne il lato vulnerabile...... I Liguri « marittimi per altra parte fecero pruova di un indomito spirito d'indi- « pendenza, e tenner fronte per più di ottant'anni a tutte le forze dei « conquistatori » (1). Ma i Romani, dopo aver sottomesso gli Apuani e trattine in cattività 40 mila che furono trasportati nel Sannio ov'ebbero stanza col nome di Liguri Bebiani e Corneliani (2), e dopo aver domate tutte le genti alpine liguri e galliche, ostinatamente ribelli all'autorità del Campidoglio, e consacrato quel trionfo con insigne trofeo eretto sull'ultima balza delle Alpi marittime (3), suggellarono la pace con la ligustica nazione, e ne assicurarono l'unione con la eterna Roma. Allora tutte le genti alpine e tutte le altre subalpine e liguri entrarono a parte del gran sistema dell'incivilimento latino. Poche città ebbero colonie del Lazio; le più cospicue furono assunte alla dignità di Municipio e donate de'più estesi diritti. Aosta ed Ivrea nel paese de'Salassi, Torino fra i Taurini, Vercelli e Novara fra i Libui, Augusta de'Vagienni, ora Bene, Alba, Asti, *Aquae Statiellorum* ora Acqui, Tortona, Voghera nella Liguria subalpina; Genova, Savona, *Albium Ingaunum* (Albenga),

(1) Gallenga, *Storia del Piemonte da'primi tempi alla pace di Parigi del 30 marzo 1856*. Torino, 1856, t. 1, § 18.

(2) Livio, XL, 38, 41.—Garrucci, *Antichità de' Liguri Bebiani raccolte e descritte*. Napoli, 1845.

(3) Gioffredo, *Alpi marittime*, II°, 150. Ved. Plinio che riporta la iscrizione nella quale sono menzionati i nomi delle nazioni debellate. Orazio allude a quel trionfo e a quel trofeo nelle sue Odi, Lib. IV.

« . . . . . . *arces*
Alpibus impositas tremendis
Dejecit acer plus vice simplici.

Albium Intemelium (Ventimiglia) nella Liguria marittima furono fabbricate di pianta, o rifatte dove prima giacevano i rozzi villaggi delle popolazioni native.

Ma dal tempo in che quelle contrade furono assorbite nella grand'orbita del mondo romano cessa ogni interesse della loro storia locale, e appena occorre il nome delle Provincie Liguri nel corso di que'secoli che separano il regno di Augusto dalla caduta dell'Impero d'Occidente, quando le tenebre si addensarono sulla faccia della terra, e tutta Italia fu sommersa nel vortice di quella immensa rovina.

Non ostante però che i Celti non avessero conquistato le terre de'Liguri al di là de'confini ne'quali costoro si erano ristretti dopo l'invasione dei Galli Cisalpini, tuttavia non poche di quelle genti per le pianure s'introdussero oltre la destra sponda del Ticino, e per le valli dell'Alpi penetrarono in mezzo a'Liguri. Così i Segusiani, confederati e vicini a'Taurini liguri, se si crede alla etimologia del lor nome, erano un popolo celtico. *Scingomagus*, sul monte Vesulo, non offre altra etimologia che quella derivata dal celtico, e *Rigomagus*, *Bodincomagus*, *Cameliomagus* erano città galliche, postate come piccole isole in mezzo ad un mare ligure. *Brigania*, oggi Briga, sul colle di Tenda, ha parimenti un' origine celtica, e tali sono in Liguria e in Piemonte que' nomi locali che anche al presente conservano la terminazione gallica in *ate*, in *ago*, o la voce *briga* o *briva* in principio o in fine delle parole, come Vespolate, Tordalbiate, Belgirate nella Provincia di Novara, ed Andrate in quella di Torino; Bellingago e Mercurago nel Novarese, e Briga, Brisipo, Riva, Rive nella stessa Provincia; Rivalta, Rivalba, Rivara, Rivoli, Rovigliano, Rivarossa, Rivarolo nella Provincia di Torino; Rivarone e Rivalta in quella di Alessandria; Briga, Briaglia, Sommariva in quella di Cuneo; Auriga e Riva in quella di Porto Maurizio, e Rivarolo nella Provincia di Genova.

Cotesto infiltrarsi della schiatta celtica fra i Liguri non ne alterò grandemente la purezza nativa. Come questi formavano il maggior numero, così i Celti furono assorbiti dalle popolazioni dominanti, ed appena lievi tracce del lor sangue rimasero entro i limiti in che per ultimo si ridusse la stirpe ligustica.

Non così dal Varo fino al Rodano ove convennero molte razze e si confusero fra loro, e al tipo ligure venne meno quella purezza che serbò sempre dal Varo alla Magra. I Fenicî dapprima che aveano sparse loro

colonie in quella parte del littorale mediterraneo e vi aveano fondate Massalia (1), Nemauso ed Alessia; che aveano vinto l'*esercito imperterrito de' Liguri contro i quali sarebbe venuto meno il valore e l'arco di Ercole*, se Giove per soccorrerlo non avesse scagliato dal Cielo una pioggia di sassi (2); che aveano costruito una strada su per le Alpi ghiacciate che menava di Gallia in Italia pel colle di Tenda (3); i Fenicî non furono estranei a quel primo imbastardirsi del sangue ligustico oltre il Varo. Di poi i Rodiensi che successero a' Fenicî (4), e quindi i Focesi che aggrandirono Massalia e fondarono altre colonie al di là e al di qua del Rodano, fra le quali, entro i confini della Liguria propria, *Nicaea* (5) e il piccol porto di Ercole, *Monoecus* (6), nel territorio de' Vedianzi, vi aggiunsero nuovi estranei elementi, e degradarono viemmaggiormente la purezza originaria della stirpe ligure nella Celto-Liguria.

Però Nicea non ebbe sui Liguri d'Italia quel medesimo ascendente che i Focesi vantavano sui Liguri al di là del Varo; imperciocchè Nizza non ebbe mai amici fra i Vedianzi, « i quali non lasciarono mai che i « coloni di Focea dormissero sogni tranquilli sulle non facili loro coro- « ne (7) », onde da questo lato i Liguri italici neppur ebbero grave intacco; anzi la stessa città di Nizza non ha conservato che scarse vestigia di sangue ellenico ne' suoi abitatori, ne' quali domina pur sempre quel tipo

(1) Il nome di *Massalia* è punico, e ciò basterebbe a dimostrare la prima fondazione di questa città esser opera de' Fenici ed anteriore al VI° secolo innanzi G. C. Ma pruova dippiù l'origine fenicia di Massalia una grande iscrizione punica ivi rinvenuta nel 1845, contenente una legge officialmente promulgata, la quale non poteva ivi essere pubblicata se i Fenicî non fossero stati padroni della colonia.

(2) Eschilo presso Strabone 1, XLI. — Mela, II, 5.

(3) Di questa strada si fa anche onore ad Ercole che gli Dei contemplarono tagliar le nubi e spezzar le cime gelate delle Alpi:

> *Scindentem nubes frangentemque ardua montis*
> *Spectarunt Superi.*
>
> Silio Ital. I, 111.

Dionisio, I, 41. — Ammiano Marcell. XV, 9. Fu questa la via che, restaurata dai Romani, prese indi il nome di *Via Domitia*.

(4) Plinio, III, 4. — Isidoro, *Origines*, XIII, 21. — Hieron. Comm. Epist. ad Galatas. Lib. II.

(5) Ἐνίκαια suona lo stesso che vittoria, e i Massalioti la edificarono per eternare la memoria di una vittoria da essi ottenuta contro i Salî ed i Voconzî. Strab. IV. — Plinio, III, 5.

(6) Ὁ Μονοίκου λιμὴν ἔχων ἱερὸν Ἡρακλέους Μονοίκου καλουμενός. Strab. IV — Plinio, III, 5.

(7) A. Valle, *Lettera al ch. G. Vegezzi-Ruscalla* inserita nel *Ragionamento* di quest'ultimo che ha per titolo la *Nazionalità di Nizza*. 2ª ediz. Torino, 1860, p. 48.

ligustico che è sì caratteristico di tutta la costiera dal Varo alla Magra.

Dirò appena delle invasioni barbare che seguirono in Italia alla caduta del romano Impero, e dalle quali se venne ai Liguri danno e sciagura, non ebber eglino però ad ospitare lungamente quegli stranî. Alarico non penetrò fino ad Asti che per essere sconfitto a Pollenza; Attila non venne oltre Ticino, e i Longobardi e i Franchi, non aspirando ad altro che al comando, ordinarono a lor modo il governo, ma lasciaronvi i popoli in balìa di sè medesimi. Gli Ungari furono un uragano che imperversò pochi istanti e riapparve tosto il sereno, e gli stessi Saraceni che percossero più fiate la riviera e rimasero sulle Alpi dal principio fin quasi alla fine del X° secolo, non lasciarono di sè altre orme, che le consuete delle loro depredazioni.

I Liguri uscirono immuni da quel rimescolamento de' popoli dell'Europa. Gli uni, riacquistata la loro indipendenza, si eressero in governo libero, ed operando miracoli tennero il dominio de' mari e sparsero colonie dai confini dell'Egitto fino in fondo al mare di Azof. Gli altri, divisi sotto l' autorità di grandi feudatarî o conti o duchi o marchesi che si chiamassero, si ricongiunsero man mano a quel nucleo di cui fu capo Umberto dalle bianche mani, e composero quella compatta Monarchia Sabauda che fu sempre speranza d'Italia, ed è stata la potente ausiliatrice del nostro glorioso politico risorgimento.

II

Fin qui la storia, ma tracce ligustiche sono sparse ancora più ampiamente dappertutto in Italia in molti nomi di paesi, di fiumi, di monti, di persone, i quali non possono essere spiegati nè col greco, nè col latino, nè col celtico, nè con altre lingue ariane, nè semitiche, ma soltanto col sermone biscaglino che è lingua affatto estranea alle ariane ed alle semitiche, e non ha appiglio di analogia con alcuno de' parlari adoperati nell' occidente dell' Europa.

Da studî profondi fatti sopra queste parole si è dedotto ch' elle fossero i ruderi dell'antica lingua degli Iberi, i quali signoreggiavano, innanzi l' arrivo delle colonie celtiche, nella Spagna e nelle Gallie. Se avessero tenuto in lor dominio anche l' Italia pria della venuta delle stirpi Italo-Pelasghe io non oserei affermarlo, ma che un popolo che parlava la stessa

lingua degli Iberi od altra molto affine alla medesima avesse occupato in antico la nostra Penisola, e' parmi non esservi luogo a rivocarlo in dubitazione. E poichè non vi hanno memorie che ricordino veramente gli Iberi con questo nome in Italia, io ho per fermo, che quell' idioma che in Francia ed in Ispagna era parlato dal popolo iberico, in Italia lo fosse invece da'Liguri, sia perchè il maggior numero di quelle voci appartengono più propriamente al territorio occupato sempre da questa stirpe, sia perchè tra gli Iberi presso antichi scrittori eran tenuti anche i Liguri, i quali si credevano affini, se non identici, con quella schiatta. Plutarco infatti (nella vita di Mario) chiamò i Liguri direttamente col nome di Iberi; Eschilo (1) dice che il Po, che prende origine dalle Alpi liguri, discende dal paese degli Iberi (2), ed Ecateo presso Stefano Bizantino asserisce, che Μασσαλία, Ἄμπελος, Μόνοικος, colonie greche, erano fondate sulla costa d' Iberia, la quale comprendeva, secondo quello scrittore, anche la Celto-Liguria e la Liguria propria.

È sulle tracce adunque di quella lingua, che probabilmente fu comune a' Liguri ed agli Iberi, che io andrò ricercando la presenza de'primi nelle varie parti dell' Italia, onde giudicare della loro diffusione, ne' tempi antestorici, sul territorio italiano.

Lo stesso nome *Li-gur*, *Li-gora* non è che una parola che significa in basco *abitatore di luoghi elevati*, da *Li*, *illi*, popolo, paese, e *gora*, alto, elevato, onde l' appellazione di *Li-guria*, paese di monti. Nullostante non mancano altre etimologie, ed Artemidoro (3) ed Eustazio (4) dicono i Liguri aver tratto il lor nome dal fiume Λείγερ, Λίγρος, che molti dotti, ed Ukert tra questi (5), credono essere il *Liger* o la Loire, ed altri opinano ch'ei sieno la medesima cosa che i Cambri *Lloegrw* o *Loegrwyr*, o gli Africani Libî, di cui tanto quelli quanto i Liguri si credono essere discendenza.

Una parola che s' incontra frequente in molti nomi locali in Iberia è

(1) Fu il primo ad occuparsene con tutto il corredo delle cognizioni necessarie G. de Humboldt in quella sua nobilissima Dissertazione che ha per titolo: *Prüfung der Untersuchungen über die urbewohner Hispaniens vermittelst der Waskischen Sprache*. Berlin, 1821, 4°. — Gli altri non han fatto che ripetere e confermare le osservazioni del dotto alemanno.

(2) *OEschylus in Iberia, hoc est in Hispania, Eridanum esse dixit* Plin. XXXVII, 2.

(3) *Apud Stephan. Byzant. sub voce* Λιγερει.

(4) *Ad Dionisium Perieget*, v. 76.

(5) *Geograph. der Griech. n. Römer — Gallien*, 1832, p 289. — Zeus, *Gramm.* II, p. 764.

asta, che in biscaglino vuol dire *pietra*, *roccia*, *monte*, e si trova quasi sempre ne' nomi di que' paesi che son posti su' monti o vicino ad essi, come *Asta*, *Asteguieta*, *Astigarraga*, *Astobiza*, *Astorga*, *Astulez*, *Asturia*, *Astigi*, *Astapa*. Questa voce non è rara in Italia, e la troviamo in *Hasta*, oggi Asti, città nella Provincia d' Alessandria, in *Bastia*, comune presso Mondovì, in *Basta*, oggi Vaste, nella Terra d'Otranto, in *Astura* (da *asta* ed *ura* acqua) fiume, isola e città del Lazio presso il Circello. *Asturius* è anche nome gentilizio romano che si legge presso il Grutero, il Muratori, il Donio etc., ed *Asturensis*, nome servile che si trova presso il Marangoni, *Acta S. Victor.* p. 147 — *Stura*, che è evidentemente composto delle medesime radici di *Astura*, è nome di fiume che nasce nelle Alpi marittime presso il colle dell'Argentiera, nella Provincia di Cuneo, e si versa nel Tanaro poco lungi da Cherasco. Due altri fiumi minori, anche in Piemonte, hanno la stessa appellazione, e si distinguono l' uno col nome di *Stura inferiore* o di Lanzo, e l' altro con quello di *Stura piccola* o di Casale, mentre al fiume maggiore s'applica il nome di *Stura Demonte*, o superiore.

Nè meno evidente è l'origine iberica o ligure de' nomi terminati in *iria*, *uria* o *oria*, parole che significano in basco *luogo*, *paese*, *contrada*. In Ispagna sono frequenti le appellazioni con questa desinenza, e in Italia non sono neppur rare, anzi talora s'incontrano parole con quelle terminazioni che son comuni tanto alla nostra, quanto alla Penisola Iberica ed all'Aquitania, come *Iria Flavia* nella Tarraconese (1), ed *Iria*, or Voghera in Liguria (2); *Liria*, oggi Le Lez nella Narbonese (3), e *Liris* fiume nell'Italia meridionale.

Durius è nome di due fiumi in Ispagna, oggi Duero e Guadalquivir (4), e *Duria* (5) parimenti si chiamavano in Italia i due fiumi ch' or si dicono Dora Baltea e Riparia, l'una maggiore che discende dalle Alpi Graie, e l' altra minore dalle Cozie. *Durii* è anche un borgo *(Antonin. Itinerar.)* nella Provincia di Lomellina, oggi Dorno.

Uria era il nome di una Città nella Betica, ed *Uria* chiamavansi in

(1) Tolom. II, 6.
(2) Tolom. III, 1. — *Anton. Itiner.* 288. — *Tabula Penting.* segm. III, d.
(3) Plinio, III, 3.
(4) Cicero *pro Balbo*, c. 2. — Strab. III, 2, 4, e IV, 12.
(5) Tolom. III, 1. — Strab. IV, 5, 7. Plinio, III, 20.

Italia una città estinta presso Nola (1), un borgo, oggi Rodi, presso il Gargano (2) e la Metropoli de' Sallentini, oggi Oria (3). La stessa voce trovasi anche in Manduria (4), in Terra d'Otranto, città celebre non meno per l'espugnazione fattane da Q. Fabio nella seconda guerra cartaginese (5), che per la sua fonte ricordata da Plinio nelle maravigliose memorie che de' fonti e de' fiumi raccolse nelle sue storie (6).

Turium è fiume nella Spagna Tarraconese, or chiamato *Henares*, e *Thurasio* (Tarazona) città nella Provincia di Saragozza. In Italia *Turia* era il nome indigeno della fonte presso la quale i Sibariti edificarono la città che chiamarono anche Turii (Θούριον, Θούριοι, *Thurium*) dopo che Sibari fu distrutta da' Crotoniati nel 3.° anno della LXXXIII Olimpiade, cioè nel 443 av. l'era volgare (7).

Il nome di *Hetruria*, contrada tanto celebre nell'Italia Media, non sembra mal prestarsi ad una etimologia iberica o ligure; etimologia che potrebbe applicarsi altresì a molti gentilizî etruschi, come *Felthuria*, *Felthurius*, o *Velthuria*, *Velthurius*, etc. all'osco *Furrius* (Mommsen, R. N. I. L. n. 3566), al latino *Furius*, *Mamurius*, etc.

Dalla radice *ur* o *ura* acqua sono state formate molte voci iberiche, come *Ast-ura* già sopra citata, *Ur-biaca*, *Il-uro*, *Il-uris*, fiume nella Gallia Narbonese che Strabone chiama *Ilybirris* ed Ateneo *Iliberris*, *Sub-ur* fiume nella Lusitania, *Mur-gis* città littorale della Betica, *Eb-ura* (Strabone, III, 18) nella Betica stessa, *Eb-ora* nella Lusitania (Plinio IV, 35) e molte altre. Medesimamente in Italia occorrono spesso parole delle quali fa parte la radice *ur*, *ura*, come *Lem-uris* e *Lem-urinus* fiume e

(1) Plinio chiama *Hyrini* i nativi di *Uria Campana*. Le monete che vi si riferiscono portano talvolta iscrizioni greche con le leggende ΥΡΙΑΝΟΣ, ΥΡΙΕΤΕΣ, ΥΡΙΑΔΑΣ (ΥΡΙΑΔΑΣ?), ed altra leggende greco-oscizzanti *Irina*, o in osco puro *Urina*. Conf. Mommsen, *Unteritalianisch. Dialekte*, p. 105.

(2) Plin. III, 9.

(3) Più anticamente fu detta anche *Hyria* (Erod. VII). In Plinio, *loc. cit.*, è chiamata *Varia* cui cognomen *Apuliæ Messapiæ* — Strab. VI, 3, 6. — Varro ap. *Probum ad Virg. Eclog.* VI, 31. Nelle monete scrivevasi anche OPPA (Ekkel, *Doctr. Num.* I, 163. — Fiorelli, *Mon. ined.* Nap. 1845, p. 22).

(4) Steph. Byzant. *sub voce* Μανδύριον.

(5) Livio, XXVII, 15.

(6) Plinio, II, 103.

(7) Diodoro Siculo, XII, 10. Plutar. *in Vita Nic.*, § 5. La fonte Turia è rappresentata in alcune monete di Turium da una testa di donna inghirlandata di giunchi con la leggenda ΘΟΥΡΙΑ. Non altro rimane di Turium che pochi avanzi in riva al mare, e il nome della contrada che ora chiamasi *Torrana*. Corcia, *Storia delle due Sicilie*, t. III, p. 300.

monte della Liguria (1), *Ur-binum*, città posta fra due fiumi che sono il Metauro e il Foglia, *Ur-cinium*, Aiaccio, città littorale della Corsica, *Mur-gantia*, oggi S. Maria Morgata, borgo del Sannio presso le origini del fiume Frentone (2), *Mur-gentium* città della Sicilia (3), *Eb-urum*, oggi Eboli, città nel Principato Citeriore (4), *An-xur*, Terracina, in sulla spiaggia del Tirreno, nella Provincia di Marittima e Campagna. Così chiamavasi pure una fonte presso Terracina ricordata da Vitruvio (5) e dal Grammatico Servio (6), ed *Anxur* era anche il nome di uno de'compagni di Turno rammentati da Virgilio (7). Giove imberbe e fanciullo era venerato in Anxur, e perciò detto *Jupiter Anxurus*.

La stessa radice *ura* è in *Ta-urini*, popolo ligure la cui metropoli appellossi indi *Augusta Ta-urinorum*, oggi Torino, e ne' *Ta-urini* etruschi ricordati da Plinio come abitatori di un luogo che chiamavasi *Aquae Taurinae* (Acquapendente?) (8). *Ta-urinum* era anche un borgo de'Frentani presso il fiume Trivio, non lungi dall'odierna Lanciano, e *Ta-urianum*, città de' Bruzî sulle sponde del Metauro che per mezzo la divideva (9). Sulle rive del fiume se ne veggono tuttora le rovine nel luogo che ritiene attualmente il nome di *Traviano*, alterate da quello di *Tauriano* o *Tauriana* (10).

Nè diversa sembra l' etimologia di *Pisa-urum*, Pisa, spartita in due dal fiume Arno; di *Pisa-urus*, fiume dell' Umbria, oggi il Foglia; di *Meta-urus* riviera anche nell'Umbria, e nella Bruzia; di *Volturara* in provincia di Principato Citeriore presso le fonti del Salzuola e alla destra del Catola; di *Vulturnum* oggi Capua, città cospicua della Campania, e

(1) Menzionati nel Decreto romano sulle controversie tra i Genoati ed i Veturî.

(2) Livio, X, 17. — Romanelli, *Topografia istor.* II, 481, e in medaglia presso il Carelli ΜΥΡΓΑΝΤΙΑ.

(3) Strab. VI, 16. — Liv. XXIV, 27. — Sil. Ital. XIV, 265. — Il nome de'Murgentini trovasi in medaglie con la leggenda ΙΤΝΑϽЯΟΜ, ΙΤΝΑΊϤΟΜ e ΜΟΡΓΑΝΤΙΝΩΝ.

(4) Questo nome s'incontra in una iscrizione pubblicata dal Mommsen, n.° 189, e dall'Orelli. — Henzen, n.° 7145.

(5) III, 3.

(6) Ad *Æneid.* XII, 799.

(7) *Æneid.* X, 544.

(8) *Aquenses cognomine Taurini*, III, 5.

(9) Così la chiama Pomponio Mela, II, 4. — Plinio l'appella *Taurentum*, III, 5, e Stefano Bizantino Ταυρχνία.

(10) Grimaldi, *Annali*, t. I, p. 150. — Corcia, *Stor. cit.* 187

di *Vulturnus* fiume che vi scorre dappresso (1), di *Turrus*, Torre, fiume presso l'antica Aquileia e di *Turres*, oggi S. Biagio, fra *Mamurtium* ed *Hipponium*.

Impronta ligure parmi ravvisare ancora nell' antico nome di Tivoli, *Tibur*, sull' Aniene, nel fiume Tevere, *Tiber*, e nel *Trerus*, oggi Sacco, affuente del Liri nel Lazio, imperocchè la sillaba *er*, forma abbreviata di *erri* o *erria*, incontrasi sovente nelle terminazioni di nomi iberici, come in *Elimberrum*, o più correttamente *Eli-berri* o *Illi-berri*, e nei nomi liguri di *Procombera* (la Polcevera) e *Comberane* fiume e ruscello menzionati nella tavola de' Genoati (lin. 7, 9). *Tuder* o *Tudertum*, oggi Todi, nell'Umbria, posta sulla vetta di un colle che sorge presso la sinistra del Tevere, ove il Naia vi reca il tributo delle sue acque, è nome che si avvicina se non è identico quello di *Tader*, oggi Segura, fiume della Spagna che nasce dalla Sierra Segura nella Provincia di Chinchilla e cade nel mediterraneo a 28 chilometri al S. E. di Alicante.

Altri nomi topici hanno identiche sillabe iniziali tanto nell'antica Iberia, quanto in Italia. Io non ne citerò che pochi esempî, i quali si potrebbero moltiplicare senza molto studio.

Ta o *Tar* che incontransi ne'nomi iberici di *Tagus*, *Tagonius*, *Tarraco*, *Tarraconensis*, *Tartessus* trovansi pure ne' nomi italici di:

Ta-rus (Taro) fiume del Parmense che sgorga al confine del Genovesato;

Tar-ros, antica città della Sardegna;

Ta-burnus, monte della Campania famoso per gli oliveti che ne coprono il dorso, onde Virgilio:

« .... *Iuvat Ismara Bacco*
Conserere, atque olea magnum vestire Taburnum;
Georg. II. 37, 38.

Ta-marus, fiume del Sannio che nasce dagli Apennini, e mette foce, poco sotto Benevento, nel Calore;

Ta-narus, fiume del Piemonte che sorge in due rami dai colli di Tanarello e di Carsano nella Provincia di Cuneo;

Ta-nager (oggi Negro) fiume nella Lucania che sbocca in mare fra Pesto e Bussento.

(1) Plin. III, 17. Varrone confessava che questo nome non appartiene alla lingua latina: *Quod oritur in Samnio, Vulturnus, nihil ad latinam linguam*. De L. L. Lib. IV, 55.

La sillaba iniziale *Var* trovasi in *Varia*, città della Spagna Tarraconese (oggi Logrono) e ne' *Varduli*, egualmente che in *Varus*, fiume che divide l'Italia dalla Francia, in *Varallum* in Valsesia, e Varallo-Pombia in Provincia di Novara, mandamento di Borgo Ticino.

Car occorre frequente nel principio di nomi locali iberici, e si associa all'idea di altezza, elevazione, nobiltà, come in *Carraca*, *Carbulo*, *Carteia*, ne' *Carpetani*, ne' *Caristi*. In Italia parimenti questa sillaba non è rara, e si ha in:

Carrea (Cherasco) nella Provincia di Cuneo;

Carseoli (Carsoli) nell'Apruzzo Ulteriore II;

Carsulae, città nell'Umbria tra S. Gemini ed Acquasparta;

Carventum, città distrutta nel Lazio di cui Livio e Stefano Bizantino (1);

Carbania, nell'Isola di Sardegna (2);

Carbina, borgo della Messapia;

Carcines fiume nella Brezia (3), e *Carcinus* borgo nella stessa Provincia (4).

Mar è nome ligure. Da lui ebbero nome i Liguri Marici fra il Taro e l'Apennino, e la contrada indi nominata Marenco o Marengo. Una Dea *Marica* era onorata da' Minturnesi (5), ed Orazio e Livio fanno altresì menzione di un *litus Maricae* e *lacus Maricae* (6). Anche in Patercolo si ha ricordo di una palude Marica presso Minturno dalla quale fu tratto fuori C. Mario (7). *Maro*, *Marola*, *Maregia*, *Maranello*, *Marana*, *Marassi* sono appellazioni topiche odierne, le quali sembrano derivate dalla medesima radice ligustica.

Alcuni altri nomi proprî si ripetono tanto in Iberia quanto in Italia; onde i *Cerretani* della Catalogna si riscontrano in *Caere*, oggi Cervetri, e ne' *Caerites* o *Caeretani* dell' Italia; *Salpesa* nella Betica ne' *Salpinates* dell'Etruria ed in *Salpina*, palude nelle Puglie; *Numantia* con Numana (oggi Umana) nel Piceno di fondazione Sicula (8).

(1) Liv. IV, 53-55. Un cognome *Carventanus* trovò il Borghesi ne' *Nuovi frammenti de' fasti consolari*, I, 16 e seg.

(2) *Anton. Itiner.*

(3) Plinio, III, 15

(4) Mela, II, 4.

(5) *Servius ad Æneid.* VII, 7.

(6) Oraz. lib. III, od. 17. — Liv. XXVII, 37.

(7) Lib. II, cap. 19.

(8) Tolom. III, 1. — Mela, II, 4. — Plinio, III, 17. — Silio Italico, VIII, 431.

Cluentia e *Sars* nella Tarraconese si riscontrano in *Cluana*, borgo del Piceno presso la foce del Chienti (1), e in *Sarsina* città dell'Umbria non lungi da Cesena. Il *littus curense* della Betica trova riscontro in *Cures*, città de'Sabini, oggi Corese, e in *Curenses* o *Curetes* (d'onde il nome di *Quirites*), in *Curiates*, popoli dell'Umbria (2), e nel gentilizio romano *Curiaticus*, non infrequente nelle lapidi romane.

Cotali nomi identici che s' incontrano tanto in Italia, quanto in Ispagna, e il numero de' quali si potrebbe allargare ampiamente, sono i ruderi superstiti, di quella parentela che stringeva insieme i primi abitatori della Penisola Iberica ed Italiana. I quali, se non appartenevano ad un ramo unico di una stessa schiatta, erano però genti affini che nel loro materiale linguistico rivelavano chiaramente l'origine comune dalla quale esse discendevano.

E poichè di que'popoli vetustissimi dell'Italia che per tanti lati si stringono agli Iberi, abitatori primitivi della Spagna e delle Gallie, non sopravvisse altro nome che quello de' Liguri, e col nome in parte anche la stirpe, così non crediamo essere molto lungi dal vero, se ripetiamo essere stati Liguri coloro che popolarono, ne' più antichi tempi la nostra Italia, ove formarono il substrato di quelle popolazioni aborigene sulle quali si sparse la conquista ariana che rimescolò da capo a fondo, nell'epoca del bronzo, l'etnologia di tutta l'Europa.

Non faccia però ad alcuno maraviglia, se favellando d'idioma ligustico io non abbia citato se non pochi nomi di luoghi e di genti. Altri monumenti non restano di quella lingua, ed essi soli potevano servirmi di termini di comparazione. È vero che Seneca scriveva a sua madre che i Corsi erano genti cantabre che serbavano calzari e berrette al modo di quelli de' Pirenei e qualche parola cantabra, ma che in generale l'intero linguaggio loro s' era allontanato dal patrio per l' influenza de' Greci e de' Liguri, onde si vede come nel sermone si distinguessero a quei tempi i Liguri dagli Iberi; ma io ho per fermo, che se esisteva, come non par dubbio, una differenza fra entrambi i parlari, cotesta varietà non sarà stata maggiore di quella che intercede fra i dialetti di una medesima lingua, sicchè sarei per credere (e le parole sopra riferite me ne danno argomento) che fra Liguri ed Iberi non corresse altra dissonanza lingui-

(1) Plinio, III, 18. — Mela, II, 4.
(2) Plinio, III, 19.

stica, se non quella che oggi si nota fra l'idioma castigliano p. es. e l'italico; idiomi generati, con pochi elementi eterogenei, dal latino ch'erasi fatto comune anche all'Iberia, come in tempi più remoti la lingua iberica era stata forse comune alla Spagna ed all'Italia. Studiando più di proposito ne'vernacoli ligustici si troverebbero probabilmente maggiori punti di contatto col sermone biscaglino, ma è pur d'uopo convenire che anche nell'antico ligure si trovano alcune parole e terminazioni delle quali non si è incontrato traccia fra gli Iberi, parole e terminazioni che si sono perpetuate sino al presente anche a traverso la dissoluzione e scomparsa della favella de'Liguri (1). Più notevole fra coteste particolarità dell'antico ligure sono le desinenze in *asca* o *asco*, le quali trovansi ripetute più volte nella celebre tavola di Polcevera ove sono menzionati un *Fluvium Neviascam*, *Rivom Venelascam*, *Fluvium Veraglascum*, desinenze che sono anche al presente assai comuni in varie appellazioni topiche in Liguria, in Piemonte ed in Lombardia (2).

« Dopo ciò (così mi piace di conchiudere con un egregio ricercatore « dell'antichissimo idioma de'Liguri) parmi soluto ogni dubbio intorno « la parentela del ligure e del basco, parentela che potrebbe porsi in « ben maggiore chiarezza, esaminando (nè la povertà de'nostri studi il « consente) le leggi grammaticali ed eufoniche comuni ad entrambe, « l'invariabilità delle lor radicali e l'assenza d'ogni interna flessione, « segno non dubbio d'uraliche irradiazioni. Le quali invero sono ancor « vive così nella sintassi, come in molte radici che il ligure ha comuni « col basco e con gli idiomi che dall'uralico ceppo derivano. E basti a « tanto. Chi pensa quanta stesa di mare e qual tratto di terra partono « Italia da Spagna, e come per l'opposto il nostro paese sia collegato « alla Francia, maraviglierà senza fallo, che l'attuale lingua spagnuola, « il suo assetto grammaticale e la sua prosodia s'accostino all'italiana « a più doppî che non la francese. La spiegazione di questo fatto sta nella « comunanza d'origine degli Iberi e de'Liguri (3) ».

(1) Celesia, op. cit. p. 50.

(2) Tali sono Cassinasco, Morgasco, Prasco, Bagnasco, Curnasco, Cherasco, Terantasca, Arcellasco, Cremasca, Cervasca, e molti altri.

(3) Ibid. p. 72. « Una colonia d'Iberi troviam pure nella Giorgia; dell'antica cognazione durano « tuttavia le vestigia. Le Giorgiane, l'Andaluse e le Liguri, così somiglianti nel loro tipo, non hanno « chi le avanzi e pareggi nella venustà delle forme ». Ibid., nota.

§ 3.

Tipo ligure antico desunto da medaglie e da antichi cranî ligustici.

Mentre la voce unanime degli antichi celebrava con laudi l'intrepidezza, il valore e la mirabil forza de'Liguri (1), non ci rimane memoria che ci ricordi qual fosse stata la loro fisica conformazione. Da alcune sole espressioni si può raccogliere ch' egli erano di mediocre statura, di adusta e valida complessione (2). Alcuni usavano di recidersi i capelli, altri di conservare intatta la chioma cui lasciavan cadere liberamente sulle spalle, onde venne ad essi l' appellazione di Liguri *tonsi* e *capillati*, o *chiomati (tonsi et comati)* (3). Sappiamo dippiù che que' capelli eran neri o pressochè tali, se crediamo a Giornande che di quella tinta assicura esser quelli degli Iberi (4), i quali erano somiglianti agli Aquitani (5), e questi a'Liguri lor vicini, se pur non erano una stessa cosa con essi. E poichè il tipo ligure non differiva grandemente, come sembra, dall'iberico, quando Tacito ragionando degli abitatori delle Isole Britanniche dice essere fra costoro anche alcuni (i Siluri) che dal bruno colore delle carni e dal capello perloppiù ricciuto annunziavano essere Iberi emigrati dalla non lontana Spagna (6), lascia supporre che ne' Liguri dominasse parimenti un colore brunetto ed una non infrequente disposizione de' capelli ad incresparsi, in questo senso interpretando la espressione di *torti crines* adoperata dallo storico di Roma.

Qui ci abbandonano le testimonianze degli scrittori; ma se la Liguria non ha per avventura monumenti antichi che potessero mostrarci altri caratteri del tipo proprio de' suoi prischi abitatori, abbiamo invece alcune

(1) *Ligures montani, duri atque agrestes. Docuit ager ipse, nihil ferendo, nisi multa cultura et magno labore quæsitum.* Cic. *Agr.* II, 35.

(2) Τοῖς ὄγκοις εἰσὶ συνεσταλμένοι, καὶ διὰ τὴν συνεχῆ γυμνασίαν εὔτονοι. Diod. Sicul. lib. IV, 20.

(3) Plin. III, 25. — Dione Cass. LIV.

(4) *Silurum colorati vultus, torto plerique crine et nigro nascuntur. De Reb. Getic.* cap. 2.

(5) Ἁπλῶς γὰρ εἰπεῖν, οἱ Ἀκουϊτανοὶ διαφέρουσι τοῦ Γαλατικοῦ φύλου, κατά τε τὰς τῶν σωμάτων κατασκευὰς καὶ κατὰ τὴν γλῶτταν, ἐοίκασι δὲ μᾶλλον Ἴβηρσιν. Strab. IV. — Valer. Mass. II, 6, II, VII, 6. — Plutarc. *Sertor.* 14.

(6) *Silurum colorati vultus, et torti plerumque crines, et posita contra Hispania, Iberes veteres trajecisse easque sedes occupasse fidem faciunt. Agricol.* XI.

medaglie dell'Aquitania e della Spagna che ci hanno conservato ritratti indigeni esprimenti il tipo nazionale. Almeno ciò non par dubbio per quelle iberiche, le quali portano leggende in caratteri sconosciuti (*desconoscidas*), e che il Boudard ha dimostrato essere scritte in lingua basca od euscariana. Le teste di quelle medaglie sono ritenute generalmente come vere effigie de' personaggi di cui portano il nome, guerrieri, capi o magistrati supremi del popolo (1). Nelle teste del maggior numero domina un tipo comune che non è il greco, nè il fenicio, nè il celtico, ma che rivelasi per un viso piuttosto breve e quasi quadrato, archi sopraciliari proeminenti, naso quasi sempre grande, capelli inanellati, e barba, quando esiste, arricciata.

Altrettanto incontra di osservare nelle medaglie degli Ausci a de' Sotiati dell'Aquitania, de' Ceniceti che aveano stanza ad oriente del Rodano (2), e generalmente in tutte le teste delle medaglie di Avenio, di Ucetio, degli Arecomici (3), non meno che in quelle de' Salî di *Glanum*, e, per quanto può giudicarsene, anche degli Oxibî (4).

Vi ha fra quelle medaglie anche tipi che si riconoscono per punici e per greci, soprattutto nelle monete di quelle città che ebbero colonie fenicie ed elleniche, ma il tipo più comune, dopo l'iberico, è il celtico, il quale è osservabile singolarmente nelle medaglie di quelle regioni ove i Celti in tal numero si soprapposero a' nativi, che dalle due razze contemperate insieme surse indi quel tipo che modificato a sua volta dal sangue latino, dal teutonico e dall'arabo, è oggi dominante così nell'antica Iberia, come ne' Dipartimenti meridionali della Francia.

Se con tali scarsi materiali noi vogliamo ordinare i caratteri onde erano distinti gli antichi Iberi e i Liguri con essi, possiamo con fondamento ritenere: « *essere stata la loro statura mezzana, le membra aduste e gagliarde, la carnagione brunetta, la chioma folta e nera, il viso più quadrato che tondo, le arcate sopracigliari proeminenti* ».

Apparisce ancora dalle medaglie qual fosse la forma del cranio di quei

(1) Lelewel crede che ciò sia per tutte le medaglie galliche ed iberiche. *Études numismatiq.*, *Types Gaulois*. Paris, 1841, p. 41.

(2) Lelewel, pl. III, 9. — VII, 32. — La Saussaye, *Numismatique de l'Aquitaine* (*Rév. Numismatiq.* 1851, pl. I e XV), e *Numismatique narbonnaise*, pl. XIII.

(3) La Saussaye, *Numismatiq. narbon.* pl. XVI, XVII, XXII. — Lelewel, pl. VII, 30-31. — VIII, 32.

(4) La Saussaye, *Numismatique narbon.* pl. I, II, XIII. — Lelewel, pl. III, 1, 2, 3, 8.

popoli che vi sono rappresentati. Era un cranio più tondo che ovale, un cranio corto, brachicefalo, un cranio diverso da quello che oggi s' incontra comune nella Spagna, nella Francia e nelle popolazioni italiane. Ma questa deduzione, se tratta unicamente dalle effigie scolpite nelle medaglie , non avrebbe certamente quel valore che acquisterà agli occhi degli Etnologi, se chiarita con altri fatti che potranno essere somministrati dagli stessi antichi teschi appartenenti alla ligustica schiatta.

Fin qui il numero di questi cranî è molto ristretto , nè io so che ne esistano altri all' infuora de' tre che io ho avuto l' opportunità di osservare e di studiare a mio bell' agio. Vengono essi dalle Provincie di Modena e di Reggio, le quali furono in potere de' Liguri Friniati pria che non ne avessero avuto il dominio gli Etruschi, a' quali indi fu tolto dai Galli Boi, e a questi da' Romani. Anzi gli stessi Liguri, quando già nell' agro modenese era stata dedotta una colonia romana , scesi dai loro monti alpestri portarono più volte guasti e rapine fino a Bologna e a Modena, e nel 577 saccheggiarono il territorio modenese, e con improvviso assalimento presero la stessa colonia ; d' onde furono poco di poi cacciati dal Console C. Cladio Pulcro.

Relativamente all' antichità di questi teschi io credo aver dimostrato nella mia Memoria che ha per titolo « *Di alcune armi ed utensili in pietra rinvenuti nelle Province meridionali dell'Italia, e delle popolazioni, nei tempi antestorici, della Penisola Italiana* (1) », com' essi appartengono a que'popoli che abitarono l'Italia in quel periodo dell'età della pietra che si congiunge e quasi confonde con l'epoca del bronzo. E poichè in quel tempo le colonie Ariane non avevano invasa tutta la penisola, e le vecchie razze vi duravano tuttavia, così io ho per fermo, che essendo di schiatta ligure i primi abitatori delle terre che or si dicono di Reggio e di Modena, liguri debbano essere altresì que' cranî che si riferiscono ai più antichi popoli che abitarono in quelle Province.

Due di questi cranî sono in potere del signor Bartolomeo Gastaldi, distinto Professore nella Scuola di Applicazione per gli ingegneri di Torino, ed il terzo fa parte del Museo Anatomico dell' Università di Modena diretto dal mio egregio amico prof. Paolo Gaddi.

I due cranî del Gastaldi furono rinvenuti nella state del 1862 in Torre della Maina , paesetto di collina distante dieci miglia da Modena , in

(1) *Atti della Società Reale di Napoli, Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche*, vol. I.

mezzo ad un deposito di terra conosciuto in paese col nome di *Marna* o *Marniera*. Questo deposito trovavasi in un terreno diluviano , al quale era sopraposto un terreno di alluvione recente misto ad *humus*. Nel deposito in mezzo al quale furono rinvenuti i due cranî, oltre gran copia di carboni, di ceneri, di frammenti di olle e vasi di terra cotta, erano anche qua e là sparse ossa di animali domestici , e principalmente grandi corna di cervi, ossa, denti, mascelle di cavallo, di pecore, di cignali, etc. quasi tutte in pezzi, e su molte delle quali si scoprirono evidenti intaccature artificiali di scure o di accetta: notizie che debbo alla cortesia del signor Pietro Doderlein , oggi prof. nella R. Università di Palermo.

Il cranio posseduto dal Gabinetto Anatomico dell'Università di Modena, sotto il N. 31, fu raccolto in Cadelbosco di Sopra, cinque miglia distante da Reggio , e donato al Museo dal dottor Giovanni Brugnoli di Brünhoff, col seguente ricordo : « *Teschio di un uomo adulto di razza Caucasea , trovato nel 1837 a Cadelbosco di Sopra, entro ad uno strato di terra nera torbosa, alla profondità di m. 4, 696* ».

I tre teschi notabilmente si differenziano tanto da quelli degli abitatori odierni delle Province Modenese e Reggiana , quanto da' rimanenti italiani, ad eccezione de' Liguri e Piemontesi a'quali sono grandemente rassomiglianti.

La conformazione di questi cranî è brachicefala. Havvi però fra di essi qualche differenza che il lettore potrà valutare mettendo insieme a riscontro la descrizione di ciascuno di essi e le misure che ne diamo più innanzi.

Uno de'due cranî di Torre della Maina è figurato nelle sue dimensioni naturali nella tavola I. È molto danneggiato dal tempo , e manca del naso, della parte esterna dell'orbita sinistra, di porzione dell'osso temporale dello stesso lato. Mancano altresì tutti i denti meno l'ultimo mascellare sinistro.

La delicatezza delle sue ossa , la piccolezza de' suoi forami , la poca scabrosità delle superficie sulle quali si spandono gli attacchi muscolari, tutto infine lo caratterizza appartenente al sesso femmineo ; ed inoltre lo stato delle suture e quello della consumazione del dente superstite gli fanno assegnare un'età non maggiore de'40 a'45 anni.

Il diametro fronte-occipitale è solo di 16 millim. maggiore del bi-parietale; la fronte è larga, ma bassa e schiacciata; le gobbe parietali molto svi-

luppate, e la protuberanza occipitale pressochè nulla, onde il profilo della calvaria è rappresentato da una linea, che dalla fronte ascendendo con dolce curva giunge al piano del vertice, e quinci piegandosi a un tratto discende rapidamente, e quasi in linea verticale sull'occipite.

Le orbite non grandi, inclinate all'esterno e di forma approssimantesi alla quadrata: grande lo spazio fra di esse, e grande pure la distanza fra i punti esterni delle ossa zigomatiche.

Poco profonde sono le fovee malari e temporali. Alte le ossa mascellari, sporgenti alquanto innanzi ed accennanti a leggero prognatismo; ma se il cranio si posi, privo della mascella inferiore, sopra di un piano orizzontale, quasi tutto il margine alveolare poggia su quel piano, e solamente alcun poco ne dista quella parte anteriore destinata pe' denti incisivi. La direzione degli alveoli però è verticale, e l'impianto de' denti modifica affatto quella disposizione lievemente prognata della mascella.

Notabile è l'altezza di questo teschio. Larga è la sua base, serbando in ciò proporzione coll'ampiezza generale del cranio; più larga dietro i forami uditivi. L'arcata alveolare è tondeggiante, ed il forame occipitale, di forma ovale, situato in tal punto della base del cranio, che il suo orlo anteriore è più di qualche millimetro distante dal bordo alveolare, che non da una linea che discendesse verticalmente dal piano occipitale. Gli angoli del margine inferiore della mandibola si volgono alquanto all'esterno, e la forma della stessa è più vicina alla circolare che alla parabolica.

La faccia è larga, la sua forma più quadrata che ovale, formando gli angoli del quadrato al di sopra le porzioni laterali dell'osso frontale, e al di sotto gli angoli inferiori della mandibola.

Le misure di questo cranio prese in millimetri sono le seguenti:

Circonferenza orizzontale . . . . 509 millim.
Arco fronte-occipitale 355

a. Porzione frontale 125. b. P. parietale 119. c. P. occipitale 111.

Arco interauricolare, da un forame uditivo all'altro, passando pel vertice 330
Lunghezza, o diametro antero-posteriore . 170
Larghezza (interparietale) 154
Altezza dall' orlo anteriore del forame occipitale al vertice 132

Larghezza della fronte	120
Larghezza della faccia fra gli archi zigomatici	112
Lunghezza della stessa dalla inserzione delle ossa nasali al mento	115
Larghezza della base da un forame uditivo all'altro	102
Proporzione fra la larghezza e la lunghezza del cranio considerata come 100 (indice cefalico).	90,50
Proporzione dell'altezza alla lunghezza . .	77,60

L'altro cranio di Torre della Maina, figurato nelle tav. II e III, si allontana alquanto dal precedente per alcune particolarità ch'egli importa di far conoscere.

È un cranio virile che mostra avere appartenuto ad un giovane fra i 25-30 anni. È ben conservato, tranne una lieve frattura nella base, la mancanza di una porzione dell' osso zigomatico destro e i condili della mascella inferiore. I denti vi esistono tutti, meno il primo molare destro che manca.

È brachicefalo come il precedente; non ha protuberanza occipitale, ha molto sporgenti le gobbe parietali. La linea del profilo della calvaria si incurva nella regione posta fra le protuberanze parietali, e declina rapidamente nell'occipite come nell'altro cranio sopra descritto.

La fronte è larga e moderatamente elevata; le orbite piccole, quadrate, volte obliquamente all'esterno. I seni frontali grandi e rilevati; grande altresì lo spazio fra le orbite, e grande pure l'apertura nasale. Assai distanti fra loro sono i punti esterni delle ossa zigomatiche; poco profonde le fovee malari, molto al contrario le temporali, e notevole la distanza fra il processo spinoso nasale e l'orlo alveolare superiore.

Larga in generale la base intera del cranio, e soprattutto fra le apofisi mastoidee grosse e rugose. Il forame occipitale è piccolo e rotondo, e il suo margine anteriore trovasi 19 millimetri più distante dal margine alveolare, che non da una linea che discenda verticalmente dall'occipite.

La forma dell' arcata alveolare è diversa da quella del cranio precedente, avvegnachè non tondeggi anteriormente, ma si prolunga per modo da rappresentare l'abside di un ovale molto allungato.

La mandibola si slarga ne' suoi angoli inferiori come nel cranio precedente , e la sua figura generale s' avvicina alla circolare più che alla ellittica.

La faccia, considerata a parte, è discretamente ampia ; e poichè la larghezza della fronte si accompagna con quella delle ossa malari e degli angoli inferiori della mascella di sotto , così la forma di essa ritrae di una figura pressochè quadrata.

Ciò che è più osservabile in questo cranio è il prognatismo delle ossa mascellari superiori , il quale però è corretto dalla direzione degli alveoli in cui i denti s' impiantano verticalmente per raggiungere quasi a perpendicolo i denti della mascella inferiore.

Noi ne diamo qui sotto le sue misure precise:

Circonferenza orizzontale	519
Arco fronte-occipitale	370
a. Porzione frontale 125. b. P. parietale 125 c. P. occipitale 120.	
Arco interauricolare	328
Lunghezza, o diametro antero-posteriore .	172
Larghezza (interparietale)	156
Altezza dall' orlo anteriore del forame occipitale al vertice	132
Larghezza della fronte	119
Larghezza della faccia fra gli archi zigomatici	120
Lunghezza della stessa	121
Larghezza della base da un forame uditivo all' altro	109
Proporzione fra la larghezza e la lunghezza del cranio (indice cefalico)	90,7
Proporzione dell' altezza alla lunghezza . .	76,80

Il cranio rinvenuto in Cadelbosco di Sopra , e conservato nel Gabinetto anatomico dell' Università modenese, è di una tinta nerastro-screziata. Manca delle ossa mascellari superiori, e non ha che i soli quattro ultimi denti molari, due da cadun lato, nella mandibola inferiore.

È alquanto depresso nel vertice (probabilmente per compressione artificiale), ma è di forma brachicefala. È molto largo fra le gobbe parietali, ed è privo affatto di protuberanza occipitale.

La fronte è larga e discretamente elevata; largo altresì lo spazio della glabella; le orbite orizzontali. Profonde le fovee temporali, ed abbastanza distanti fra loro le due apofisi mastoidee.

La mascella slargata, come ne' cranî precedenti, ne' suoi angoli inferiori; il tubercolo del mento proeminente, e la forma della mandibola quasi triangolare.

Le misure di questo cranio sono come appresso:

Circonferenza orizzontale	509
Arco fronte-occipitale	371

a. Porzione frontale 120. b. P. parietale 126. c. P. occipitale 125.

Arco interauricolare	316
Lunghezza, o diametro antero-posteriore .	174
Larghezza (interparietale)	148
Altezza dall'orlo anteriore del forame occipitale al vertice	132
Larghezza della fronte	105
Larghezza della faccia fra gli archi zigomatici	105
Lunghezza della stessa	100
Larghezza della base da un forame uditivo all'altro	95
Proporzione fra la larghezza e la lunghezza del cranio (indice cefalico)	85
Proporzione dell'altezza alla lunghezza . .	76,40

Qui mi cade in acconcio di parlare di alcuni cranî etruschi riferiti al tipo brachicefalo, che il Retzius non esitava a considerare come proprio del teschio di quella stirpe. Tale asserzione del celebre etnologo Scandinavo è stata combattuta dal Baer (1) e da R. Wagner (2), ed è confutata ampiamente dalle dotte investigazioni intorno a' cranî etruschi pubblicate

(1) Nelle sue osservazioni critiche sull'argomento pubblicate nel *Bulletin de l'Académie Impériale de S.t Petersbourg*, t. I, 1859, p. 37.

(2) Zwar rechnet Retzius die Etrurier zu den Brachycephalen; aber die gewis ächten Schädel auf etrurischen Gräbern, welche unsre Sammlung dem König Ludwig von Bayern verdankt, sind dolichocephalisch, womit auch andre Berichte übereinstimmen. *Zoologisch-Anthropologische Untersuchungen*. Göttingen, 1861, p. 13.

da' ch. Garbiglietti (1) e Maggiorani (2), alle quali io non posso, dietro osservazioni proprie, che uniformarmi completamente, ritenendo con questi autori la forma del cranio etrusco essere dolicocefala e non brachicefala (3). E se io guardo alla *Édition illustrée* del *Règne Animal* del Cuvier pubblicata da' suoi allievi in Parigi, anche quivi osservo, che un antico cranio etrusco è stato preso per tipo di quella forma dolicocefala per la quale il consenso degli antropologi ha conservato (benchè non rettamente) l'appellazione di *Caucasea* (4). Ma il Retzius non era uomo da ingannarsi così di leggieri. Egli avrà certamente veduto cranî etruschi di tipo brachicefalo, ed avrà fatto generale per quella nazione ciò che forse gli offerivano eccezionalmente i cranî da lui osservati; ed io non esito a ritenere, che solamente per eccezione s' incontrino cranî brachicefali nelle antiche necropoli etrusche, e credo dippiù ch' essi sieno i più antichi. E poichè innanzi agli Etruschi tutta quella parte d' Italia che indi si chiamò Etruria era stata abitata da ligustiche genti, così e' parmi probabile, che que' cranî brachicefali che talora s' incontrano in quella contrada, e che sono attribuiti comunemente agli Etruschi, debbano essere invece riferiti ai Liguri che vissero nel suolo toscano pria de' Raseni, e che pur continuarono a vivervi anche quando i nuovi venuti si ebbero impadronito di quelle terre, spogliatine gli antichi possessori. Se a questa mia congettura volesse accordarsi qualche fede, io menzionerei volentieri fra i ligustici anche i cranî di tipo brachicefalo trovati nelle tombe dell' antica Etruria, i quali veramente non differiscono gran fatto da quelli appartenenti alla vecchia stirpe ligure, e che sono stati già sopra descritti (5).

(1) *Brevi cenni intorno ad un cranio etrusco*. Torino, 1841, in 8°, con tav.

(2) *Saggio craniologico sull' antica stirpe romana e sulla etrusca*. Roma, 1858, in 4°, con tav.— *Nuovo Saggio di studî craniologici sull'antica stirpe romana e sulla etrusca*. Roma, 1862, con tav.

(3) Così il Prichard scriveva a pag. 257 del vol. III° della 3.ª ediz. delle sue *Researches in to the physical history of Mankind*. « So many remains of ancient Etruscan tombs yet exist in the north of Italy, that we may look for further elucidation of this very interesting subject. The skulls found in some of the Etruscan tombs which were lately exibited in London, had the full developement of the European or Indo-Atlantic type. Local researches into this subject would well reward the pains of any traveller in Italy. » — Ved. anche Nott and Gliddon, *Indigenous Races of the Earth*. pag. 313, fig. 35.

(4) *Races Humaines*, tav. I e II. Una di queste figure è riprodotta nelle mie *Razze Umane*, t. I°, tav. 1, fig. 1.

(5) Anche fra i cranî etruschi che si conservano a Parigi il Pruner-Bey ha trovato il tipo brachicefalo misto al dolicocefalo, ed anch'egli opina che quel primo tipo debba riferirsi ad origine iberica o ligure. *Bulletins de la Société d'Anthropologie de Paris*, t. III, p. 448.

Riferisco qui le misure di due di questi cranî etrusco-liguri, l'uno (I) appartenente al ch. Prof. Maggiorani e proveniente dall'antica Tarquinia, l'altro (II) conservato nel *British Museum*, avvalendomi per entrambi de' dati craniometrici forniti dallo stesso signor Maggiorani e dal signor C. Carter Blake nella sua eccellente memoria « *On the Crania of Ancient Races of Men* » : A riscontro di queste misure metto quelle ottenute in media da me sopra cranî liguri antichi e moderni.

	CRANÎ ETRUSCO-LIGURI		CRANÎ LIGURI
	I.	II.	
Periferia orizzontale	487	535	513 ½
Arco fronte-occipitale	346	363	361 ½
Diametro antero-posteriore	167	174	172
— biparietale o traversale	140	150	149 ½
Altezza verticale	123	117	132
Proporzione fra la larghezza e la lunghezza considerata come 100 (Indice cefalico).	83,83	86,20	86,74

L'antico tipo ligure adunque, come ce lo mostrano i pochi cranî superstiti di quel popolo, e come ce lo rappresentano le medaglie o ce lo ricordano gli scrittori greci e latini, era spiccatamente diverso da quello degli altri Italiani, non meno che da quel de'Greci che ellenizzarono alcuni punti della Liguria, e da quel de' Galli che in molte parti lo avvicinavano e si confondevano con esso. Ma per restringermi all' Italia e non estendere le comparazioni oltre i confini della medesima, io dirò che mentre gli altri Italiani nella forma dolicocefala del cranio e nella estrinsecazione delle loro qualità morali hanno sempremai conservato quei caratteri che li rannodano al grande stipite ariano sì ampiamente sparso sopra tanta parte dell' Asia e dell' Europa, il Ligure invece è rimasto avanzo solitario di un'altra stirpe, che ha serbato in gran parte fino a' dì nostri la sua impronta originaria, la quale come lo distingueva in antico, così anche al presente lo differenzia da tutti gli altri abitatori della Penisola.

§ 4.

Tipo ligure odierno desunto dalla forma del cranio degli abitanti attuali della Liguria e del Piemonte.

Fin dal secolo XVI. Vesalio avea fatta l' osservazione, che il cranio dei Genovesi, simile in parte a quello de' Greci (Greco-Slavi?) e de' Turchi, era di forma presso a poco rotonda: *Genuensium* (egli scriveva) *et magis adhuc Graecorum et Turcarum capita globi fere imaginem exprimunt* (1); ed il Soemmering che cita questo passaggio, con manifesto errore, allarga a tutti gli Italiani ciò che l'insigne anatomico di Bruxelles asseriva de' soli nativi della Liguria (2). Ma da Vesalio in poi niun altro ch' io sappia avea ripetuto quelle osservazioni, e della differenza che il cranio ligure separa da quelli de' rimanenti popoli italiani non si era tenuto più proposito. L' argomento però è tale che non può non interessare l'antropologia, onde io spero non sieno per riuscire inutili questi studî diretti ad illustrare un tema che io credo essere meritevole di richiamare tutta l'attenzione de' cultori di questa scienza.

Noi non dobbiamo cercare oggi Liguri al di fuori de' confini della Liguria propria e del Piemonte. È quivi, in queste che la nuova circoscrizione del Regno chiama antiche Province, che il tipo ligure si è conservato qual era ne' tempi più vetusti. Non è scomparso all'intutto oltre la Magra, tracce ancora se ne vedono sulla sponda destra del Varo; il Ticino lo divide dal lombardo, ma gli abitanti sul territorio fra questo fiume e la Sesia, come que' che vivono fra il Po e la Trebbia, han già molto perduto del carattere nativo, e la purezza del sangue ligustico vedesi appannata da straniero mescolamento.

Medesimamente su per le Alpi e nelle alte valli del Piemonte si confonde in modo col gallico da non potersi fissare i confini delle due razze, benchè fra i Grigioni, nell'antica Rezia, in molte di quelle valli di difficile accesso vi perduri tuttavia quasi immutato, e i cranî di quegli alpigiani offrano anche al presente la conformazione brachicefala che il Baer ha studiata accuratamente ne' cranî raccolti intorno a Coira (3). Dove

(1) *De fabrica corporis humani*, Lib. 1, cap. V.

(2) *De corporis humani fabrica*, t. 1, §. 63.

(3) *Ueber den Schädelbau der Rhätischen Romanen. Bulltin de l'Académ. de S.t Petersbourg*, 1859.

*

però il tipo ligure è tuttora vivo, ed imeneo straniero non ha potuto alterarne la purezza nativa, anche il cranio presenta caratteri che lo distinguono a primo aspetto dalle forme che sono proprie de' rimanenti abitatori dell'Italia. Vi ha qualche lieve differenza fra i teschi della Liguria propria e que' delle Province Piemontesi, ma il tipo è identico in entrambi, e non varia che in alcune particolarità delle quali or ora faremo menzione.

Il cranio ligure (e qui intendo parlare così de' liguri come de' piemontesi) è brachicefalo, onde il suo diametro antero-posteriore è più breve in comparazione del trasversale che non sia negli altri cranî italiani, i quali tutti appartengono, meno qualche rara eccezione, al tipo dolicocefalo. Nei liguri quel primo diametro non eccede in media la lunghezza di 172 millim., mentre il secondo raggiunge quello di 149 ½ millimetri, onde il rapporto del secondo col primo considerato come 100 è nella proporzione di 86,74, laddove negli altri cranî italici quel rapporto è nella proporzione di 76,83 (1).

Il profilo della esterna superficie della calvaria del Ligure, dalla inserzione delle ossa nasali sul frontale fino al mezzo dell'occipite, è presso a poco emisferico, e solo alquanto più inarcato in quella parte di essa che corrisponde alla porzione media della sua metà posteriore, ove il cranio si mostra più elevato, e d'onde declina rapidamente verso l'occipite. Negli altri cranî italici la linea del profilo circoscrive nettamente una figura ovale il cui diametro maggiore od antero-posteriore supera il minore o biparietale di ⅕ e più della sua lunghezza. Parimenti ne' teschi liguri la circonferenza è quasi sferica, ellittica negli altri Italiani, nei quali eziandio è maggiore, misurando essa in media, in 20 cranî da me studiati, 524 ½ millimetri, mentre ne' liguri non l'ho trovata in media mai maggiore di 513 ½ millimetri.

Si sa che ne' teschi italici l'occipite è sempre proeminente. Ciò non incontra di osservare ne' ligustici, il cui occipite è quasi sempre depresso. Manca non di rado della linea semicircolare, e più spesso della protuberanza occipitale che è sì comune in tutti gli altri cranî della Penisola. Nei quali anche le gibbosità occipitali corrispondenti alle fovee del cer-

(1) In 10 cranî, di cui cinque romani ed altrettanti etruschi, misurati dal Maggiorani in quella sua elaborata memoria « *Nuovo Saggio di studi craniologici sull'antica stirpe romana e sulla etrusca* » la proporzione media della larghezza alla lunghezza è di 75,70. Ne' soli cranî romani è di 74,46; negli Etruschi di 76,94.

velletto sono quasi orizzontali alla base del cranio, laddove ne' teschi liguri le medesime gibbosità sono piccole e costantemente inclinate, sotto un angolo più o meno aperto, sopra quel piano.

Altra particolarità propria del teschio ligure ella è, che se, privo della mascella inferiore, si ponga per la sua base sopra una superficie piana, la porzione basilare dell' osso occipitale poggia su quel piano, al quale raramente giungono gli apici delle apofisi mastoidee, mentre negli altri cranî italici è quasi sempre per mezzo di quelle apofisi che la parte posteriore del cranio poggia per la sua base, rimanendo sollevata di alcune linee al di sopra di quel piano su cui posa il teschio la porzione basilare dell' occipitale.

Il gran forame occipitale è quasi sempre tondo ne' cranî liguri, ovale negli altri; ma ne' primi è posto alquanto più indietro, ed ordinariamente il suo margine anteriore è sempre di alcuni millimetri più ravvicinato ad una linea che discende verticalmente dall' occipite, che non all'anteriore margine alveolare. L'inclinazione di questo forame è anche diversa ne' due tipi craniali, essendochè in tutti gli italici il suo orlo anteriore di poco si allontana dal piano dell'orlo posteriore, mentrecchè ne' liguri si trova sollevato costantemente da quel piano per un angolo non mai minore di 25 gradi.

La base del cranio ligustico è larga, soprattutto nella sua parte mediana e posteriore.

Anche l' altezza è maggiore che ne' rimanenti cranî italiani, e questa sua maggiore elevatezza non è già in quella parte media del teschio che corrisponde in linea retta dal vertice al margine anteriore del forame occipitale, ma nella sua parte posteriore che in linea verticale corrisponde col margine posteriore del gran forame occipitale.

E se inoltre il cranio ligure si poggi sopra una superficie orizzontale, in modo che il margine inferiore della mandibola riposi su quel piano, e si divida in due per mezzo di una linea verticale che passi fra i meati uditivi, questa linea non taglierà il cranio in due metà presso a poco eguali, come in tutti i teschi italiani, ma lo dividerà in due parti molto ineguali fra di loro; la metà appartenente alla parte posteriore del teschio sarà maggiore di quella che appartiene alla sua porzione anteriore. Da che è evidente come il cranio ligure raggiunga il suo maggiore sviluppo nella parte posteriore ed inferiore, mentre nel restante degli Italiani, il maggiore sviluppo craniale è nella parte mediana ed anteriore.

La fronte è larga, non ristretta verso le tempia, ma con curva tondeggiante si accompagna alle ossa parietali e temporali.

La faccia è ampia e spianata, ed oltracciò offre un tipo che non è quello al quale si conformino i teschi de' rimanenti popoli italiani, avvegnacchè nel ligure la faccia è quasi sempre altrettanto larga quanto è lunga, mentre negli altri italici la lunghezza supera costantemente di un decimo la larghezza. Le vere proporzioni tra la larghezza e la lunghezza della faccia sono:

Nel cranio ligure come 100 : 100,107
Negli altri crani italici 100 : 110,100

Oltracchè le orbite sono anche fra loro più distanti che non negli altri cranî italiani, lo spazio della glabella sempre maggiore, le arcate alvealari più tondeggianti, più piano e più largo il mento, e più lontane fra loro le parti laterali ed ascendenti della mascella inferiore.

V' ha però fra i cranî della Liguria e que' del Piemonte questa differenza, che i primi sono sovente meno alti, hanno non di rado più lungo il diametro fronte-occipitale, più breve il trasversale, la faccia anche meno lata e più ristretta verso il mento, la linea occipitale quasi sempre rilevata, l'occipite spesso protuberante, mentrechè nei secondi il tipo si mostra più costante, e le varietà sono più rare ad incontrarsi.

Queste differenze io credo si debbano ripetere dalla maggior copia di sangue estraneo penetrato ne' Liguri marittimi, che non in quelli che, vivendo in regioni più interne, sono stati meno esposti a commistione di stirpe. È vero che anche fra costoro si mescolarono in grandi proporzioni elementi eterogenei, ma il tipo non ne è stato gran fatto modificato, imperocchè nella maggior parte della popolazione piemontese rimase predominante il cranio brachicefalo, ed anche in que'teschi la cui forma si mostra dolicocefala, manca sovente la linea occipitale, e l'occipite vi è quasi sempre deficiente di protuberanza. Presso gli abitatori della costiera ligure invece, pe' facili commerci ch' eglino han sempre mantenuto con tutti i popoli littorani del mediterraneo, le relazioni loro con altre genti essendo state molte e frequenti, il tipo craniale ha subìto più notevoli modificazioni, e si è avvicinato al dolicocefalo in più larghe proporzioni che non sia avvenuto a'Piemontesi; perciò il cranio del Ligure odierno, anche quando la sua forma è brachicefala, è meno elevato nella

sua altezza verticale, ha sempre apparente la linea occipitale, frequente la protuberanza dell' occipite, spesso quasi orizzontale la direzione delle fovee cerebellose, e la faccia più ristretta nella base e soprattutto verso il mento. Non ostante ciò, e non ostante quella maggior tendenza del tipo ligustico verso la forma comune italiana, in tutti i cranî liguri, anche in quelli che pel loro indice cefalico van collocati fra i dolicocefali, la metà posteriore è sempre predominante sull' anteriore, il forame occipitale situato più indietro che negli altri cranî italiani, e l'inclinazione del suo piano sempre maggiore; la porzione basilare dell'osso occipitale sempre rigonfia, la fronte più ampia, la faccia più larga nella sua parte superiore, e gli angoli interni delle orbite più distanti tra loro.

In quali proporzioni poi il cranio ligure si conservi al presente, in Liguria e in Piemonte, col tipo dominante nella Penisola, io non saprei determinarlo con dati precisi, ma dalla comparazione di molti cranî da me osservati io credo potersi ritenere, che in Piemonte il tipo brachicefalo è proprio delle due terze parti o almanco delle tre quinte parti, ed in Liguria di oltre alla metà della popolazione. Nell'uno e nell'altro paese quel tipo è più comune nelle classi inferiori del popolo; in Liguria signoreggia più sui monti che nelle regioni littorane, ed in Piemonte più nelle Province che avvicinano la Liguria e nelle centrali, che in quelle che si congiungono con l' Emilia e la Lombardia e, per le valli alpine, con la Svizzera e con la Francia.

Non mancano però fra Liguri e Piemontesi forme craniali decisamente italiche, le quali son proprie di quel tipo che i più degli antropologi son usi di chiamar *romano*, e che, più o men variato, è comune a tutta l' Italia, ma elleno vi sono in grande minoranza, e dimostrano col loro piccol numero, che l' antico cranio ligure in Piemonte ed in Liguria si è conservato sempre dominante, e che anche a' dì nostri non mostrasi diverso da quello che esso era ne' tempi più vetusti.

Io do nel seguente specchio le misure tanto de' cranî ligustici antichi, quanto di alcuni moderni, de' quali 4 appartenenti alla Liguria propria ed i rimanenti ad individui delle Provincie piemontesi. Vi aggiungo le misure di altri 20 cranî italiani antichi e moderni, affinchè meglio possa valutarsi la differenza che intercede fra i teschi liguri e quelli delle altre popolazioni della Penisola.

MISURE DI CRANÎ LIGURI ANTICHI E MODERNI COMPARATE CON QUELL…

	PAESI A' QUALI I CRANÎ APPARTENGONO	CIRCONFERENZA ORIZZONTALE			ARCO FRONTE-OCCIPITALE			DIAMETRO ANTERO-POSTERIORE			DIAMETRO BI-PARIETALE			ALTEZZA VERTICALE			PROPORZ… tra la larghe… e la lunghez… calcolata com… (INDICE CEFAL…)	
LIGURI ANTICHI	Torre della Maina 1° (Prov. di Modena) D	509			355			170			154			132			90,50	
	Torre della Maina 2° (id.). U	519	Media 514		370	Media 363		172	Media 172		156	Media 153		132	Media 132		90,7	Media 88,75
	Cadelbosco di Sopra (Prov. di Reggio). U	513			365			174			148			132			85,05	
LIGURI MODERNI — Liguria	Genova. U	520			355			178			151			125			84,83	
	Appennini liguri. U	500			358			168			147			130			87,50	
	Id. U	512	Media 312½	Media 513½	345	Media 355	Media 361½	168	Media 171	Media 172	145	Media 147	Media 149½	128	Media 126½	Media 132	86,30	Media 85 98
	Torriglia. U	518			362			170			145			123			85,29	
LIGURI MODERNI — Piemonte	Provincia di Torino. U	513			367			174			150			133			86,20	
	Id. U	520	Media 514		377	Media 367		172	Media 173		150	Media 148		138	Media 137		87,20	Media 85,49
	Torino. U	510			358			172			143			141			83,08	
ITALI ANTICHI	Etrusco di Veji. U	541			383			180			141			130			78,83	
	Etrusco di Perugia. U	525			378			183			145			130			9,23	
	Milano. U	514			367			175			139			125			79,43	
	Roma. U	543			388			186			148			137			79,57	
	Aquino. U	535	Media 528		371	Media 376		180	Media 183		140	Media 141		129	Media 127		78,88	Media 76,83
	Id. U	550			390			187			148			»			79,14	
	Cassino. U	517			»			180			137			121			76,11	
	Capua. U	»			390			192			136			135			70,88	
	Nola. U	505			353			177			138			119			72,88	
	Cuma. U	520		Media 524½	368		Media 376	188		Media 183	138		Media 141	118		Media 127	73,40	
ITALI MODERNI	Bologna. U	530			370			187			144			131			77	
	Id. U	503			352			175			139			124			79,42	
	Modena. U	516			361			185			136			123			73,51	
	Parma. U	537			372			182			144			132			79,12	
	Roma. U	542	Media 521		390	Media 376		185	Media 183		147	Media 141		125	Media 127		79,46	Media 66,84
	Ferentino. U	518			389			185			137			130			74,05	
	Avezzano. U	500			370			177			136			130			76,83	
	Isola presso Sora. U	530			372			179			137			124			76,53	
	Napoli. U	512			384			184			140			131			76,08	
	Id. U	520			399			195			149			128			76,41	
	Liguri	513½			361½			172			149½			132			86,71	
	Italiani	524½			376			188			141			127			76,83	

* Nel presente quadro non si sono calcolate le frazioni al di sotto di mezzo millimetro.

ALTRI CRANÎ ITALICI ANTICHI E MODERNI (Le misure sono in millimetri *)

RGHEZZA LLA FRONTE		FACCIA LARGHEZZA			FACCIA LUNGHEZZA			ARCO AURE-MASCELLARE			ARCO AURE-MENTONIERO			DISTANZA fra gli angoli inferiori della MANIDIBOLA			ALTEZZA della BRANCA ASCENDENTE			ORBITE Altezza	ORBITE Larghezza	FORAME OCCIPITALE Diametro ant. post.	FORAME OCCIPITALE Diametro trasverso
		112			115			229			264			100			58			38	43	38	32
Media 121		120	Media 116		121	Media 115		267	Media 248		307	Media 289		106	Media 103		62?	Media 59		»	37	35	34
		»			110			«			295			»			57			32	36	39	32
		115			113			219			252			100			60			32	36	38	31
		116			110			232			257			95			59			36	37	33	31
Media 116	Media 119	111	Media 113	Media 116½	117	Media 113	Media 116	230	Media 230	Media 240	258	Media 256	Media 275	95	Media 97	Media 103	64	Media 61	Media 63	37	37	36	30
		110			»			240			»			»			»			35	38	37	34
		125			118			234			274			103			69			34	39	36	31
Media 120		120	Media 121		113	Media 119		242	Media 242		278	Media 281		108	Media 108		69	Media 68		34	37	35	35
		119			126			251			292			113			66			35	36	38	36
		112			120			228			272			95			»			34	41	37	32
		110			»			»			»			»			68			35	39	35	32
		112			»			229			»			»			»			33	41	39	34
		»			»			»			»			»			»			35	42	39	34
Media 109½		119	Media 111		123	Media 119		»	Media 242½		264	Media 271		95	Media 93		60	Media 65		37	40	39	31
		111			»			240			»			»			»			39	40	34	28
		»			»			»			»			»			»			»	»	»	»
		112			114			258			276			»			»			34	43	37	30
		104			»			250			»			»			»			39	39	36	31
	Media 109	106		Media 109	»		Media 120½	250			273			88			68			35	39	»	»
		110			126			260		Media 245	295		Media 278	114		Media 94	65		Media 64½	37	39	42	39
		107			117			250			285			98			60			31	35	35	30
		107			125			238			283			96			65			36	40	32	29
		114			125			252			238			104			64			38	41	38	36
Media 109		112	Media 108		123	Media 122		248	Media 248		293	Media 285		81	Media 95½		68	Media 64		34	37	31	31
		99			»			248			»			»			»			30	30	35	29
		101			115			240			272			90			62			36	36	34	29
		109			128			250			»			»			»			36	37	38	28
		112			116			260			298			90			62			33	40	35	31
		108			120			235			266			92			65			36	36	36	34
119		116½			116			240			275			103			63						
109		109			120½			245			278			94			64½						

§ 5.

Relazione etnica fra i Liguri ed altri popoli dell' Europa.

Come il lettore ha potuto notare fin qui il cranio ligure ha caratteri nettamente distinti dagli altri cranî de' rimanenti Italiani. Esso appartiene adunque ad uno stipite diverso da quello onde deriva la più gran parte della popolazione della Penisola. Fuvvi però un tempo in cui il Ligure era sparso sopra tutta l'Italia: dall'Alpi al Lilibeo non v'erano che Liguri, ma al sopraggiugnere delle stirpi Italo-Pelasghe, i Liguri a poco a poco disparvero dalla maggior parte del territorio italiano, e quando i più antichi scrittori ci tramandarono le prime autentiche memorie delle nostre genti, già i Liguri erano stati ristretti in più angusti confini, i quali eglino di poi tennero mai sempre, e difesero costantemente con eroico valore.

La sorte ch'ebbero i Liguri in Italia toccò pure in altre parti del nostro Continente ad altre schiatte che possedevano estese contrade, e ne furono espulse dagli Ariani che a somiglianza di torrenti impetuosi si allargarono sulla faccia dell'Europa.

Gli Iberî, che tutto induce a credere essere un ramo del medesimo ceppo onde germogliarono anche i Liguri, scomparvero essi pure in mezzo a' nuovi tipi che si successero nella Penisola Spagnuola. Poche loro reliquie vivon oggi sparse nella Navarra, nelle Provincc d' Alava, di Guipuzcoa e di Biscaglia, e nelle valli pirenaiche de' circondarî di Bayonne e di Mauléon in Francia, e sono gli Escalduni *(Escualdunac)* o i Baschi, i quali riuniti compongono una popolazione non maggiore delle 7 ad 800 mila anime.

In molti di costoro non più scorgesi al presente quel tipo ch'era proprio de' vetusti Iberi, avvegnacchè sienvi oggi fra i Baschi uomini di alta statura, di pelo biondo, d'occhio azzurro e di bianca carnagione (1), ma nel maggior numero, e singolarmente in que' che vivono nel territorio spagnuolo predomina tuttora una statura mezzana, una carnagione bru-

(1) De Belloguet, *Ethnogénie gauloise. Types Gaulois et Celto-Bretons.* Paris, 1861, p. 212.— F. Michel, *Histoire des Races maudites de la France et de l'Espagne*, 1847, t. II, p. 49, lo afferma pel paese di Soule.

netta con capelli ed occhio di color nero. Non ostante ciò, il lor cranio rivela una gran commistione con sangue semitico ed ariano, ed io credo che attualmente e' non rappresentino che in piccola parte il vero tipo degli Iberi primitivi, quantunque il loro idioma siasi conservato poco disforme da quello che era favellato da' più antichi abitanti della Spagna, non meno che dalle vetustissime popolazioni delle Gallie e dell' Italia.

Fin qui erasi opinato che il cranio degli Escalduni fosse in generale brachicefalo. Asserivalo il Retzius dietro osservazione di due teschi da lui posseduti (1); assentiva a quella opinione il Gosse (2), e vi aderivano altresì il Nilsson (3) e il Quatrefages (4), ma una circostanza fortunata, la quale permise al Broca, illustre segretario della Società di Antropologia di Parigi, di estendere le sue indagini sopra una serie di 60 teschi baschi raccolti da lui e dal Gonzalez Velasco in un cimitero della Provincia di Guipuzcoa, diede occasione a quella di lui egregia dissertazione « *Sur les caracteres du crâne des Basques* », la quale trovasi inserita ne' volumi III e IV de' Bolleitini della Società di Antropologia di Parigi (5).

Il Broca ha osservato che il cranio basco (almeno que' della località onde fu raccolta l' intera serie) nella sua gran maggioranza è dolicocefalo, e la brachicefalia non vi è rappresentata che nella proporzione di 20 per %, imperocchè sopra que' 60 cranî soli 12 sono più o meno brachicefali, e i rimanenti tutti dolicocefali (6). Egli però ha notato, che non ostante il dolicocefalismo della maggior parte de' cranî biscaglini, la loro forma non è l' europea, e ch' e' si distinguono, per caratteri proprì, da tutti i teschi di stipite ariano. Egli ha avvertito che ne' cranî ba-

(1) *Blick pā Ethnologiens nàrvarando Stāndpunkt*, 1857, p. 8; e in lettera scrittami da Stoccolma il 3 gennaio 1853.

(2) *Essai sur les déformations artificielles du crâne*, p. 45.

(3) *Report of the British Association*. in Nott and Gliddon. *Indigenous Races of the Earth*. p. 248.

(4) *Révue des deux Mondes*, 15 mars 1850. Cénac-Moncaut lo afferma per gli Aragonesi, i quali (egli dice) rassomigliano a' Guasconi dell' Aquitania, ed a' nativi del Comminges e del Bigorre. *Histoire des Pyrénées*, t. I, p. 432.

(5) Tom. III, p. 579-91; tom. IV, 38-72.

(6) « Il n'y a en effet dans la collection qu'un très-petit nombre de crânes brachycéphales. Le N. 24 qui est le plus brachycéphale de tous, n'a pas plus de 83,24 d'indice céphalique; le N. 34 a 82,73; sur cinq crânes, l'indice est compris entre 81 et 82, sur cinq autres entre 80 et 81; les autres sont plus ou moins dolichocéphales, et l'indice céphalique moyen des 60 crânes est de 77,67 ». *Bulletins cit.*, t. III, p. 582.

*

schi, a differenza di ciò che si osserva quasi costantemente ne' cranî di Europei, o non esiste alcuna traccia della protuberanza occipitale, o quando esiste ella è sì poco apparente che appena si rende manifesta, e che rari sono i teschi ne' quali si mostri veramente sviluppata. Egli infatti ha trovato che di que'60 cranî 13 non offerivano traccia nè di linea, nè di protuberanza occipitale, 17 mancavano di protuberanza e non presentavano che la sola linea semicircolare; in 10 mostravasi appena la protuberanza, in 17 sporgeva mediocremente, e non era veramente conspicua che in soli 3 casi, onde « *si può conchiudere* (sono parole del Broca) *essere il poco sviluppo delle linee occipitali e della protuberanza occipitale esterna uno de'caratteri della razza basca* (1) ».

Un altro carattere del cranio biscaglino, ch' io trovava parimenti nei liguri antichi e moderni, egli è che se il teschio si divida in due metà per mezzo di una linea verticale che da' forami uditivi si elevi fino al vertice, la metà posteriore è quasi sempre maggiore dell' anteriore, d'onde una predominanza de' lobi mediani e posteriori del cervello sopra i lobi anteriori.

In altra particolarità ancora i cranî baschi, al pari de' liguri, si differenziano da'cranî europei, ed è il poco sviluppo delle fovee cerebellose corrispondente al niuno o lievissimo della protuberanza occipitale esterna. Per questo carattere, non meno che per la piccolezza della lor mascella superiore e per l' atrofia relativa della protuberanza occipitale, benchè i cranî baschi a forma dolicocefala per altri rispetti si avvicinassero agli africani, pure se ne discostano grandemente, come si allontanano altresì da tutti quelli delle razze di Europa (2).

Le osservazioni del Broca parvero al Pruner-Bey meritevoli di qualche appunto, imperocchè molte teste di Baschi viventi, misurate con accuratezza matematica dal sig. A. d'Abbadie, presentarono il tipo brachicefalo predominante sopra il dolicocefalo, ond' egli ne conchiudeva che i cranî esaminati dal Broca dovevano appartenere ad una popolazione molto mista, nella quale il tipo iberico era ito dileguandosi ridotto ad una debole minoranza (3). Ed invero anche il Montagu, il quale percorse la Guascogna francese e spagnuola per raccogliervi elementi sul

(1) Ibid., p. 591.

(2) Ibid., t. IV, p. 62.

(3) Conf. la discussione fattasi nella Società di Antropologia di Parigi il 24 gennaio 1863 sulla Memoria del Broca ne' Bullettini della detta Società, t. IV, p. 33-72.

tipo fisico de'suoi abitatori, è di credere che il cranio de'Baschi fosse in generale rotondo con un diametro trasversale di poco minore del longitudinale (1). Quanto a me, io porto credenza, che non ostante che nei Baschi si sia perpetuato un dialetto dell'antico idioma degli Iberi e probabilmente anche de'Liguri, pure il lor sangue è grandemente commisto ad elementi stranieri, soprattutto celtici in proporzioni assai maggiori che ne'Liguri, ond'eglino oggidì non rappresentano che in piccola parte la popolazione aborigena della Spagna. Non però il tipo antico vi è scomparso allo intutto: ancora vi durano, in più o men forte misura (singolarmente nelle parti elevate e nelle valli di men facile accesso) i cranî brachicefali; ancora ne' dolicocefali, risultato dell' incrociamento con le razze ariane e semitiche, appariscono e si perpetuano alcuni caratteri del tipo iberico; ancora le forme esteriori del maggior numero de' nativi delle Province basche ricordano quelle fattezze rappresentate nelle medaglie iberiche, celtiberiche ed aquitane; ancora i loro caratteri personali, soprattutto nelle Province spagnuole, concordano con quelli che gli scrittori dell'antichità ci lasciarono descritti appartenenti agli antichi Iberi (2). Chi voglia mettere a riscontro tali caratteri con la conformazione esteriore degli abitanti delle due Riviere Liguri e di alcune Province Piemontesi, vi troverà tali somiglianze da persuadersi ancor più della stretta affinità delle due stirpi. Dico delle Province Piemontesi di Cuneo e di Alessandria, avvegnacchè nelle rimanenti Province Subalpine è più frequente incontrar uomini di biondo pelo e di bianca carnagione, benchè sovente forniti di testa brachicefala. Questa varietà che nella Provincia di Torino raggiunge presso a poco la quarta parte della popolazione dimostra l' influenza che fra i Liguri Pedemontani esercitarono le vicine schiatte galliche, le quali mescolandosi ad essi, se non valsero a modificarne la forma del cranio che rimase qual fu sempre ne'popoli ligustici,

(1) Ibid., p. 35.

(2) Sono questi i caratteri che assegnano al Basco il Quatrefages, *loc. cit.*; Homalius d'Halloy, *Races Humaines*, 1845, p. 63; Cénac-Moncaut, *Hist. cit.* I, 430; Moreau de Jonnès, *La France avant ses premièrs habitants*. Paris, 1856, p. 161; P. Broca, *Mém. de la Societé d'Anthropologie de Paris*. 1860, p. 19; Maury, *La Terre et l' Homme*. Paris, 1845, p. 405; Dieffenbach, *Origines Europæe*. Frankfurt 1861, p. 116, il quale con più precisione degli altri tratteggia i caratteri di questo popolo: « Mai haben die heutigen Basken schöne Züge, runde Schädel, offene entwickelte Stirne, gerade Nase, sehr fein gezeichneten Mund und Kinn, ovales, unten etwas schmales Gesicht, grosse schwarze Augen, schwarze Haare und Brauen, braunlichen, schwach gefärbten Teint, mittlere, aber vollkommen proportionierte Grösse, kleine gutgeformte Hände und Füsse ».

lasciarono fra questi la bianchezza della loro carnagione, il color biondo de'loro capelli e l'azzurra tinta de'loro occhi. Le valli d'Aosta, di Susa e di Pinerolo subirono maggiormente quella mischianza forestiera, e non è raro perciò di vedere fra i nativi di quelle valli molte teste dolicocefale, che sono la espressione più evidente della preponderanza del sangue celtico in quelle contrade. Anche un teschio antico che io conservo nella mia collezione donatomi dal mio egregio amico cav. Antonio Garbiglietti, e che si ottenne da una tomba aperta molti anni addietro nell'agro Canavesano, e che ha le fattezze e l'aspetto di un cranio celtico, è pruova che conferma a sua volta come in antico e Liguri e Celti vissero commisti in quella valle della Provincia di Torino. Forme simili ho trovate in altro cranio che probabilmente risale al secolo XIV rinvenuto in Rivarolo Canavese in alcune escavazioni fatte praticare l'anno scorso dal sig. conte Carlo Tocsca di Castellazzo nel terreno attiguo alle rovine che ancora rimangono dell'antichissimo castello, feudo e ad un tempo abitazione de'conti di Castellazzo e S. Martino, signori di Rivarolo.

Nelle Gallie altresì primamente e innanzi a' Celti vissero Liguri ed Iberi, ed anche dalla maggior parte delle Gallie scomparvero que'primi abitatori. Se non che i Celti che vi si posero a stanza e ne fecero loro stabile dimora non assorbirono dappertutto il tipo preesistente, e chi guardi bene addentro nella popolazione di quel vasto paese vedrà in alcune Province l'elemento indigeno esser tuttavia vigoroso, e contrastare al celtico la preponderanza. Benchè non possa dirsi l'uno scevro dell'influenza dell'altro, rimase però a ciascuno tanta originalità da rendersi affatto distinto e separato dall'altro. È facile riscontrare qua e là i due tipi in quasi tutti i Dipartimenti della Francia, massime in Provenza e soprattutto nelle Linguadoca. Se non che è da osservare, che anche i Latini rivendicano gran parte sul tipo fisico degli abitanti della Gallia meridionale. Questo elemento vi si accumulò in vaste proporzioni, onde vi si è potuto conservare fino a' dì nostri, e s'incontra frequentissimo nelle fisonomie de'Francesi del mezzogiorno.

Penetrato da questo dualismo che da per ogni dove presenta l'odierna popolazione della Francia, e non sapendo rinvenirne altrove la vera spiegazione, suppose W. Edwards (al quale molti fecero eco e batterono le mani e dentro e fuori di Francia) la razza celtica divisa in due rami, il gallico (bruno), ed il cimrico (biondo), e perciò conchiuse che una razza pura possa avere due tipi, due forme diverse di testa, due caratteri distinti

di fisonomia! (1). S'egli avesse posto mente a questo, cioè, che prima della venuta de' Galli esistevano altre genti nell'occidente dell'Europa, e che quelle genti non potevano essere state tutte distrutte, nè annientate dai nuovi venuti, invece di creare un tipo bruno di Galli, che le testimonianze unanimi degli scrittori smentiscono, avrebbe potuto di leggieri in quel tipo riconoscere il popolo che abitava la Gallia pria che i Celti venissero ad occuparla. E poichè quel tipo non era diverso nè dal ligustico, nè dall'iberico, avrebbe altresì potuto conchiudere che o gli uni o gli altri erano stati i primi che aveano abitato nellè terre di Francia. Ciò han dimostrato recentemente con argomenti di ogni sorta il signor P. Broca (2), il signor H. Martin (3) e il barone Roget de Belloguet nella sua *Ethnogénie Gauloise*, onde io credo non esservi al presente chi più voglia parteggiare per le origini gallo-cimriche dell'Edwards.

Tali deduzioni che la semplice osservazione de' due tipi, bruno e biondo, sparsi per le Gallie rende incontrovertibili, sono avvalorate ancor più dalla presenza de' teschi rinvenuti nelle vetuste necropoli della Francia, e nelle quali talora s' incontrano teschi brachicefali e dolicocefali confusi insieme, i quali fanno fede dell'alleanza ch' erasi stretta fra le popolazioni celtiche e gli aborigeni della contrada; talaltra si trovano due strati di cadaveri, l'uno sovrapposto all'altro e divisi da un letto di terra, il che fa vedere esservi stato un intervallo fra la prima e la seconda tumulazione, ed allora lo strato superiore raccoglie insieme teschi dolicocefali e brachicefali, mentre l' inferiore racchiude soltanto cranî brachicefali (4), i quali erano appunto i cranî del popolo più antico, non allo intutto scomparso oggi dalla Francia, e la forma de' quali è sì caratteristica del tipo ligure nella Liguria e nel Piemonte.

(1) *Sur les Caractères physiologiques des Races Humaines considérées dans leur rapport avec l'histoire.* Paris, 1829, pag. 65. *Type Gall:* « Tête arrondie de manière à se rapprocher de la forme sphérique, front moyen, un peu bombé et fuyant vers les tempes, yeux grands et ouverts; le nez, à partir de la dépression à sa naissance, est à peu-près droit, c'est à dire qu'il n'a aucune courbure prononcée; l'extremité en est arrondie ainsi que le menton; la taille est moyenne. — p. 66. — *Type Kymryque:* « Tête longue, front large et élevé, le nez recourbé, la pointe en bas et les ailes du nez relevées, le menton fortement prononcé et saillant, la stature haute ».

(2) *Recherches sur l'ethnologie de la France.* Paris, 1860

(3) *Les Races brunes et les Races blondes; Rèvue nationale et étrangère*, mars, 1861.

(4) Tale era la disposizione degli ossami scoperti nel 1845 presso al *Dolmen* di Meudon. « Les deux types occupaient des rangs differents. Le type gall (tondo) était situé plus profondement, tandis que le type hymry (lungo) paraissait placé plus superficiellement ». Serres, *Comptes-Rendus de l'Acad. des sciences de l'Institut*, 1845, t. XX, p. 618-19.

Se volgiamo uno sguardo alla popolazione delle Isole Britanniche, vediamo ripetersi anche ivi , sotto i nostri occhi, i medesimi fatti che ci hanno mostrato le Gallie ; un tipo nuovo dolicocefalo sostituito ad un antico brachicefalo, ma non siffattamente che non rimanessero ancora potenti vestigia del vecchio tipo nel popolo presente.

Le attente investigazioni sui cranî antichi fatte in quel paese, e innanzi a tutto la pubblicazione dell'insigne opera de'*Crania Britannica* de'signori Davis e Thurnam (1), hanno messo fuori dubbio avere abitato quelle Isole, ne'tempi antestorici, una popolazione fornita di cranio brachicefalo somigliante a quello ch'era proprio degli aborigeni delle Gallie, e che è stato sempre caratteristico de'Liguri. Questa forma craniale che in Francia ed in Italia è quasi sempre associata ad una tinta brunetta , ad occhio e capello nero e a una statura non superante la mezzanità, non era neanco scompagnata da tali caratteri nelle Isole Britanniche , imperocchè sappiamo che una popolazione brunetta era ivi così distinta nel I° secolo dell' Era Cristiana, che Tacito ebbe a descriverla enumerando le varie stirpi che ai suoi tempi popolavano quelle Isole. Dopo Tacito le invasioni germaniche per cinque secoli continuatesi nella gran Brettagna modificarono potentemente il tipo indigeno, ma non ostante che il cranio sferico non si osservi se non raramente e l'occhio sia quasi sempre o verdastro o azzurrognolo, di quell'antico tipo rimasero ancora in molte parti d'Inghilterra, di Scozia e d'Irlanda la mezzana statura e il color bruno de'capelli (2); caratteri che ricordano a

Nel Museo della Società di Antropologia di Parigi sono stati raccolti presso a cinquecento cranî francesi fra antichi e moderni, di origine autentica e di date approssimativamente certe. In queste diverse serie di crani, egualmente che ne'teschi raccolti dal signor Brullé, di Digione, dalle sepolture de'tempi de'Burgundi, si sono trovati costantemente, fra le forme intermedie, i due tipi brachicefalo e dolicocefalo entrambi rappresentati da tanto maggior numero di *specimen*, quanto è più remota l'epoca alla quale appartengono.

(1) *Crania Britannica. Delineations and Descriptions of the Skulls of the Aboriginal and Early Inhabitants of the British Islands.* London, 1856, e seg. 4°.— Conf. anche Prichard, *Researches into the physical History of Mankind*. t. I, p. 305, 4ª ediz., t. III°, p. 199, 3ª ediz.—J. B. Davis, *On the Crania of the Ancient Britons;* ne' *Proceedings of the Acad. of Natural Sciences of Philadelphia*, febbraio, 1857.

(2) Price, *An Essay on the physiognomy and physiology of the present Inhabitants of Britain.* London 1829.— Prichard, *Researches*, III, 196 e seg.—Jones, *Vestiges of the Gaels in Gwynedd.* 1851, p. 72.—Beddoe, *A Contribution to Scottish Ethnology*. 1853.—Phillips, *Rivers, Mountains and Sea Coast of Yorkshire*. 1853, p. 261.—Massy, *Analytical Ethnology, on the mixed Tribes in Great Britain and Ireland examined.* London, 1855, passim.— *Crania Britannica*, p. 53, nota.— De Belloguet, *Ethnologie Gauloise*, passim.

primo aspetto i Siluri di Tacito, e con essi altresì gli Iberi ed i Liguri e gli aborigeni preceltici della vicina Gallia.

Questo tipo brachicefalo, che riappare ancora qua e là in Germania, e spicca in mezzo al dolicocefalo che è sì comune fra gli odierni Teutoni, lasciò anche tracce fra costoro come in Italia, nelle Gallie e nelle Isole Britanniche. Gli antichi cranî che si sono raccolti in Alemagna, alcuni deformati da compressione fronte-occipitale (cranio di Feuersbrunn presso Grafenegg e di Atzersdorf presso Vienna), altri no (cranio di Plau nel Meklemburgo), sono quasi tutti brachicefali (1), onde non è dubbio che anche quivi avesse abitato pria de'Celti e de'Germani quel medesimo popolo che innanzi a tutti avea posto sua dimora nell'Europa meriggia ed occidentale. Nè le vestigia ne sono oggi tutte scomparse, avvegnacchè non è raro di vedere cranî corti e tondi nella Germania settentrionale, e in maggior numero ancora nella meridionale (come in Isvizzera) (2), ove in alcune contrade il teschio degli abitanti sembra essere in maggioranza brachicefalo, se ne giudichiamo dalle descrizioni e misure che ha date il D.r A. Ecker di alcuni cranî del villaggio di Bollschweil presso Freiburg e di parecchi altri delle regioni elevate (Oberland) del badese (3).

Altrettanto può dirsi della Scandinavia, ove se al presente rare vestigia s' incontrano di tipo che non sia teutonico, nelle antiche sepolture però è frequentissimo trovare i cranî brachicefali di quella vecchia razza che scomparve dalla maggior parte dell'Europa sotto l'influenza preponderante delle schiatte pelasgica, celtica e germanica (4). Ma se il nativo

(1) Il cranio di Plau nel Meklemburgo è decisamente brachicefalo; è lungo dalla glabella all'occipite 6″ 5‴ poll. inglesi e da una protuberanza parietale all'altra 5″ 5‴ (millim. 168 e 141). Ved. Schaffhausen, nella *Natural History Review*. 1861; C. Blake, *On the Crania of Ancient Races*, nel *Geologist*. 1862, p. 209. — Gli altri cranî deformati e comunemente creduti *Avarici* sono stati anche osservati e descritti dal Retzius in una sua Memoria pubblicata negli Atti dell'Accademia delle Scienze di Stoccolma pel 1844, e dal Fitzinger nelle *Denskriften der mathem. naturwisch. Klasse der Wiener Akademie in Jahre* 1853.

(2) « Bei nördlichen Deutschen (così il Baer) die Breiten-Dimension schon etwas mehr entwickelt zu sein pflegt. Bei den südwestlichen Deutschen nimmt aber die Breiten-Dimension auffallend zu, und in der Schweiz sind viele Köpfe gerade zu brachycephal zu nennen ». *Ueber einen alten Schädel aus Mecklenburg*, etc. *Bulletin de l'Academie de S.t Petersbourg*, t. IV, 1863.

(3) *Crania Germaniæ meridionalis occidentalis*. Freiburg, 1863, 4°, I, Heft. p. 12-15, Tav. V, VI.

(4) Eschricht, nel *Dansk Folkeblad*, 15 7bre 1837, p. 111; Nilsson, *Skandinaviska Nordens Ur-Invänare, ett försök i comparativa Ethnographien*. Cristiania, 1838; Retzius, in *Müller's Archiv*,

Scandinavo non serba oggi più tracce di quel tipo aborigeno della sua contrada, non però si spense all' intutto quell' antica razza nel settentrione dell'Europa, ove i Finni (e fors'anche i Lapponi), benchè in parte frammisti a sangue germanico, rappresentano tuttora gli avanzi viventi di quella prisca gente che innanzi alla venuta degli Ariani signoreggiava sopra sì gran parte del Continente europeo.

I Finni, se ne togli il color biondo o gialleggiante del lor capello e l'azzurro più o men fosco del lor occhio (1), caratteri che i frequenti connubî scandinavi han propagato nella discendenza mista di quel popolo (2), nella forma del teschio non si discostano gran tratto nè da que'cranî che si sono dissepolti dalle più antiche tombe dell' Europa, nè da que' che son proprî delle popolazioni liguri dei giorni nostri. Anche il teschio de'Finni è brachicefalo; anch'esso ha una forma quasi sferica e l'occipite poco o nulla sporgente. La sua fronte è larga e non raramente elevata, grande altresì la distanza fra i zigomi e fra gli angoli della mascella inferiore, onde la faccia è quasi altrettanto larga che lunga, ed ha la figura quadrata, come ne'cranî ligustici antichi e moderni. L'arco mascellare superiore è più tondo che ovale, sporgendo un po' all' esterno il suo margine anteriore che dà a quella mascella un legger grado di prognatismo che non è raro neanche fra i Liguri. Il cranio è parimenti alto, largo nella sua base, soprattutto fra le apofisi mastoidee e dietro le medesime; e se diviso in due metà mediante una linea verticale che dal forame uditivo s'innalzi fino al vertice, la metà predominante non sarà già l'anteriore, ma sì la posteriore come in tutti i cranî baschi e ligustici (3).

Nè la forma sola del cranio mostra affinità fra le stirpi finniche e la ligustica. Noi abbiamo già innanzi veduto che l'idioma iberico, di cui il basco è rampollo vivente, era comune agli Iberi ed ai Liguri, e da que-

1849. — Nott and Gliddon, *Indigenous Races of the Earth*, p. 292 e seg.; Nicolucci, *Delle Razze Umane*, t. I, p. 187-88; Van der Hoeven, *Catalogus Collectionis suæ Craniorum diversarum Gentium*. Lugd. Batav. 1860, p. 63. — Si attende con desiderio la promessa opera del Busk che spargerà molta luce sull'antica craniologia dell' Europa, ed avrà il titolo di « *Crania Prisca* ».

(1) *Fennones* (scriveva Linneo) *corpore toroso, capillis flavis, prolixis, oculorum iridibus fuscis.* Fauna Suecica, 1761, I.

(2) Nicolucci, *Razze Umane*, II, 16-17

(3) Huck, *De Craniis Esthonum Commentatio anthropologica, qua viro illustrissimo J. T. Busch, doctoris dignitatem impetratam gratulatur ordo medic. Universitat. Dorpatensis.* Dorpati Livonorum, 1840. — Retzius, *Ueber die Schädelformen der Nordbewohner*, in *Muller's Archiv.* 1845; J. Van der Hoeven, *Beschrijving van eenen Magyaren-en van eenen Esthlander Schedel.*

sta comunanza abbiamo tratto argomento della consanguineità originaria delle due genti. Or se raffrontando il parlar basco col sermone dei Finni vi riscontriamo appigli ed analogie, abbiamo in ciò un'altra pruova, oltre quella della similitudine del cranio, della parentela che stringe insieme i Baschi (Iberi), i Liguri e le stirpi Uraliche o Finno-Ugoriane. L'idioma basco in effetti, il quale non mostra affinità di sorta con alcuno de' parlari de' gran ceppi semitico ed indo-europeo, si è trovato da distinti filologi esser connesso, per la sua natura polisintetica e per altre sue particolarità grammaticali, con le favelle del gruppo finno-uralico, le quali presentano quello stesso carattere di agglutinazione, benchè in minor grado, che già fu notato nel biscaglino con tanta copia di erudizione da quel gran filologo che fu Guglielmo de Humboldt (1).

Questi rapporti fra il sermon basco e gli idiomi finni intraveduti innanzi a tutti dall'Arnt (2), ed avvalorati di poi da quel potente ingegno del Rask (3), che annunziò il primo quell'opinione oggimai accettata quasi unanimamente, essere stata la nostra Europa pria degli Ariani popolata da gente di schiatta finnica o turaniana, furono fecondati dall'Adelung (4), Dobrowsky (5), Schaffarik (6), Prichard (7), Keyser (8), Maury (9) ed altri molti, ed hanno avuto al dì d'oggi più ampia dimostrazione dalle diligenti investigazioni del Max Muller (10) del Charencey (11) e del principe C. Luigi Bonaparte (12). Quest'ultimo applicandosi più specialmente a chiarire le analogie che il basco presenta con le lingue finniche rispetto 1. alla formazione del nominativo plurale, 2. alla declinazione definita, 3. alla coniugazione obbiettiva pronominale, e 4. all'armonia e permutazione delle vocali, ha dimostrato:

(1) *Prufung über den Untersuchungen über die urbewohner Hispaniens, etc.*

(2) *Ueber die Verwandschaft der Europäischen Sprachen.* Berlin, 1819.

(3) *Untersuchungen über den Ursprung der alten nordischen Sprache, uberset.* Berlin, 1826, pag. 69.

(4) *Mithridates*, II° vol., p. 9, 12.

(5) *Literarische Nachrichten*, p. 99.

(6) *Slavische Alterthümer*, t. I, p. 88 e seg.

(7) *Researches cit.*, t. III, p. 8 e seg.

(8) In Retzius, *Ueber die Schädelform. d. Nordbewohner. Muller's Archiv.*, cit. p. 267 e seg.

(9) *On the Distribution and Classification of tongues*, in Nott and Gliddon, *Indigenous Races of the Earth*, p. 48 e seg.

(10) *Lectures on the Science of Language.* London, 3. ediz. 1862.

(11) *La langue basque et les idiomes de l'Oural.* Paris, 1862.

(12) *Langue basque et langues finnoises.* Londres, 1862.

« Essere la formazione del plurale basco identica a quella del lapponico del Finmarck e dell'ungherese;

« Essere la declinazione definita del mordvino esattamente corrispondente a quella del basco;

« Potere il basco, il mordvino, il vogulo e l'ungherese esprimere nel loro verbo il subbietto e il regime diretto ad un tempo;

« E per ultimo tanto le lingue finniche, quanto il basco sottostare a certe leggi di armonia, per le quali alcune vocali sono seguite o precedute assolutamente dalle loro alleate, sicchè una vocale ne chiama imperiosamente un' altra , e certe vocali non possono ad ogni conto associarsi a quelle che non sieno armoniche con esse. Vi è però da notare, che la simpatia delle vocali non si manifesta in basco che tra quelle di un gruppo differente , mentre che negli idiomi finnici ha luogo tra le vocali di uno stesso gruppo. Le dure con le dolci e le dolci con le dure è la regola del basco: l'antagonismo. Le dure con le dure e le dolci con le dolci è quella delle lingue finniche: il dualismo (1) ».

Addentrandosi ancor più profondamente nello studio comparativo fra il basco e gli idiomi turaniani, il de Charencey ci ha fatto conoscere altri particolari onde l' eskuara si rannoda con le lingue finniche od uraliane, e ch'ei riassume con le seguenti parole.

« 1. Ciò che ravvicina l'eskuara a'dialetti dell'Ural è la formazione, per via di agglomerazione, rimanendo sempre l'idea di relazione indicata per mezzo di suffissi, facilmente separabili dalla parola principale.

« 2. La struttura sovente inversa della frase , e la conversione della preposizione in postposizione.

« 3. La niuna distinzione tra i generi mascolino e femminile.

« 4. La poca flessibilità della radice pronominale, onde risulta che la postposizione ha un'origine sostantiva, e che l'uso della congiunzione si trovi ristretto in angusti limiti.

« 5. La confusione tra le diverse categorie grammaticali, l'uso del radicale semplice per rendere un'idea di relazione, l'aggiunzione al nome di desinenze di natura addiettiva , il cangiamento di categoria cui van soggetto certi nomi in una parte della loro declinazione.

« 6. La mancanza di composti verbali come ne incontriamo nel sanscrito, e soprattutto di preposizioni addossate al verbo ed al nome.

(1) *Langue basque et langues finnoises*, p. 9 e seg.

« 7. La repugnanza ad ammettere una doppia consonante iniziale.

« 8. Finalmente un'affinità incontestabile ne'nomi più usuali e più importanti; in certe forme della coniugazione e della declinazione (1) ».

Tuttociò non è veramente una dimostrazione che possa esser priva di ogni controversia, avvegnachè vi ha pure una serie non lieve di differenze che separano nettamente la lingua basca dagli idiomi turaniani; nondimeno quando si rifletta alle grandi difficoltà che involgono questo argomento, io credo si possa esser paghi fin qui de'dati generali, ed attendere da altri studî e da nuove indagini maggiori pruove e più copiose illustrazioni, le quali io mi penso non potranno mai raggiungere quella chiarezza ed evidenza onde sono fatte manifeste le vicendevoli relazioni de'dialetti ariani o dei dialetti semitici.

Quella rassomiglianza della quale abbiamo favellato fra il tipo ligure ed il tipo finnico non si ristringe mica a' soli Finni della costiera baltica, agli Estonî, a' Livoniani ed ai Lapponi (probabilmente meticci di Finni ed Iperborei), ma si estende ancora a tutti gli altri rami che metton capo nel grande stipite finnico, cioè al Bulgaro, al Permico ed all' Ugoriano, di cui sono parte cospicua gli Ungheresi, ne'quali parimenti il cranio riunisce tutti que' caratteri che son propri della forma brachicefala (2), e che noi abbiam visto appartenere a'Finni baltici ed ai nativi della Liguria e del Piemonte (3).

Un altro cranio che somiglia al finnico, e quindi al ligure, e che fin da Vesalio sapevasi essere di forma rotonda (4) è il cranio de'Turchi così elegantemente descritto dal Blumenbach nella 1ª delle sue *Decades Craniorum diversarum gentium* (1789). « Calvaria fere globosa; occipitio scilicet vix ullo, cum foramen magnum pene ad estremum baseos cranii

(1) *La langue basque et les idiomes de l'Oural*, p. 21.

(2) Van der Hoeven, *Beschrijving van eenen Magyaren-en van eenen Esthlander Schedel.*

(3) È d'uopo ritenere per accertato, che i Finni quali oggi sono han subito notevoli modificazioni nelle loro qualità di natura per l'influenza delle altre razze che gli avvicinano, soprattutto delle stirpi germaniche, slave e mongolliche. Quest'ultime, benchè nell'idioma si accostino a' Finni, nella forma del cranio se ne allontanano per molti rispetti, singolarmente per la grandezza, forma e distanza delle ossa zigomatiche, per la notevole larghezza della faccia e la manifesta prominenza del mento. Conf. C. E. Baer, *Crania Selecta et Thesauris anthropologicis Academiæ Imperialis Petropolitanæ*. 1859.

(4) Turcorum capita globi fere imaginem exprimunt. *De fabr. corp. hum.*, lib. I, c. V. — Insfeld avea detto anch'egli: Amat Belga caput oblonge-rotundum, rotundior Germanis, maxime rotunda figura Turcis placet. *De lusibus naturæ*. Lugd. Batav. 1772.

positum sit. Frons latior. Glabella prominens. Fossœ molares læviter depressæ. In universum faciei symmetrica et elegans proportio ».

Io non istarò qui a discutere (non è il luogo di farlo) se il Turco debba annoverarsi fra i Mongolli, o non piuttosto fra i Finni a'quali lo avvicina di assai la conformazione del suo teschio, ma mi contenterò di fare osservare col celebre Alessandro de Humboldt che « la réunion des Turcs, « des Toungouses et des Mongols dans une même race paraît douteuse « par des raisons physiologiques. Des grandes analogies entre toutes les « langues tartares reconnues dans ces derniers temps ne semblent pas « nécessairement enduire à une parenté généalogique. Quelle difference « entre les crânes kalmoucks et ceux des Turcs de Kasan et de To-« bolsk ! (1) ». E qual' altra differenza (aggiungerò io pure) fra i Mongolli e i Tongusi, e ciò che a noi tramandarono de' Baschiri Jacuto e Schamsaddin Dimeschki (XIII e XIV sec.) (2), ciò che scrissero dei Kirghizi gli storici cinesi (3) e Rubruquis racconta di Batu, nipote di Gengis-Khan (probabilmente di razza turca) (4), e Marco Polo ci ricorda del capo di quella dinastia, del suo protettore Kublai-Khan (5), e Tchihatchef ripete a' dì nostri de' Turcomani nomadi, uno de' rami più puri di questa famiglia (6)! Dopo tuttocciò io non esiterei a vedere ne' Turchi una famiglia di popoli più prossima a' Finni che a' Mongolli, e rispetto ai Turchi Osmanlini, non avrei neppure esitanza di vedere in essi, non già (come d'ordinario si crede) Mongolli imbianchiti e rigenerati dal sangue ariano, ma sì una discendenza mista tanto di Turchi, quanto di quegli Unni che per la bianchezza della loro carnagione furono dagli scrit-

(1) *Asie centrale*, t. I, p. 394.

(2) Frahen, *de Basckiris quœ memoriæ prodita sunt ab Jbn Fozlan et Jacuto*. Petropoli, 1822, pag. 73.

(3) Conf. Klaproth, *Tableaux historiques de l'Asie*, p. 168.—Humboldt, *Asie centrale*, I, p. 130.— Ritter, *Erdkunde*, *Asien*, I, p. 1115.

(4) A. de Humboldt fa osservare (*Ibid.* p. 246) che nella famiglia probabilmente turca di Gengis-Khan, suo nipote Batu avea fattezze talmente europee, che Rubruquis fu sorpreso dalla sua grande somiglianza col fu Monsignor Giovanni de Beaumont, la cui tinta colorita presentava la stessa freschezza.

(5) *Homo admodum pulcher .... faciem habet rubicundam atque candidam, oculos magnos, nasum pulchrum, etc.* Lib. 11, c. VIII.

(6) Ces peuplades présentent entre elles les mêmes différences que la famille turque en général, c'est-à-dire que celles qui errent dans l'Anatolie et la Chaldarménie sont, comme les Osmanlins, douées de formes de la race blanche assez pures; tandis que celles du Turkestan ont un visage aplati, des pommettes saillantes et une barbe peu fournie, ce qui annonce un mélange avec le sang mongol. In Homalius d'Halloy, *Races Humaines*, p. 93.

tori bizantini chiamati Eftaliti (1), i quali fin dal secolo V dell' Era Cristiana dominavano nella Transossiana d'onde poi uscirono que' Seldjucidi che si stabilirono in Persia nel secolo X, un avanzo de' quali si spinse alla conquista delle Province del Bosforo e dell'Asia Minore.

Qui si presenta in tutta la sua imponenza un gran problema etnologico, che io non intendo risolvere perentoriamente, ma sul quale è mestieri di richiamare l'attenzione de' cultori dell'antropologia, ed è la forma del *cranio slavo*, del cranio di una popolazione che si avvicina agli ottanta milioni di uomini, e che è ampiamente sparsa all'oriente, al meriggio e nel cuore stesso dell'Europa.

Il cranio slavo è brachicefalo, e più brachicefalo forse che non sia quel dei Finni, imperocchè dalle misure comparative date dal Retzius (2), esprimendosi la maggior larghezza del cranio in frazioni numeriche del 1000 che ne rappresenta la lunghezza, si ha che la larghezza del cranio slavo starebbe alla sua lunghezza; o in altri termini, il diametro biparietale starebbe al diametro antero-posteriore nella proporzione di 888 a 1000, mentre quella de'Finni starebbe nella proporzione di 809 a 1000. Per altro quelle misure poggiano sopra troppo piccol numero di teschi (1. tsecco, 1. polacco, 2. russi, 1. boemo) per poterle ritenere come generali, ed in effetti il Van der Hoeven ha ottenuto come termine medio dalle sue misurazioni di 15 cranî russi e 2 polacchi la proporzione fra la lunghezza e la larghezza di 857 a 1000 (3), ed il Baer, dalla misura di 30 cranî russi quella di 835 a 1000 (4). Ma egli è fuor d'ogni dubbio che il cranio slavo è corto, alto, di forma pressochè rotonda, privo di protuberanza occipitale, e fornito di tutti que' caratteri che son proprî del tipo brachicefalo ortognato.

(1) Procopio, *Pers.* I, 3.

(2) *Ueber die Schädelformen der Nordbewohner.*

(3) In una lettera scritta al Retzius in *Muller's Archiv.* 1845, p. 433-35. — Ritornando l'esimio autore a parlare de' cranî slavi nel suo *Catalogus craniorum diversarum gentium*, così scrive a pag. 22. — Quamquam numerus non ita magnus est craniorum, quæ enumeravi e gentibus slavonicis, probe tamen sufficit ad confirmandam generalem, quam ex aliis mensuris, præeunte cl. A. Retzio, desumeram adumbrationem .... Longitudo cranii media erit fere 0,169, latitudo vero inter parietalia ossa 0,140, quam jam antea eamdem esse reperi. Da queste nuove misure appare esser la larghezza del cranio slavo maggiore di quella che l'illustre Van der Hoeven avesse dapprima formolata; e riducendo queste nuove misure nella formola adottata pel testo, si ha che il diametro traversale è al longitudinale nella proporzione di 825 a 1000.

(4) *Nachrichten über die ethnographisch-craniologische Sammlung der Kais. Akad. der Wissenschaft.*; nel *Bulletin de l'Acad. de S.t Petersbourg*, t. XVIII, p. 396-98.

Ma questo cranio brachicefalo ortognato è egli proprio della stirpe vendica, o è il risultato dell'incrociamento del tipo slavo originario col tipo turaniano? Io senza addentrarmi in disquisizioni che qui starebbero molto fuori di proposito, m'adagio volentieri in quest'ultima opinione, e perchè ella non sembri così eterodossa quanto a prima giunta potrebbe parere, farò solamente osservare, che la maggior parte della vasta contrada oggi tenuta dagli Slavi fu in antico occupata da popoli che si dissero Sciti (*Çakâs* sansc., Σάκαι, *Scythae*, *Tschud'*), sotto la quale appellazione si comprendevano stirpi ariane e non ariane, Ario-Slavi, Finno-Ugoriani e Germani. Fra la innumerevole moltitudine de' popoli (*multitudo populorum innumera*, Plin.) che abitavano la Scizia, Erodoto e gli scrittori dopo di lui menzionavano gli Agatirsi, i Geloni, gli Issedoni, i Budini, i Siginni, i Sarmati, i Sauromati, gli Arimaspi, tutti Ario-Slavi, i Neuri, gli Androfagi, i Melancleni, i Cimmerî, genti Finno-Ugoriane, oltre ai Daco-Geti, a' Massageti, agli Alani ed ai Rossolani di puro ceppo teutonico.

Quando verso il secolo V dell'Era Cristiana le grandi invasioni nordiche cominciarono a rovesciarsi sull'Impero Romano, molti di questi antichi nomi più non si udirono, ma invece nuove genti si affacciarono in sull'oriente e il mezzogiorno dell'Europa, fra le quali giova ricordare gli Unni, gli Avari, gli Ungari, gli Uzî o Cumani, i Kazari, i Petchenegi, popoli Finno-Ugoriani, che dal numero de' loro combattenti lasciavano giudicare della loro potenza e della estensione delle loro schiatte. Così dai tempi di Erodoto fino alla caduta dell'Impero Romano una gran moltitudine di Turaniani era sparsa in mezzo agli Ario-Slavi, o Vendi, Vindi, Veneti, Οὐενέδαι, come si dicevano dai Greci e dai Latini; ma dopo le ultime emigrazioni della Razza Germanica nel nord e nell'occidente dell'Europa gli Ario-Slavi, acquistando il predominio sopra molte di quelle popolazioni, ne fecero dimenticare il nome, e col nome fin l'esistenza. Però se que'nomi scomparvero, non si dileguarono per certo le masse che componevano quelle popolose nazioni, e gli Slavi, stringendosi ad esse, ne ebbero modificata, se pur già innanzi non l'era, la loro fisica conformazione (1). Gli Ario-Slavi imposero a'vinti la lingua loro, e di ricambio i

(1) Il mito riferito da Erodoto delle Amazzoni che si congiunsero agli Sciti liberi delle Palude Meotide, dalla quale unione surse il popolo de' Sarmati o Sauromati, è una tradizione molto esplicita sull'origine mista di quella stirpe. Conf. Ippocrate, *de aere, aquis et locis*, cap. XVII; Eforo, *Fragm.* 103; Scimno da Chio, lib. V, 102; Platone, *Leggi*, VII; Diodoro Siculo, lib. II, cap. 34. Sembra

vinti assorbirono il tipo vendico numericamente inferiore, e sostituirono in parte le loro forme a quelle de'loro dominatori; onde gli Slavi di oggidì, numerosissimi perchè il risultato di due razze popolose, offrono tracce evidenti della loro origine meticcia. « La loro testa (è Schaffarik « che ne fa la descrizione) si approssima alla forma quadrata, più larga « che lunga, fronte piana, naso breve con tendenza alla concavità; gli « occhi sono orizzontali ma profondi e piccoli, le sopracciglia sottili, « ravvicinate all' angolo interno dell' occhio. Carattere generale, pochi « peli (1) ».

Il teschio brachicefalo per altro, se è in gran maggioranza, non è universale presso tutti gli Slavi. Spicca talora in alcuno di essi il tipo dolicocefalo e il capello biondo e l'occhio azzurrino; in altri il tipo è oscillante fra il brachicefalo e il dolicocefalo, e fra i varî rami della stessa famiglia nell'uno il cranio è più brachicefalo che nell'altro. I Russi sono evidentemente meno brachicefali de'Polacchi; questi meno degli Slovachi. E fra i Russi stessi i Russini (Piccoli Russi) sono più brachicefali de' Malorussi (Grandi Russi) presso i quali il cranio dolicocefalo vince di numero il brachicefalo (2).

La forma del cranio slavo, secondo che si avvicina più alla sferica che alla ovale annunzierebbe ne' vari gruppi di quella Razza il predominio dell' elemento turaniano o dell' ariano nella formazione di que' gruppi; onde gli Slovachi sarebbero più turaniani che ariani, laddove ne' Russi il sangue ariano non sarebbe di gran lunga superato nella misura dal turaniano.

Nuove mischianze d'altre schiatte con la slava hanno semprepiù modificata la conformazione fisica di questa, e ricondotto non di rado il suo cranio alla forma dolicocefala originaria degli Ariani, così in Grecia, che fu *slavizzata* almeno per tre secoli dopo la peste che desolò l'Ellade e il Peloponneso sotto il regno di Copronimo nel 746 (3), come ne' confini

però che quando gli Slavi s'inoltrarono verso la Germania il lor tipo erasi già modificato, se vogliamo giudicarne da due antichi teschi vendi che il Prof. Kopernicki ebbe da Dresda, e il cui diametro bi-parietale è al diametro antero-posteriore nella proporzione di 84 a 100.

(1) *Slavische Altherthumer*, I, 33.

(2) Baer, *Ueber einen Schädel aus Meklenburg*, cit.

(3) E'σθλαβωθὴ scrive Costantino Porfirogeneto (*Thom.* 11, 6). Anche prima di questa calamità erano state menzionate dallo storico ecclesiastico Evagrio altre invasioni slave avvenute in Grecia sotto il Regno di Maurizio verso l'anno 589. Quest'epoca è pure accertata dalla cronaca manoscritta di Monebasia che si conserva negli Archivî di Torino. L'itinerario di S. Villibaldo che visitò Mone-

dell'Alemagna, benchè fra gli stessi Germani, singolarmente del mezzogiorno, non sia molto rara la forma brachicefala del cranio, la quale è chiara dimostrazione che i Tedeschi, al pari di tutte le altre nazioni dell'Europa, hanno sangue misto nelle loro vene, e che eziandio fra gli odierni Teutoni la razza turaniana, in più o men notevole proporzione, trovasi associata con la schiatta ariana.

Da tuttocciò che siam venuti finora esponendo ci sembra adunque rimaner dimostrato, che tracce più o meno profonde dell' antico tipo dei popoli di Europa sieno tuttora riconoscibili in tutte le contrade ove gli Ariani estesero le loro conquiste e si soprapposero alle popolazioni native. Che fra queste men commiste di sangue straniero si conservassero sempremai i Liguri in Italia crediamo essere stato ampiamente chiarito nelle pagine antecedenti. Nè ci pare poter essere controversa la opinione che le popolazioni antestoriche dell'Europa, e con esse i Liguri, appartenessero alla stirpe turaniana, imperocchè abbiamo pur veduto, che i teschi ligustici, non men quelli de' primitivi popoli europei, si conformano al medesimo tipo caratteristico della razza turaniana, e che noi abbiamo particolarmente considerato ne'Finni, ne'Turchi e ne'Magiari. Onde rendere confortate di maggiori pruove queste nostre asserzioni metteremo a riscontro nello *Specchio* che segue le misure di 10 cranî ligustici con quelle di altrettanti cranî turaniani moderni. Quasi tutte queste ultime misurazioni le dobbiamo alla cortesia di uno degli illustri

basia nel 772 (*Bolland. luglio*, t. II, 492, e *Itinerario*, cap. II, p. 15, 7 luglio) non menziona il Peloponneso con altro nome se non con quello di *Slavinica Terra*.—Gli Imperatori di Oriente riacquistarono, è vero, quella Provincia nell'846, ma gli Slavi del Taigete, i Milengi e gli Ezeriti non furono assoggettati che ad un tributo che pagavano ancora 80 anni dopo (Costant. Porfirogen. *De Administr. Imp.* 50). Verso il 986 il Peloponneso e le Province occidentali furono di nuovo conquistate da Samuele, re de'Bulgari e degli Slavi, ma Basilio II°, il Bulgarottono, le ricuperò definitivamente una ventina d'anni dopo. Inoltre nell'Epitome di Strabone che fu redatto circa quell'epoca, sappiamo che gli Sciti-Slavi abitavano sempre l'Epiro e quasi tutta la Grecia, il Peloponneso e la Macedonia. Al XIII° secolo il Taigete e la Penisola di Maina sono ancor detti paesi degli Slavi nella *Cronaca di Morea*, ed anche oggidì, a poca distanza da Sparta, havvi un villaggio che chiamasi *Schlabochorio*, il quale col suo nome ricorda il dominio che ivi s'ebbero gli Slavi.

Or bene, in Grecia, non ostante l'incessante immigrazione di genti slave, il tipo ellenico è oggi qual era nell'antichità più remota. « Tutto è cangiato ne'Greci, scriveva il Byron, fuorchè i tratti del lor viso » (*Childe Harold*, c. II, strof. 75). I viaggiatori che sono stati in Grecia non han potuto non ravvisare negli odierni Elleni le fisonomie che ci sono rese familiari dai capilavori della statuaria antica; e i cranî de'Greci di oggidì mostrano perfetta identità di forma con que' che s'incontrano nelle vetuste necropoli, e che formano uno de'tipi più perfetti del cranio dolicocefalo ortogonato

autori de'*Crania Britannica*, il sig. J. Barnard Davis di Shelton (Staffordshire). È egli che ci ha fornito le misure de' cranî 11, 14, 17, 18, 20 appartenenti alla sua ricca collezione. Le misure del teschio N. 15 le abbiamo desunte dall'eccellente memoria del ch. Prof. Olandese Van der Howen « *Beschrijving van eenen Magyaren en van eenen Esthlander Schedel* »; e quelle de' N. 16,19 da due teschi conservati nel Museo anatomico dell'Università di Modena.

Relativamente all' altezza de' cranî le misure sono state da noi prese dal margine anteriore del gran forame occipitale al punto opposto della superficie esterna della calvaria. I signori Davis e Van der Howen hanno adottato un altro metodo, il primo misurando l' altezza del teschio dal piano del gran foro occipitale al vertice, il secondo dal margine posteriore di esso forame alla sommità della calvaria. Noi abbiamo cercato di ridurre queste diverse misure ad una misura uniforme, ed abbiamo creduto poterci riuscire diminuendo di 4 millimetri l'altezza de' cranî misurati da que' due distinti antropologisti ; ma si comprenderà di leggieri come la nostra riduzione sia troppo arbitraria per poterla considerare come esatta, laonde preghiamo il lettore di ritenere queste misure dell'altezza de' cranî turaniani unicamente come approssimative.

*

Misure di 10 cranî liguri comparate con quelli di altrettanti cranî turaniani moderni.

NUM. de' CRANÎ	NOME DE' PAESI A' QUALI I CRANÎ APPARTENGONO	CIRCONFERENZA ORIZZONTALE		DIAMETRO FRONTE OCCIPITALE		DIAMETRO BI-PARIETALE		INDICE CEFALICO Proporzione tra la larghezza e la lunghezza		LARGHEZZA DELLA FRONTE		ALTEZZA DEL CRANIO	
	Cranî liguri												
	A antichi												
1	Torre della Maina I (Provincia di Modena) D.	509		170		154		90.50		120		132	
2	Torre della Maina II (Id.) U.	519		172		156		90.7		119		132	
3	Cadelbosco di Sopra (Provincia di Reggio) U.	513		174		148		85.		125		132	
	B moderni												
4	Apennini liguri U	500		168		147		87.50		115		130	
5	Id. U	512	Media 513 ½	168	Media 172	145	Media 149 ½	86.30	Media 86.74	111	Media 119	128	Media 132
6	Torriglia (Provincia di Genova) U	518		170		145		85.29		119		123	
7	Genova U	520		178		151		84.83		120		124	
8	Provincia di Torino U	520		172		153		87.20		118		128	
9	Id. U	513		174		150		86.20		123		133	
10	Torino U	502		172		143		83.08		120		141	
	Cranî turaniani moderni												
11	Finnico di Kides (Carelia) U	533		179		150		89.39		125		132	
12	Id. di Tavastia U	520		174		150		86.20		123		129	
13	Id. di Kemi U	515		174		145		83.32		119		132	
14	Id. di Hollola (Tavastia) U	518		177		145		81.97		115		121	
15	Id. di Dorpat (Estonia) U	507	Media	175	Media	143	Media	81.71	Media	»	Media	131	Media
16	Ungherese (soldato nell'esercito austriaco) U.	510	514	170	174	150	147	87.67	85.26	120	120	130	131
17	Id. (Honved) U	506		163		144		86.75		126		132	
18	Id. Id. U	508		170		143		84.11		112		130	
19	Id. (soldato nell'esercito austriaco) U	506		175		146		82.43		111		130	
20	Turco U	518		184		153		89.13		130		139	

Misure medie	Circonferenza	Diametro fronte occipitale	Diametro bi-parietale	Indice cefalico	Larghezza	Altezza
Cranî liguri	513 ½	172	149 ½	86.74	119	132
Cranî turaniani moderni	514	174	147	85.26	120	131

§ 6.

Le Razze di Europa, ed ordine probabile delle loro immigrazioni.

Non vi ha in Europa quasi regione alcuna i cui abitatori non sieno il risultato della mistione di più stirpi, e singolarmente dell'ariana e della turaniana.

Questa fu la prima ad occupare il nostro Continente, e dalle tante pruove che da per ogni parte si raccolgono sembra omai fuori dubbio, che in antico vi dominasse esclusivamente, e ne coprisse l'intera superficie. I teschi vetustissimi dissepolti in diverse contrade, simili nelle forme ai cranì delle nazioni finno-ugoriane, sono il primo fondamento sul quale poggia l' opinione che noi sosteniamo. Essa è convalidata altresì da alcune oscure tradizioni de' popoli ariani, i quali discendendo dall' altopiano dell'Iran ad occupare nuove regioni vi trovarono già stabilite altre razze diverse da loro per origine, per lingua, per culto, e con le quali ebbero a combattere per conquistare le nuove lor sedi.

Queste tradizioni, trasmettendosi di bocca in bocca, han molto perduto della loro precisione, e sono state grandemente variate passando a traverso la lunga età che ci divide da quell' era primitiva cui elle si riferiscono, ma tutte concordano nell' esagerare le strane sembianze di quelle razze autottone, aggrandirne le difformità e fare di quelle stirpi popoli favolosi. Tali sono que' nani deformi, capricciosi, maligni che gli Ariani vedevano dappertutto in Europa, sotto i monumenti sepolcrali dell'età della pietra, sulle rive de'fiumi, fra le vaste praterie, in mezzo a valli profonde, nelle solitudini più remote. Là rapivano alle madri i pargoletti per educarli in segreto e farne i mariti delle loro figliuole per migliorare la loro progenie; qua erano vecchie filatrici o sordide lavandaie che sbattevano panni con ogni lor forza sul margine di una palude, altrove agili servi che davan opera sollecita ad aiutare i coltivatori nel mietere le biade e raccogliere le messi. Erano umili, sommessi, obbedienti, ma falsi, perfidi, vili, crudeli, ghiottoni, lascivi. Non ignari del futuro erano fatidici e prenunziavano l'avvenire. In greco si chiamava-

ho pigmei (*πυγμαῖοι*) (1), in celtico *fad* (2), in latino *vates* (onde con la semplice permutazione del *v* in *f*, *fata* italiano, *fée* franc., *fairy* ingl.), in teutonico gnomi (*gnomen*). Il dio **Παν** de'Greci (3) e il *Faunus* de'Latini (4) non eran altro che cotesti esseri divinizzati. Il Tagete, che aveva rivelato agli Etruschi i misteri dell'aruspicina era un uomo della statura di un fanciullo venuto fuori a un tratto da un solco di terreno smosso dal vomere dell'aratro (5).

Erodoto inoltre più chiaramente ne fa intendere nel IV delle sue storie, che il dono della conoscenza dell' avvenire era proprio degli Sciti,

(1) Omero nel III° dell'Iliade li fa combattere con le gru sui mari dell'Oceano:

αἵτ᾽ ἐπεὶ οὖν χειμῶνα φύγον, καὶ ἀθέσφατον ὄμβρον,
κλαγγῇ ταίγε πέτονται ἐπ᾽ ὠκεανοῖο ῥοάων,
ἀνδράσι πυγμαίοισι φόνον, καὶ κῆρα φέρουσαι.

Plinio prestando fede alla esistenza di uomini e cose prodigiose, dice che abitassero al di là dei monti da'quali sgorga il Gange. Fama est (egli soggiunge) insidentes arietum caprarumque dorsis, armatos sagittis veris tempore universo agmine ad mare descendere, et ova pullosque eorum alitum consumare: ternis expeditionem eam mensibus confici; aliter futuris gregibus non resisti. Casas eorum luto pennisque et ovorum putaminibus construi. Aristotiles in cavernis Pygmeos tradit. *Hist. Nat.* VII, 2.

(2) *Mém. et docum. publiés par la Societé d'hist. et d'archéolog. de Génève*, t. V, p. 496.

(3) Era il più potente ammaliatore fra tutti gl'Iddii; anche Diana fu vittima de'suoi incantesimi, e cadde nelle braccia di questo amante incantatore.

Munere sic niveo lanæ, si credere dignum est,
Pan, Deus Arcadiæ, captam te, Luna, fefellit,
In nemora alta vocans; nec tu adspernata vocantem.
Virgil. *Georg.* III, 391-93.

(4) . . . . *At Rex (Latinus) sollicitus monstris, oracula Fauni*
Fatidici genitoris adit, lucosque sub alta
Consulit Albulnea: nemorum quæ maxima sacro
Fonte sonat, sævamque exhalat opaca mephitim.
Hinc Italæ gentes, omnisque Ænotria tellus
In dubiis responsa petunt.
Virgil. *Æneid.* VII, 80-87.

E chi era mai cotesto *Faunus*, o *Fatuus*, o *Fatuellus* come pure lo dicevano? — Era figliuolo di Pico, nipote di Saturno, re degli Aborigeni. Antioch. *fragm.* N. 6. — Alexand. Ephesius ap. Aurelium Victorem, *De origine gentis romanæ*, p. 9, ed. Lugd. Batav. 1670. — Virgil. *Æneid.* VII, 48. — Plutarco in *Numa*, XV, 3, e in *Giulio Cesare*, IX, 2.

(5) Uscito fuori a un tratto Tagete dalla terra l'aratore che il vide ne fu sbigottito. Gridò con quanta voce poteva, accorr'uomo, e tutti i Tirreni gli si fecero intorno. Allora Tagete rivelò ad essi i misteri dell'aruspicina, ma avea finito appena di parlare che la vita gli si estinse. Gli Etruschi però aveano udite attentamente le sue parole, e d'allora in poi quella scienza non fu più per essi perduta. Conf. Cicer. *De Divinatione*, 2, 23; Ovid. *Metamorf.* XV, 558; Isid. *Origin.* 8, 9.

e soprattutto de' Neuri e degli Enarei, appartenenti a' Finno-Ugoriani. « Appresso agli Sciti, egli dice, sono molti indovini, i quali vaticinano « con molte verghe di salcio in questo modo. Avendo portato gran fasci « di verghe, postili in terra gli disciolgono, e separamente ponendo cia- « scuna di esse, predicono i destini, e mentre così parlano, tornano ad « unir le verghe e ad una ad una tutte le riuniscono. Questa maniera di « indovinare hanno raccolta dai loro maggiori (1) ». Dalle quali parole di Erodoto è lecito conchiudere, che que'nani, que'pigmei quegli indovini che dappertutto trovavano in Europa le razze ariane che vi si posero a stanza, non eran altro che i popoli aborigeni affini a que'medesimi Finno-Ugoriani che a'tempi del padre della storia viveano nella Scizia; e che ridotti in servitù degli Ariani, erano condannati non solo a' più duri servigi, ma, ciò che tornava più grave ancora, allo spregio ed all'abbominio.

Le razze adunque che gli Ariani trovarono stabilite in Europa erano razze di uomini di mezzana statura, di capello nero e di carnagione brunetta. Aveano le fattezze del volto (a giudicarne da'teschi e dalle medaglie) non spiacenti, il viso largo e quadrato, la fronte ampia e spesso schiacciata per compressione artificiale, gli occhi neri e orizzontali, il naso alto e carnoso. Valida e robusta erane la fibra, benchè le membra fossero piuttosto dilicate. Erano uomini avvezzi a' disagi e alle fatiche corporali, agili, destri, pugnaci, indomabili, ma semplici, rozzi e per nulla esperti nelle arti geniali. Non aveano conoscenza di metalli, ma invece di questi usavano la selce ed altre pietre dure che lavoravano con molta arte e ne formavano arnesi domestici e strumenti per la caccia e per la guerra. Le loro armi erano lance e giavellotti, la cui punta rendevano acuta e micidiale con cuspidi di pietra che s'inserivano in capo al manico o all'asticciuola. Si trovano tuttora ruderi di quelle armi, non meno che degli altri arnesi e strumenti lapidei, in tutti i punti di Europa, e in Italia parimenti ve n' ha dovizia non inferiore a quella di verun altro paese (2). Sapevano altresì manipolare l' argilla e formare

(1) *Melpomene*, cap. IV.

(2) Lanzi, *Saggio di lingua etrusca*, t. II, p. 648. — A. Salvagnoli Marchetti, *Atti della V^a Riunione degli Scienziati Italiani*, p. 264. — Scarabelli, *Annali delle Scienze Naturali*, 3^a Serie, t. III^o. Bologna, 1850. — Rosa, nel *Crepuscolo* di Milano, 1850. — Villa, *Armi antiche trovate nella torba di Bosisio*, nel *Fotografo*, 1856, N. 31. — Cavedoni, *Di un antico [illegible], o sia tumulo sepolcrale di circa XL guerrieri colle loro armi*, *Messaggere di Modena*, 24 dicembre 1856. — Forel, *Notice sur les instrumens en silex et les ossemens trouvés dans les cavernes de Menton*, 1858. —

con essa vasi di varie fogge che rendevano capaci di sostenere un'elevata temperatura, frammischiandovi piccoli cristalli di quarzo.

Benchè ignorassero l'uso del bronzo e del ferro che tra di essi più tardi introdussero gli Ariani, e fors' anche prima di costoro i Fenicî, pure, volendone giudicare dalla lingua basca, sembra che fossero giunti a lavorare la terra, trovandosi in quell' idioma parole che significano arare (*goldatu*) ed (araratro *goldea*). Aveano addomesticato il bue (*idia*), il cavallo (*zaldia*), il cane (*ora*, *zacurra*). È dubbio se l' ariete fosse conosciuto da essi pria del loro contatto con gli Ariani, poichè vi sono parole che darebbero fondamento a sostenere, che in Europa si conoscesse questo animale pria della venuta degli Indo-Europei. Egli è certo però che la ricchezza maggiore del popolo consisteva negli armenti, ed un uomo era di tanto considerato più ricco di un altro, per quanto maggior numero di armenti possedesse. Da questi traeva il latte e la carne, ne filava la lana e ne faceva vestimenta onde coprirsi.

Possedevano case *(echea)*, villaggi *(iria)* e luoghi fortificati *(murrua)*.

Le relazioni fra i sessi erano santificate col ligame del matrimonio; assicurata la protezione e la legittimità della prole, e riconosciuti come sacri i vincoli del parentado.

Templi non ergevano a' loro Iddii, perchè nel basco non vi ha parola che denoti un luogo sacro alla Divinità, ma scarso non era il numero de'loro Numi, e talune iscrizioni singolari rinvenute nel paese di Comminges, a piè de'Pirenei, testè dichiarate dal Cénac Moncaut (1), han fatto

Barone Anca, *Bulletin de la Societé Géologique de France*, 1860. — B. Gastaldi, *Cenni su alcune armi di pietra e di bronzo*, etc. negli *Atti della Società di scienze naturali in Milano*, t. III, 1861. *Nuovi cenni sugli oggetti di alta antichità trovati nelle torbiere e nelle marniere dell' Italia*. Torino, 1862, in 4° con VI tav.—Ponzi, negli *Atti dell' Accademia de' Nuovi Lincei*, Anno XV. Roma 1862. — Strobel, *Die Terramara-Lager der Emilia*, *Erster Bericht*, Zurich, 1863, con III tav.— *Avanzi preromani raccolti nelle Terremare e Palafitte dell' Emilia*, *illustrati popolarmente per cura di* P. Strobel. Parma, 1863, con IV tav. — Nicolucci, *Di alcune armi ed utensili in pietra*, *rinvenuti nelle Province Meridionali dell' Italia* etc., negli *Atti della Società Reale di Napoli. Scienze fisiche e matematiche*, t. I, 1863. Stoppani, *Rapporto sulle ricerche fatte nelle Palafitte del Lago di Varese*; *Atti della società italiana di scienze naturali*, *vol.* V — *Le Stazioni lacuali del Lago di Varese*, *lettera di* A. Angelucci.

(1) *Révue archéologique*, *VIII livrais*. Paris, 1859. — Il Comminges avea per sua antica capitale *Lugdunum Convenarum*, ed ebbe i suoi primi incrementi dagli avanzi della fazione di Sertorio trasportativi da Pompeo, ed ivi ordinati a nuovo consorzio civile sotto il nome di *Convenæ*, da'quali derivò il nome di Comminges. Furono essi uno di que' nove popoli per cui l' Aquitania fu detta *Novempopulonia*.

aperto che gli Iberi, veneravano il Dio Bopienno (1), Sornausi (2) Leherenno (3), Astoilunno (4), Abellione (5), Lixone (6), la Dea Laha (7) ed Artahe (8). I loro sacerdoti erano esperti nel predire il futuro e stornare dagli uomini le avversità, e perciò con altri vocaboli non erano chiamati, se non con quelli di maliardi ed incantatori.

Non credo che eglino formassero un sol popolo, e mi pare anzi non esser lungi del vero congetturando ch'eglino componessero varie nazioni, delle quali non sono giunti a noi tutti i nomi. Sappiamo però che in Italia si dicevano *Liguri* e *Siculi*, in Ispagna *Iberi*, nell'Europa nordica *Finni* e *Jotuni*, nella orientale *Sciti*; vocabolo ariano col quale i Persiani ed i Greci indicavano tutta quella moltitudine di popoli ariani e turaniani, dalla cui miscela ebbe indi origine la numerosissima stirpe degli Slavi attuali.

Tale era il nostro Continente quando vennero ad occuparlo gli Ariani, onde a costoro non ne fu sì facile la conquista come si crede comunemente. Ben molte e molte lotte sostennero gli invasori con gli antichi possessori del suolo, nè tutto ad un tratto l'occuparono, nè in tutte le direzioni si volsero ad un tempo. Egli è probabile (se qualche cosa di probabile può avventurarsi in un'età sì remota) che prima a volgere il passo alla volta di Europa fosse stata la Famiglia Ario-Pelasga, od Italo-Greca (nome comune col quale comprendiamo le stirpi italiche, le greche e l'albanese), la quale parte giunse, traversando l'Armenia, nell'Asia Minore, parte, superati i gioghi del Caucaso e pervenuta in sull'Ellesponto, dopo lunghe peregrinazioni inoltrossi da un lato in Tracia e s'impadronì delle regioni che poscia s'appellarono Macedonia, Tessaglia e Grecia, e tenne dall'altro le contrade che indi si chiamarono Epiro ed Illiria d'onde pe'declivi più facili dell'Alpi orientali discese in Italia (9).

Dopo gli Ario-Pelasghi le tribù celtiche, seguendo le spiagge meridionali del Caspio, varcato il Caucaso e percorse le rive settentrionali del-

(1) *Bopienno;* voce sotterranea, dal basco *baza*, voce, e *pian*, sotto. — Dio Infero.

(2) *Sornausi; zornea*, materia, *osoa*, intera. Dio di tutta la natura.

(3) *Leherenno*; *lehercea*, schiacciare. Dio schiacciatore.

(4) *Astoilunno; asta*, roccia, *lu*, paese; ovvero *astoa*, asino, *illum* delle notti.

(5) *Abellione; Abèie*, greggia, *on*, buono. Dio protettore delle greggi.

(6) *Lixone; lizuma*, impudico, il Fauno de'Latini.

(7) *Laha*; *lachoa*, libera. Dea della libertà.

(8) *Artahe*; *arta*, cura, protezione. Dio protettore.

(9) Nicolucci, *Razze Umane*, I, p. 111

l'Eussino, si allargarono intorno al Danubio, e penetrando lungo le sue sponde nel centro dell'Europa, non posero fine al lor lungo cammino, se non quando ebbero raggiunto i limiti estremi del nostro Continente. Dovunque e' fecero sosta lasciarono tracce del loro passaggio, e molti nomi di contrade, di fiumi, di monti son rimasti tuttora colonne miliarie di quella gran migrazione d'Asia in Europa.

A' Celti seguirono, ma ben più tardi, i Germani e gli Slavi. Entrambe le stirpi soggiornarono per lungo tempo nelle vaste regioni della Scizia asiatica, e non giunsero in Europa che a poco a poco, spintivi incessantemente dalle graduate invasioni de' Tartari. « Quest' ultimo movimento « debbe aver cominciato molto innanzi l'èra nostra, partendo probabil- « mente dalle regioni situate fra il Tanai, il Tiras e l'Ister fino al di là « dell'Emo; perciocchè al tempo di Alessandro la massa de'popoli ger- « manici erasi già inoltrata dal Mar Nero fino al Reno ed al Baltico (1). « I Lituano-Slavi, sparsi più da lungi a settentrione ed a levante, son « venuti dopo trovando l' Europa già occupata in gran parte, e si sono « arrestati nelle regioni del nord-est (2) ».

Non tutta la popolazione indigena abbandonò le contrade ove gli Ariani fissarono dimora. Probabilmente i primi abitatori del suolo furono ridotti all'umile condizione di schiavi e servi della gleba; ma col decorso del tempo vincitori e vinti si strinsero insieme, e le due stirpi n'ebbero modificato i loro tipi originarî. La popolazione attuale dell'Europa è il risultato di quell' antico connubio. Ove il numero degli Ariani fu preponderante il cranio europeo assunse la forma dolicocefala propria di quella Razza, ma dove il sangue ariano fu superato nella misura dal turiano la forma del cranio rimase brachicefala, quale era quella delle popolazioni più antiche del nostro Continente.

Anche il colore de'capelli e degli occhi subì notevoli modificazioni. Io non so se tutti gli Ariani fossero stati originariamente biondi; questo so per pruove non dubbie, che i rami di quella Razza rimasti più puri aveano ed hanno ancora i capelli biondi e gli occhi cilestrini, e che i Celti venuti ultimi in Europa ed i Germani erano distinti per la chioma d'oro e l'azzurro de'loro occhi. So altresì che fra i Greci non erano e non sono neppur rari al presente i flavi capelli e l'iride dal color del mare, e che fra

(1) Grimm, *Geschichte der deutsch. Sprache*, p 803.

(2) Pictet, *Les Origines Indo-Européennes, ou les Aryas primitif*. Paris, 1859, p. 52.

gli Italiani non erano e non sono neppur oggi molto infrequenti il pelo biondo e l'occhio cilestrino. Tali caratteri, così lontani da quella Razza che fu la prima ad abitare la nostra Europa, non si ripetono al certo che dalla influenza degli Ariani, i quali in talune contrade hanno conservato nelle loro discendenze miste anche il colore originario degli occhi e de' capelli, mentre in altre al lor cranio dolicocefalo si è associato il capello e l'occhio nero della razza indigena, benchè non sempre questo colore abbia trionfato completamente, perocchè nella maggior parte dell'Europa il pelo è più castagno che nero, e nell'infanzia presso che biondo.

Non così avvenne degli idiomi indigeni, i quali furono quasi tutti spenti e sostituiti da'sermoni de' nuovi venuti; onde tutto il Continente europeo, tranne poche eccezioni, è dominato da linguaggi ariani che seco loro recarono i varî rami di questa Famiglia che entrarono in Europa. Anche quando il numero degli aborigeni fu superiore a quello degli avveniticci, e il tipo ariano fu assorbito dal turaniano, come nella Scizia, gli idiomi indo-europei sostituirono completamente le lingue native, e gli Slavi, p. es., più turaniani che ariani di sangue, conservano anche oggi il linguaggio che parlava la parte minore del popolo che concorse alla loro composizione etnica attuale.

Non ostante la generale invasione degli Ariani e de'loro idiomi sopra quasi tutta la superficie dell'Europa, alcuni frammenti delle popolazioni primitive seppero difendere la propria indipendenza e serbarsi immuni (in parte almeno) dal connubio di quegli stranieri. Io lascerò di occuparmi e de'Baschi e de'Finni e delle altre genti Uguriane, discendenza diretta di que' primi possessori del suolo europeo, per far ritorno senz'altro a'Liguri d'Italia, che sono anch'essi rappresentanti di quelle antichissime stirpi ante-ariane che, come tutto il rimanente dell'Europa, così avevano tenuto in lor dominio anche l'intera nostra Penisola.

§ 7.

Le conquiste ariane in Italia.

Erano adunque i Liguri quel popolo dell'età della pietra che avea occupato, ne'tempi antestorici, l'Italia, e tranquillamente la possedeva allorchè gl'Italo-Pelasghi ne turbarono la pace e lo scacciarono dalla mag-

gior parte de'suoi possedimenti. Penetrati per la via delle Alpi orientali nel bel paese conquistarono quant' è il terreno fra que'monti ed il Po con vocabolo ligustico chiamato allora *Bodinco*. Parte de' Liguri che ivi abitavano soggiacque alla dominazione degli avveniticci, parte trovò scampo e libertà oltre il Ticino fra quegli altri Liguri indomiti che mantennero pur sempre la loro indipendenza contro le minacce e le prepotenze de' vicini.

Valicato l' Eridano si allargarono con successive conquiste quasi per tutto il paese che ora chiamasi Emilia, Etruria, Umbria e Marche cacciandone i Siculi (Liguri) che dianzi vi abitavano, e che loro opposero un' ostinata resistenza. Molte guerre furono combattute fra gli invasori e gli antichi possessori del suolo, e furono, al dire di Dionigi, le più memorabili che mai si fossero fino allora viste in Italia (1).

Umbri si dissero quegli Italo-Pelasghi che, conquistate tali sedi, vi si posero a stabile dimora (2). E se non ebbero in lor potere tutta la spiag-

(1) *Storie Rom.* I, 16.

(2) Furono gli Umbri la più potente fra le vetuste popolazioni di ceppo italo-pelasgo. L'Umbria antica dilatavasi dalle Alpi fino alla Nera nel cuor dell'Italia. Fra l'Arno e il Tevere toccava le spiagge del mare inferiore, e lungo il mar di sopra estendevasi fin presso al Promontorio del Gargano (Scilace, *Periplo*.—Plinio, III, 14).—Gli Umbri, per concorde testimonianza degli scrittori, erano delle genti più anticamente stabilite sul nostro suolo (Dionigi, I, 19; Plinio, III, 14; Floro, III, 17), e niuno ha mai dubitato della pura italianità della loro stirpe. Piacque al Fréret (*Oeuvres complètes*. Paris, 1796, t. IV) e dopo lui ad altri celtomani, e soprattutto ad Amedeo Thierry, autore di una dotta storia de'Galli (*Histoire des Gaulois*, lib. 1, ch. 1.), considerarli per antichi Celti discesi in Italia fra il 1400 e il 1000 innanzi l' èra cristiana, confortati nella loro opinione da' nomi d' Insubria, Olombria, Vilumbria che ebbero le diverse parti di quel territorio che i Celti occuparono in Italia. Ma qui è da riflettere, che questi nomi celtici (parlo de' prefissi che si aggiunsero all' antica denominazione dell'Umbria) non vennero in uso se non dopo l' invasione gallica di Belloveso che fu posteriore al 150 dalla fondazione di Roma, e che essi altro non possono significare, se non che i Galli aveano divisa l'Umbria conquistata in tre regioni che dissero *Alta*, *Bassa* e *Marittima*. Una splendida confutazione dell' opinione di coloro che tengono gli Umbri di celtica discendenza si ha nell' idioma che gli Umbri favellavano, e del quale rimangono molti avanzi nelle iscrizioni e nelle celebri tavole Eugubine. Da studî recenti fatti intorno a questa e ad altre antiche lingue italiche è dimostrato, che gli antichi sermoni dell'Italia si dividono in due rami principali: l'idioma latino, e l' idioma a cui si sottordinano i dialetti degli Umbri, de' Marsi, de' Volsci e de' Sanniti. Il latino, l'umbro e l'osco non solamente hanno un vocabolario comune, ma anche abbondano di forme grammaticali analoghe. Quest'affinità di linguaggio fra i Latini, gli Umbri e i Sanniti è la pruova più convincente ch' eglino fossero di una medesima stirpe, rami diversi di uno stesso tronco, propagini di una stessa radice. Conf. Lassen, *Beiträge zur Deutung der Eugubinischen Tafeln*. Bonn, 1833 — Kämfp, *Umbricorum Specimen*. Berolini, 1834 — Grotefend, *Rudimenta linguæ umbricæ ex inscription. antiq. enodata*. Hannover, 1835—1839. Lepsius, *Inscriptiones Umbricæ et Oscæ quotquot adhuc repertæ sunt omnes*. Lipsiæ, 1841 — Zeyss, *De substantivorum umbricorum declina-*

gia a mare dall' Arno al Tevere, pur vi posero alcune colonie, vi edificarono borgate e vi ebbero non piccolo dominio. Non discesero più in basso di questi confini, perciocchè nel resto dell'Italia vi si distesero i popoli Latini, e le numerose colonie Sabelliche.

I Latini gittandosi sulla parte occidentale alla sinistra del Tevere s'impadronirono del Lazio (il quale veniva limitato ad oriente dalle montagne de'Sabini e degli Equi, a mezzogiorno da'monti de'Volsci divisi dalla catena principale degli Apennini mediante l'alta valle del Sacco, tributario del Liri), e poscia s'inoltrarono per le pianure della Campania, la quale era da essi abitata pria che vi giugnessero i Greci ed i Sanniti, avvegnachè i nomi italici di *Novla* o *Nola* (città nuova), *Campani*, *Capua*, *Opsci* (operai) sono provatamente più antichi dell'invasione sannitica, e danno sicuro indizio, che allorquando i Greci fondarono Cuma, una schiatta italica e probabilmente latina, gli Ausonî (*Antiqui Ausonii*, Virg. XI, 253), possedevano la Campania (1).

I Sabini tennero invece la parte orientale, e con successive ed ordinate conquiste si dilatarono in quasi tutto il rimanente della Penisola. La tradizione racconta come incalzati dagli Umbri votassero una sacra primavera, cioè giurassero di mandar fuori per fondare in paesi stranieri nuove sedi agli Dei nazionali tutti i figli e le figlie che fossero nate in quell'anno, tosto ch'ei fossero pervenuti in età da ciò. Uno di questi sciami votivi, condotto dal toro di Marte, diè origine alla bellicosa nazione de' Sanniti (2), che prima posero stanza sui monti lungo il fiume Sangro, e di là partendo occuparono in appresso la pianura a levante del Matese fino alle sorgenti del fiume Tiferno. L' esuberante gioventù del Sannio, uscita anch' essa in cerca di nuova patria col rito e colle leggi della sacra primavera, s'inoltrò per la Campania e la Lucania, e quindi nel paese che si disse de' Bruzî e in quel de' Mamertini in Sicilia.

tione. Tilsitt, 1846. Aufrecht u. Kirkhoff, *Die Umbrischen Sprachdenkmäler*. Berlin, 1849-51. — Mommsen, *Die Unteritalianischen Dialekte*. Leipzig, 1850. — Huschke, *Die oskischen und sabellischen Sprachdenkmäler*. Eber., 1856 — *Die Iguvischen Tafeln nebst den kleineren Umbrischen Inscriften .... vollständing übersetz und erklärt*. Leipzig, 1859 — A. Fabretti, *Glossarium Italicum in quo omnia vocabula continentur ex umbricis, sabinis, oscis, volscis, etruscis cæterisque monumentis quae supersunt collecta*, etc. Aug. Taurin. 1858. — Risi, *Dei tentativi fatti per spiegare le antiche lingue italiche*. Milano, 1863.

(1) Mommsen, *Romische Geschichte*, lib. I, cap. 3.

(2) Gellio XI, 1. Vocabulum *multæ* non latinum sed sabinum esse, idque ad suam memoriam mansisse ait (Varro) in lingua Samnitium qui sunt a Sabinis orti. — Varro, *De L. L.* VI. 3. Hoc est a Sabinis orti Samnites tenuerunt.

Da un'altra colonia venuta fuori dalla Sabina e guidata dal picchio sacro a Marte derivarono i Picenti (1), popolo astato che occupò il paese che oggi forma la Marca d'Ancona. Una terza, sotto le insegne di un lupo (*hirpus*), fermò stanza nel paese di Benevento e prese il nome di Irpini (2). Dalla Sabina parimenti e da Reate uscirono gli Aborigeni, invasori del Lazio, che soprapponendosi agli antichi Latini (Casci o Prisci Latini (3), Rutuli, Aurunci (4)) ed a' Siculi che ancora vi duravano, divennero il nucleo di quel nuovo popolo latino che fu dominatore dell' Italia e del Mondo (5). Dalla Sabina finalmente trassero la loro origine gli Equi (6), gli Ernici (7), i Volsci (8) e le tribù Sabelliche de' Pretuziani presso Teramo, de' Vestini a piè del Gran Sasso, de' Marruccini presso Chieti, dei Marsi intorno al lago Fucino, de' Frentani sul confine della Puglia (9).

(1) Orti sunt (Picentini) a Sabinis voto vere sacro. Plin. III, 13.— Strab. V. Festo, *Picena regio*.

(2) Ἑξῆς δ' εἰσιν Ἱρπῖνοι, καίτοι Σαυνῖται τοὔνομα δ' ἔσχον ἀπὸ τοῦ ἡγησαμένου λύκου τῆς ἀποικίας· ἵρπον γὰρ καλοῦσιν οἱ Σαυνῖται τὸν λύκον. Strab. VI. — Irpini appellati nomine lupi quem *hirpum* dicunt Samnites; eum enim ducem secuti agros occupavere. Paolo e Festo, p. 106. — Serv. *in Æneid*. VII, 785.

(3) Cascum significat vetus: ejus origo sabina, quæ usque radicem in oscam linguam egit. Varro *de L. L.* VI, 3. « Questa voce, osserva il Micali, vive ancora nel vernacolo della Sabina e dell'Umbria, e noi pure Toscani diciamo *accasciare*, *accasciato*, etc., equivalente al senso primitivo ». *Storia degli ant. pop. ital.*, cap. X, nota 17.—Ennio, *Fragm.*—Cicer., *Tuscul.*, I, 12.— Virgil. V, 598, XII, 823.— Lucano, II, 432, e Paolo ex Festo, il quale lasciò scritto: Prisci Latini proprie appellati sunt ii qui prius quam conderetur Roma fuerunt.

(4) I Rutuli si dissero da Virgilio consanguinei a' Latini (consanguinei Rutuli, XII, 40) e si attenevano per origine agli antichi Aurunci che a lor volta erano imparentati a' Latini.

Aurunci Rutulique serunt, et vomere duro
Exercent colles, atque eorum asperrima pascunt.
Æneid., XI, 318-9.

(5) Varrone chiama Aborigeni i Sabini che da Reate discesero nel Lazio, ove per la loro mescolanza con quella porzione di Siculi che non seguitarono i fuggiaschi, e sì ancora con Rutuli, Casci Latini ed Aurunci, venne a formarsi un solo e nuovo popolo unito col nome di Latini.—Aborigenes ex agro Reatino qui adpellatur Palatium ibi consederunt. Tito Livio, IV, 8.

(6) Il nome di una loro borgata *Trebia* o *Trebula* trovasi più volte ripetuta nella Sabina e nell'Umbria.

(7) Quidam dux magnus Sabinos de suis locis elicuit, et habitare secum fecit saxosis in montibus. Unde dicta sunt *Hernica loca* et *populi hernici*. Serv. *ad Æneid*. VII, 684.

(8) Catone non dubitava della loro origine sabinica, e li credeva discesi da quegli Aborigeni che erano partiti dalla Reatina Tempe. Agrum quem Volsci habuerunt, plerus Aborigenum fuit. Cato *ap. Priscianum*, V, p. 668, ed. Putsch.

(9) Erano posti in mezzo fra i Sabini e i Sanniti, e questo solo, in difetto d'altre pruove, basterebbe a dimostrare la loro origine comune; ma i Marsi si dicevano dagli antichi congiunti con gli

Come ne fanno fede le tradizioni, presso tutti questi popoli si mantenne sempre vivo il sentimento della loro consanguineità e della loro origine comune dal ceppo Umbro-Sabellico.

Non si sa se i Latini ed i Sabini facessero parte di quegli Umbri che più si spinsero nel cuore dell'Italia, o se la loro venuta fosse stata anteriore a quella degli Umbri stessi, ed avesse dischiusa la via alla grande invasione umbrica che tenne lor dietro. Egli è certo però che essi eraso riputati antichissimi (1), e le tradizioni locali confondendoli co'primi possessori del suolo (o Liguri o Siculi di stirpe ligustica) li chiamavano Aborigeni, autotoni, genarchi (2), e da Virgilio, grande indagatore delle patrie memorie, si dicevano nati dai tronchi e dalle querce:

Gens virum truncis et duro robore nata:
Quis neque mos, neque cultus erat; nec jungere tauros,
Aut componere opes norant, aut parcere parto:
Sed rami, atque asper victu venenatus alebat (3).

Altri Ario-Pelasghi (Elleno-Pelasghi) aveano popolato, scacciandone anche i Liguri, la Japigia e la Messapia, non meno che la Lucania e la Bruzia; ma i Sanniti li respinsero al di là delle colline orientali del Sannio e della Lucania, e li confinarono in quell' angusta e lunga falda di terra che si distende dal versante meridionale del Gargano fino al capo di Leuca.

La venuta di quegli Elleno-Pelasghi nella bassa Italia era stata anteriore a quella delle colonie Umbro-Sabelliche, perciocchè la storia primitiva che ci ha conservato notizie della occupazione fatta da' Sanniti della Lucania e della Bruzia, non ricorda punto l'arrivo di quelle gen-

Ernici, sabini. Hernici dicti sunt a saxis quæ Marsi *herne* dicunt. *Festo ad v.* I Marruccini erano da Catone congiunti co'Marsi (ap. Priscianum IX); i Peligni chiamavano i Sabini avi loro:

Et tibi comproavis, miles Peligne, Sabinis
Convenit.

Ovid. *Fast.* III, 95.

I Vestini non erano meno affini di tutti gli altri per parentado a'Sabini. Enn. *Fragm.* p. 150. — Juven. XV, 180-1; e non men de'Vestini i Frentani, i quali traevano la loro origine da' Sanniti: φρενταvοί Σαννιτικὸν ἔθνος. Strab. V.— Scilace, Periplo, p. 5.

(1) Ε῎στι δε καὶ παλαιοτατον γενος, οἱ Σαβινοι καὶ αὐτόχθονες. Strab. lib. V

(2) Dionisio, I, 36.— Quintilian. III, 7.

(3) *Æneid.* VIII, 315-18.

ti, e le considera invece come aborigene dell'Italia inferiore. Il loro antico dominio sulle terre de' Bruzî e de' Lucani è attestato non solo dall'autorità di Eforo Cumano, il quale chiama Crotone una città Japigia (1), ma dallo stesso nome di Ἰαπύγων ἄκραι τρεῖς che rimase a quel tratto di spiaggia a mezzogiorno di Crotone. Oltracchè è noto che i Bruzî erano per metà greci e parlavano l' osco o sannitico ed il greco, e questo loro ellenismo non era certamente da attribuirsi alle relazioni che essi avevano colle colonie greche della Bruzia, ma dalla loro origine elleno-barbara, che rendevali atti ed inclinati ad ellenizzarsi.

I Messapî nel loro angolo poco importante rimasero fedelmente attaccati alle usanze ed alla lingua de'loro antenati, e tramandarono alla posterità, nelle loro iscrizioni, i documenti del lor dialetto indigeno. Peculiari circostanze impedirono il corso dello svolgimento civile di questo popolo, ond'esso rimase rozzo per più lungo tempo di tutti gli altri aborigeni affini, i quali dallo stato elleno-barbaro immediatamente, e senz'altra esterna influenza si romanizzarono.

Queste prime immigrazioni degli Elleno-Pelasghi nella Penisola nostra schiusero la via alle successive colonie greche che si sparsero sulle coste della bassa Italia e della Sicilia, ove tal numero di coloni e tanta civiltà e dovizie accumularono, che quella parte del bel paese occupata da'Greci d'ogni stirpe fu chiamata *Magna Grecia*, come quella che conteneva la parte migliore e più nobile e più ricca di tutta la Grecia. Quelle colonie in effetti nacquero povere ed umili, ma giovate dalla feracità del terreno, dalla dolcezza del clima, dalla frequenza del popolo, dalla vivacità de'commerci marittimi e terrestri avanzarono presto di potenza e di splendore ogni paese vicino e lontano, ed il loro nome divenne così illustre che bene a ragione i Greci si gloriavano del lor dominio in queste nestre felici contrade (2).

Parte scacciati dal continente dell'Italia, parte (ed erano i più) ridotti in servaggio, non rimaneva in assoluto dominio de' Liguri se non la costiera marina dal Varo all'Arno. Entro terra si allargavano fino al Ticino ed al Po ove mette foce la Trebbia, e con incerti limiti fino al corso superiore della Secchia. Di quivi gli Umbri non avevano potuto mai snidarli, perocchè i Liguri tenner sempre fermo e vi si difesero valorosamente. Ma

(1) Strabone, VI, 1, 12.

(2) Ipsi de ea (Italia) judicavere Græci, genus in gloriam suam effusissimum, quotam partem ex ea appellando Græciam Magnam. Plinio, III, 5.

nuovi stuoli di popoli venuti dalla Lidia o dalla Meonia, o da tale o tal altro punto delle coste dell'Asia Minore, approdarono in sui paesi fra il Tevere e l'Arno, e furono il seme di que'famosi Tirreni, Raseni, Tuschi, Etruschi, i quali acquistarono sommo impero in Italia pria che dagli umili casolari del Settimonzio sorgesse la città che divenne la più illustre e la più gloriosa fra quante mai ne abbia illuminate il sole (1).

Commisti ed uniti agli indigeni (2) (Liguri ed Umbri) bentosto crebbero in potenza, e cominciarono a dilatare i loro confini. Ai Liguri oltre l'Arno tolsero la spiaggia fino alla Magra, presso alla quale edificarono Luni, ch'indi divenne col suo porto l'emporio più grande della nazione. Al di là dell'Apennino si gittarono sulle vaste pianure che il Po dipartisce, togliendole agli Umbri, e respingendo i Liguri dalla Secchia fin verso la Trebbia, fondandovi una nuova Etruria che si disse *Circumpadana*, la quale si diramò fin dentro le Alpi, e vi annodò relazioni con popoli del settentrione. Verso il mezzodì, varcato il Tevere, ridussero in lor potere Volsci e Fidenati, e a poco a poco la terra campana fino al Silaro fondandovi una terza Tuscia non men delle altre doviziosa e potente.

Più avventurosi furono i Liguri dal lato delle Alpi che non piegarono dinanzi a'Galli, nè patirono devastatrici incursioni da que'barbari. « Fino

(1) Tale è l'origine che l'antichità quasi unanime attribuiva agli Etruschi. Lo storico Dionigi l'impugnava provando che nella religione, nelle leggi, ne'costumi e nella lingua tra Lidî ed Etruschi non correva veruna analogia. Parecchi scrittori moderni, poggiandosi sull'autorità dell'[illegible], sostengono a loro volta la patria de'Tusci essere stata nella parte nord-orientale dell'Italia. Credono ch'ei sieno giunti nella Penisola dalla parte di terra (mossi probabilmente di Germania) valicando le Alpi retiche, poichè i coloni più antichi stanziati nel paese de'Grigioni e nel Tirolo, i Reti, parlarono la lingua etrusca fino ai tempi storici. Ma noi sappiamo da autorità degne di fede, che gli Etruschi non venner già dalla Rezia in Italia, ma sibbene ripararono su que'montani gioghi all'arrivo de'Galli che li spodestarono delle terre cisalpine (Rhætos, Tuscorum prolem, arbitrantur a Gallis pulsos, duce Rhæto. Plin. H. N. III. 20); che dall'Etruria propria, fra il Tevere e l'Arno, si allargarono intorno al Po, scacciande gli Umbri a'quali tolsero 300 vuoi città o borgate (Trecenta eorum oppida Tuscos debellasse reperiuntur. Plinio, III, 14); che tutte le loro città più antiche erano nella parte occidentale della Penisola, e Pisa e Tarquinia anzi erano città littorane; e che se gli Etruschi per la fondazione di altre città scelsero di preferenza luoghi interni e montani, io credo che ciò debba riferirsi a tre cagioni principali; la prima per la facilità della loro difesa; la seconda per essere al sicuro di un colpo di mano de'pirati fenicî e greci che corseggiavano pel mediterraneo; la terza perchè la costiera marina fra l'Arno e il Tevere era insalubre, e non atta a [illegible] che potessero prosperarvi. Un'ampia confutazione di tali dottrine [illegible] *Dei Tentativi fatti per spiegare le antiche lingue italiche*, capit. IV pag. 145-148.

(2) . . . . *Junctosque a sanguine avorum*
Mæonios Italis permixta stirpe colonum.
Silio Ital. IV, 722.

« ad Aosta (cito qui le parole di uno storico insigne) gli antichi abitanti « tenner fermo contro i Galli. I Salassi, i Taurini ed altri eran Liguri, e « i popoli a piè del Gottardo erano Etruschi; i Reti, i Camuni, i Leponzî, « gli Stoni, etc. stettero forti sui loro territorî quasi isole in mezzo ai Galli « che inondavano il paese a guisa di flutto. I Liguri erano un popolo « guerriero quant'altri, e mantennero il posto loro da ambe le parti del- « l'Alpi. Quindi la Gallia Cisalpina occupa soverchio spazio nelle nostre « carte geografiche del Mondo antico. I Galli non ebbero mai un palmo « di terreno di ciò che ai dì nostri appartiene al Piemonte (1) ».

Ma l'asserzione del dotto Niebbur non va presa in senso molto assoluto, perciocchè se i Galli non penetrarono fra i Liguri per conquista e per subite irruzioni, a grado a grado e lentamente pur vi si intrusero, e ne abbiamo tuttavia la pruova in que' frammenti della loro stirpe che occupano anch'oggi il sommo di quasi tutte le nostre valli alpine, a' piedi del Monte Bianco e del Monte Rosa, lungo i passi del Gottardo e del Sempione, in Valsesia, Val d'Aosta e Val d'Ossola (2). Ne abbiamo la pruova altresì in molti nomi locali celtici del Piemonte e della Liguria (ved. pag. 14), ne' tanti gallicismi de' vernacoli subalpini così bene studiati dal Biondelli (3), e, ciò che più importa al caso nostro, nel color biondo de' capelli e nell' occhio cilestrino di molta parte de' nostri Piemontesi.

Vi è stata perciò e vi è tuttora non dubbia immistione di sangue gallico ne' Liguri subalpini, ma a differenza di quanto avvenne in tutta Italia in cui al tipo ligustico fu sostituito interamente l'Italo-Pelasgo, presso i Piemontesi il tipo celtico fu assorbito quasi allo intutto dal Ligure predominante, e della mischianza delle stirpi non rimangono altre tracce che il biondo capello e l'occhio grigio-azzurro, che non si vedono infrequenti in mezzo all'occhio ed alla chioma nera della maggior parte della popolazione subalpina. Queste tracce si mostrano anche qua e là nelle altre Provincie Italiane, e dov' elle esistono ci ricordano o la presenza di sangue celtico o teutonico, o il primitivo carattere persistente della stirpe Italo-Pelasga, priachè il contatto de' Liguri non ne avesse modificato il colore delle carni, degli occhi e de' capelli.

(1) Niebbur, *Storia Romana*, t. I.
(2) Gallenga, *Op. cit.* I, 76.
(3) *Saggio de' Dialetti Gallo-italici*. Milano, 1853.

§ 8.

Esame dell' opinione se i Liguri sieno discendenti da' Libî africani.

Il tipo ligure che oggi vediamo ristretto nelle sole Province ligustiche e piemontesi, che pria degli Etruschi si estendeva lungo la spiaggia a mare fino al Tevere e dentro terra fino al Ticino, al Po ed al Panaro, e che pria della venuta delle stirpi Italo-Pelasghe e dell'approdo di coloni ellenici si allargava per tutta la Penisola; quel tipo distinto particolarmente per la speciale conformazione del cranio corto, largo, brachicefalo, e che avea con varî nomi popolato in antico tutta l'Europa; quel tipo sì diverso dall'Italo-Pelasgo e dagli altri della Famiglia Indo-Europea, e che noi abbiamo collocato accanto a quello delle schiatte Finno-Ugoriane; quel tipo, a giudizio di alcuni, non deve cercarsi nel settentrione o nell'oriente dell'Europa, ma sì nell'Africa boreale, fra gli abitanti indigeni del vecchio Atlante, fra que'Berberi (dicon essi) che, passato lo stretto gaditano, popolarono la Spagna e la Francia australe, non men che l'ampio littorale che Italia stende innanzi al Mare Inferiore. È un sangue semitico che scorre nelle vene del Ligure, e il suo colore, i suoi capelli, la sua fisonomia sono altrettante pruove ch'eglino adducono a sostegno della loro opinione.

Cotali ragioni sembrano a prima vista molto speciose, ma io non istarò a vagliarle sottilmente, perocchè esse trovano un' ampia confutazione nelle cose discorse nelle pagine antecedenti. Richiamerò soltanto l' attenzione del lettore sugli argomenti storici ed antropologici sui quali appoggiano la loro opinione i fautori della derivazione libica de'nostri Liguri, e dall'esame di essi egli vedrà su quanto poco fondamento di vero riposino quelle congetture.

Giovanni Villani, scrittore fiorentino del secolo XIV ed autore di una storia della sua patria, fu il primo che parlasse di un Re Atalante che abitava in Africa giù dal ponente quasi di contro alla Spagna. Narra come venisse in Toscana ove fondò Fiesole, la prima città che fosse nella terza parte del mondo chiamata Europa che era tutta disabitata di gente umana; come egli avesse tre figliuoli, e come da uno di essi chiamato Ita-

lo, che restò in paese, fosse stato imposto il nome all'Italia (1). Ser Giovanni Fiorentino scrisse le stesse cose di quelle origini, e pare che quei buoni Toscani si appagassero di coteste fiabe, e le tenessero in conto di verità dimostrate. E veramente non parvero strane neppure allo Scaligero, il quale ne' suoi Commentarî a Teofrasto, benchè con modi assai triviali, così si espresse: *Sic Genuenses, cum a Mauris progenitoribus accepissent olim morem ut infantibus recens natis tempora comprimerentur*, *nunc absque ullo compressu, Thersitico et capite et animo nascuntur* (2).

Non dispiacque questa opinione al celebre dottor J. C. Prichard, come non era neppur dispiaciuta all' illustre G. D. Romagnosi (3), ma ei non seppe avvalorarla di alcuna pruova, e gli parve poter essere accettabile sol perchè non trovava ne'Liguri affinità con altri popoli di Europa, e li vedeva distinti da' Celti e dalle altre nazioni continentali (4). Si confortava in questa sua congettura dal fatto narrato da Tucidide, che gli Iberi (intendi i Sicani) erano stati discacciati da parte del littorale ispanico che essi abitavano da' Liguri che se ne impossessarono (5); fatto che venne più chiaramente narrato da Stefano Bizantino, il quale soggiunse che i Liguri, nativi della catena de'monti a' piè de'quali scorre la Guadiana (6), scacciati da'Celti conquistatori, si gittarono sulla costa d'onde espulsero i Sicani, e vi si distesero dal fiume Ter, in Ispagna, fino all'Arno, in Italia, abbracciando in una gran zona circolare il gran golfo che indi portò il loro nome (7).

Più tardi appoggiò quell' opinione, accettata eziandio dall' Homalius

(1) *Storie Fiorentine*, lib. I, c. 3.

(2) *Comm. ad Theophrastum*. Lugd. Batav. 1566, lib. V.

(3) *Esame dell'Istoria degli antichi pop. ital. del Micali, in relazione a' primordi dell'italico incivilim.*— Bibliot. Ital. marzo, aprile e maggio, 1833.

(4) *Researches*, etc., II, p. 38.— « It seems very probable, that the Ligurians were an African people, for we have no proof of their affinity to any of the nations of Europe, and the are generally distinguished from the Celtic and others continental nations ».

(5) Σικανοὶ ἀπο τοῦ Σικανοῦ ποταμοῦ τοῦ εν Ἰβηρία ὑπὸ Λιγύων ἀναστάντες. Lib. VI, c. 2.

(6) Λιγυστινή, πόλις Λιγύων, τῆς δυτικῆς Ἰβηρίας ἐγγὺς, καὶ της Ταρτησσοῦ πλησίον. Stef. Byzant.

(7) « . . . . . . *Celtarum manu*
Crebrisque dudum prœliis
Ligures pulsi, ut sæpe fors aliquos agit,
Venere in ista quæ per horrenteis tenent
Plerumque dumos.
Festo Avieno, *Ora maritt.* v. 132 e seg

d'Halloy (1), con argomenti più speciosi che veri, il Bory de St. Vincent, al quale non sembrando acconcia l' Africa ad essere la sede originaria delle popolazioni ligustiche (ed anche celtiche), parve ragionevole che la sommersa Atlantide avesse alimentato i progenitori de' Liguri, dei Celti, e de'Berbèri, e che quell'Isola famosa, cui l'immaginazion di Platone avea collocato al di là delle colonne di Ercole fra l'Africa e l'Europa, fosse stata la culla de' popoli occidentali dell'uno e dell'altro continente. Assicura nel Berbèro esser l'angolo facciale identico al francese, identica la spessezza del cranio non meno che le proporzioni del teschio, la proeminenza degli archi sopraciliari, la forte depressione della radice del naso ed il rilievo presso a poco rettilineo del suo profilo (2).

Il barone di Belloguet trova dippiù i nostri Liguri aver comuni coi Libî e co'Numidi l'agilità della persona, la persistenza nel lavoro, la tenacità de'propositi, la piccolezza del corpo, l'adusta complessione, e conchiude dalle sue investigazioni: « sembrargli i Liguri di origine proba-« bilmente africana, ed essere della stessa famiglia de'Getuli e dei Nu-« midi, vale a dire della gran Razza Berbèra distesa ancor oggi sopra tutto « il settentrione dell'Africa (3) ».

Imperò dalle addotte ragioni non si trae argomento a poterle ritenere almanco probabili, se non si creda essere bastevole quella sola della vicinanza dell'Africa alla Spagna che poteva rendere agevole la migrazione dall'uno nell'altro Continente a traverso lo stretto di Gibilterra. Ma, a dir vero, di questa ragione io ho per fermo niuno potersi intieramente appagare, imperciocchè la vicinanza di due Continenti divisi dal mare non suppone che il popolo dell'uno abbia dovuto necessariamente popolar l'altro, quando soprattutto l'arte del navigare non era conosciuta, nè forse erasi ancora inventato il canoto che servì il primo a traghettare sulle acque. Ma anche ammesso che cotesto fosse stato l' ordine delle cose, io non potrei accettarlo nè pei Liguri, nè per l'Europa intera, poichè me ne farebbero schivi i caratteri craniali de'nativi dell'Atlante che sono affatto diversi da que'che son proprî e de'Liguri e degli altri popoli europei, tantoppiù che i cranî berbèri, come si raccoglie degli avanzi rinvenuti nelle necropoli delle Isole Canarie popolate eziandio da stirpe

(1) *Des Races humaines*, 1845, p. 62.

(2) *Mêmoire sur l'Anthropolog. de l'Afrique française;* nel *Magasin d' Anatomie et de Zoologie comparées*, 1845.

(3) *Ethnogênie gauloise*, *Types Gaulois et Celto-Bretons*, p. 310.

libica, non hanno punto mutato da quel ch'essi erano ne'tempi più remoti. Sono sempre que'cranî lunghi, stretti, ovali, dolicocefali, spesso prognati, con fronte bassa e schiacciata, con predominio della metà posteriore del cranio sull' anteriore, con la forma della calvaria tutta lor propria, la quale ascendendo gradatamente dalla fronte verso la parte posteriore del capo si rigonfia e divien gibbosa ed elevata al di sopra dell'occipite fornito di notevole proeminenza.

Onde rendermi sempreppiù certo della vera forma craniale de' Cabili o Berbèri, dubitando poter essere indotto in errore dalle osservazioni da me fatte sopra que'cranî, ed anche dalle diverse figure che erano passate sotto i miei occhi, chiesi all'egregio Prof. Gaddi, di Modena, le misure de' teschi Cabili conservati nel Gabinetto Anatomico di quella Università, ed ora son lieto di poter riferire qui sotto le medesime parole di quel mio distinto amico.

« Vengo ora a rispondere a' quesiti che Ella mi fa, e che si riferiscono a'cranî berbèri o kabili o kabaili ch'io possiedo, e che formano parte della raccolta craniologica da me fatta pel patrio Museo di Anatomia. Sono questi in numero di tre, due naturali che mi vennero regalati dal sig. Carlo Garavini, di Vignola presso Modena, ed uno formato in gesso che ebbi da Parigi unitamente alla copia pure in gesso di altri teschi. Quest' ultimo non è propriamente il solo cranio, ma la testa intiera rivestita delle sue parti molli, e coi capelli presso che rasi.

« Ho praticato la misurazione de'diametri all'esterna superficie, senza tener conto della grossezza delle pareti ossee craniane. Nel modello in gesso v' è compresa nella misurazione la grossezza eziandio de' comuni integumenti.

« Il diametro antero-posteriore è preso in tutti dal tubercolo occipitale alla parte media frontale sopra la radice del naso. Il bi-parietale o trasversale fra i punti più sporgenti delle gobbe parietali. Il verticale dal lembo anteriore del grande foro occipitale al vertice.

« La misurazione dell'angolo facciale è fatta giusta le regole del Camper, e l'esterna ispezione della forma del cranio giusta quelle del Blumenbach.

« Il primo cranio è d'individuo adulto maschio, ed offre queste dimensioni.

Diametro antero-posteriore. . . .	millim.	182
— bi-parietale	»	143
— verticale	»	150

Presenta la forma ovale allungata, ed un angolo facciale di 73.°, pei quali fatti lo direi *dolicocefalo prognato.*

« Il secondo è d'individuo femineo adulto, e presenta la particolarità di una depressione tutt'attorno in corrispondenza alle suture fronto-parietali. La misurazione dà questi risultamenti.

Diametro antero-posteriore. . . .		millim.	175
—	bi-parietale	»	128
—	verticale	»	125

« La forma del cranio è ovale allungata, e l'angolo facciale di 85°. Sarei indotto a classificare questo cranio come *dolicocefalo ortognato.*

« La testa formata in gesso mi ha dato queste misure, che comprendono ancora lo spessore delle parti molli.

Diametro antero-posteriore. . . .		millim.	195
—	bi-parietale	»	153
—	verticale	»	185

« La forma del cranio è ovale e l'angolo facciale di 70°, ond'io direi questo cranio *dolicocefalo prognato* ».

Aggiungerò per ulteriore chiarezza le misure di tre altri teschi libici desumendole dal *Catalogus Craniorum diversarum gentium* del sig. Van der Hoeven.

« N.° 59. Cranium juvenis viri Cabyli e regione montium Atlantis Minoris.

« Cranium ovale, fronte globosa. Occiput supra gibbum.

Diametro antero-posteriore. . . .		»	184
—	trasversale.	»	134
—	verticale	»	147

« N.° 60 Cranium feminæ ex eadem Cabylorum gente.

« Cranium ovale. Os frontis præsertim media parte gibbum. Pars posterior ossium parietalium ad occiput reclinata. Facies prognata.

Diametro antero-posteriore. . . .	millim.	166
— bi-parietale	»	133
— verticale		138

Altri quattro cranî berbèri del Monte Atlante posseduti dal sig. J. B. Davis presentano le seguenti proporzioni ch' io m' ebbi misurate dalla gentilezza del loro possessore.

	1.	2.	3.	4.
Diametro antero-posteriore	174	174	182	181
— bi-parietale	130	133	133	133
— verticale	127	133	140	133

Riassumendo le misure di tutti questi cranî berbèri (senza tener conto delle misurazioni fatte sulla testa modellata in gesso con tutte le parti molli) si ottengono le medie;

pel diametro antero-posteriore di	177	millim.
— bi-parietale di	133	»
per l'altezza verticale di	136	»

Onde la proporzione tra la larghezza e la lunghezza in questi cranî è di 75,14 : 100, mentre ne' cranî liguri è di 86,74.

Nè minor distacco si osserva tra i cranî ligustici, e que' de' Guanchi delle Isole Canarie, i quali si credono imparentati a' Libî, benchè nell'insieme della loro forma il tipo accenni a qualche differenza fra le due genti. Dalle misure di ventidue cranî guanchi ottenuti da' sepolcreti dell' Isola di Teneriffa ed or conservati nella collezione del prelodato sig. Davis, si rileva parimenti che il diametro fronte-occipitale raggiunge in media i 175 millim. e il bi-parietale i 137 millim., di guisa che l' indice cefalico di questi cranî, o la proporzione media tra la larghezza e la lunghezza, considerata come 100 non è maggiore di 78,63.

Da tali descrizioni e misure egli è agevole il conchiudere quanto distino fra loro i cranî liguri da' berbèri, e quanta in conseguenza sia la differenza fra i nativi della Liguria e gli abitanti indigeni dell'Africa set-

tentrionale. Questa differenza aggiunta all'altra degli idiomi assolutamente diversi ed appartenenti a due famiglie glossologiche distinte è la più stringente confutazione di quella opinione che fa derivare gli Iberi ed i Liguri dal Continente Africano, e popolare dalla stirpe libica la Spagna, l'Italia e il mezzogiorno della Francia (1).

CONCHIUSIONE

Le considerazioni che precedono ci riconducono spontaneamente alla dottrina che noi siamo venuti fin qui rischiarando con argomenti desunti dalla storia, dalla linguistica, dalla craniologia, e danno maggior conferma alle nostre asserzioni: essere i Liguri un frammento superstite di quelle stirpi antichissime che abitavano l' Europa ne' tempi antestorici pria della venuta degli Ariani; stirpi che si ricongiungono altresì, per la forma del cranio, con quelle altre schiatte dell'Europa che noi chiamiamo *Finno-Ugoriane*, o con vocabolo più generale e meglio accolto *Turaniane*. Pria di por termine alla presente Dissertazione credo necessario di chiarire il significato di quest'ultima parola, e precisare il senso in che essa è stata da me adoperata.

Il vocabolo *Turaniano* non è molto antico, e si legge la prima volta nello *Shah-Nameh* di Firduzi (2) che scrisse la sua Epopea nel X-XI secolo dopo G. C. Il celebre poeta usò quel nome in un senso mitico, indicando con esso tutte le stirpi non ariane, straniere o barbare (come avrebbero detto i Greci), ma più particolarmente le nazioni che abitavano la Scizia, regione immensa che ne'vetusti tempi si allargava al nord-ovest dell'Iran per l' occidente asiatico e l' oriente di Europa. Più tardi con quella espressione si vollero intesi *coloro che non credevano*, e fu applicata a' popoli che non seguivano la religione di Zoroastre (3), onde

(1) « Les Iberes appartenant à la famille des Berbères d'Afrique, au dire de certains auteurs, auraient passé le détroit de Gibraltar vers l'an 2000 avant notre ère pour s'établir en Espagne et dans le midi de la France » (!!). Gosse, *Essai sur les déformations artificielles du crâne*, pag. 143.

(2) « A Selim assegnò Feridum Rum e Khaver; a Tur, Turan, e ad Irij, Iran o la Persia ». *The Shah-Nameh of Firdousi, trad. Atkinson*. London, 1832, p. 50, 161-2, 519 nota.

(3) « Iran aut Ilan est Persia culturi zoroastrico addicta, orthodoxa; Andran s. Anilân sunt provinciæ extraneæ, Sassanidarum imperio subiectæ, quæ quoque nomine Turan, i. e. Transoxana a scriptoribus orientalibus appellantur, quarum incolæ ab ignicolis vel hæretici, vel irreligiosi habiti sunt ». Tychsen, *de cuneatis Inscriptionibus Persepolitanis lucubratio*. Rostock, 1798, p. 41, nota.

nello Zend-Avesta e nel Boun-dehesch-Pehlvi (1) onori e vittorie sono predette all'*Eeriené Veedjo*, il *Puro Iran*, e sciagure e disfatte al popolo di *Turan*. In modo assai più vago, in tempi più recenti, la voce Turan ha servito ad indicare ora etnicamente popoli Aniraniani, cioè non Persiani, ora geograficamente le contrade dell' occidente, ora, secondo lo spirito di una setta religiosa, i popoli che non credevano alla fede da essa professata. Allorchè il Sole era adorato in tutta la Persia, e il fuoco sacro bruciava nell' Iran, erano figli di Tur tutti coloro che non erano Persiani, nè seguaci di Zoroastre. Di poi, mutato il culto dell'astro maggiore in quello dell'Islam, gli stessi Persiani divennero Turaniani, e non rimasero puri Ariani che gli ignicoli Parsi, che pretendevano essere i soli e puri discendenti de' Zoroastridi antichi. Ora la voce Turan è generalmente adoperata in un senso molto lato. D' ordinario s' intendono con essa i popoli Finno-Mongollici, e in questo senso è adottata altresì da' filologi che sotto il nome di *lingue turaniane* comprendono tutti gli idiomi parlati in Asia ed in Europa non compresi nelle Famiglie Ariana e Semitica, ad eccezione del cinese e suoi dialetti (2).

Servendomi del vocalo *turaniano* io ho inteso di usarlo nel suo senso primitivo, nel senso etnologico come fu adoperato dal Firduzi, ed intendo con essa appellazione i popoli che gli antichi chiamarono Sciti, e che molti anche oggi continuano a chiamar tali, e che altri appellano Finni, Finno-Altaici, Finno-Ugoriani, o Finno-Uraliani. Sotto cotesta denominazione di *Turaniani* io comprendo adunque quelle popolazioni che nelle mie « *Razze Umane* » chiamai Finno-Ugoriane (3) (espressione di cui mi sono servito anche sovente in queste pagine), ed alle quali aggiungo i Turchi Osmanlini che, secondo già dissi innanzi, mi sembrano essere i discendenti di quegli Unni Eftaliti che dalla Transossiana passarono co'Seldjucidi nel secolo X in Persia, e dalla Persia vennero alla conquista delle Province bizantine del Bosforo e dell'Asia minore.

È sotto questa categoria medesima che io riunisco non pure gli Iberi ed i Liguri, ma tutte le altre popolazioni ante-storiche dell' Europa, le quali precedettero gli Ariani nel nostro Continente, e lo tennero in loro

(1) Anquetil du Perron, *Zend-Avesta*. Paris, 1771. I. P. 1. p. 16.-20.-26, II, 348 e seg.

(2) Il Max Muller (*On te science of language*) deriva la voce *turaniano* da *Tura*, che indica la rapidità de' cavalieri. Egli applica questo nome alle razze nomadi dell' Asia, come opposte alle agricole o razze Ariane.

(3) *Razze Umane*, II, p. 12-32.

dominio per tutta quella grand' epoca la quale va distinta col nome di *epoca della pietra*.

A molti sembrerà per lo meno strano cotesto ravvicinamento; e parrà, io mi penso, singolare che i Liguri abbiano nelle vene loro quel medesimo sangue che scorre ne' Finni, negli Ungheresi, nei Turchi di Europa ed in altri popoli della stessa stirpe viventi nel reame svedese e nell' impero moscovita. E strana parve anche a me questa deduzione allorchè la prima volta mi si affacciava al pensiero, ma le molte ragioni di che sopra ho toccato mi persuasero ad accettarla, ed ella si è convertita al presente nell' animo mio in una profonda convinzione.

Non dirò per questo esservi completa identità fra i nostri Liguri e le rimanenti popolazioni turaniane, ma non temerò di affermare, che siccome que' primi abitatori della Penisola, del pari che di tutta Europa, non erano di stipite ariano, così anche coloro che attualmente ne conservano le sembianze sono distinti etnicamente da'popoli di questa schiatta. E come fra gli Ariani i varî rami in che eglino si scompartiscono si differenziano altresì, entro certi limiti, e per forme corporali e per qualità di natura, così gli abitatori antestorici della nostra Europa, benchè di una sola Razza, erano anch' essi fra loro diversi e per aspetto e per altri caratteri naturali. Le quali varietà perdurando tuttora nelle varie diramazioni del medesimo tronco turaniano, non credo voglia addebitarmisi a sforzo d'immaginazione se io ho per fermo, che le fossero esistite parimenti in antico, e che i vetusti Liguri non avessero avuto con gli altri popoli aborigeni dell'Europa se non quelle medesime relazioni che i Liguri odierni conservano anch' oggi con le popolazioni della stessa origine, tenuto conto però de' lor non mai intermessi connubî e frammischianze con le genti contermini di stipite indo-europeo. Tra le quali relazioni più notabile delle altre abbiamo veduto essere quella della forma brachicefala del cranio che io trovava somigliante fra i Liguri ed i popoli compresi sotto la comune appellazione di *Turaniani*, forma craniale diversa dalla *dolicocefala* delle Razze Indo-Europee, ad eccezione degli Slavi, ne' quali, come a me pare, l' elemento ariano è superato dallo scitico o turaniano.

Che i Liguri non fossero stati originariamente un medesimo popolo co' rimanenti abitatori dell' Italia anche le testimonianze degli scrittori degli antichi tempi ad ogni tratto ce lo rammentano, e più d'ogni altro ce lo chiarisce il fatto, che mentre tutti gli altri Italiani si amalgamarono

tosto fra di loro, e si riunirono in un sol patto sotto l'alto dominio della Città Eterna, i Liguri ostinatamente rifiutavano di obbedire all'autorità di Roma, ed aspre e diuturne guerre sostennero per conservare la propria indipendenza, e serbarsi stranieri alla comunanza politica italiana. Anche vinti, rimasero per lungo tempo sceverati dal resto d'Italia, e non fu se non l'opera de'secoli che venner dopo, che stringendosi co'popoli circostanti ne trassero in gran parte i costumi, e sopra ogni altra cosa la lingua, ed innestandosi gli uni negli altri acquistarono il reciproco sentimento di fratellanza, e con voce profonda di cuore han di poi sempre chiamato e salutato col nome comune di patria quant'è il terreno che si distende dall'Alpi a Scilla e dal Mar Tirreno all'Adriatico. Ma benchè fra i Liguri e gli altri Italici si stabilisse comunione di favella, di religione, di statuti municipali e di latine tradizioni, non però mai si spense quella varietà portentosa che ha sempre distinto il settentrione dal centro e dal mezzogiorno dell'Italia; e chi ponga mente a' raffronti storici e consideri quel che furono e quel che sono anch'oggi i popoli della Liguria e del Piemonte, troverà per avventura il loro stampo esser rimasto tuttora vergine ed immutato. E per fermo gli antichi ci rappresentano unanimamente i Liguri come i più gagliardi degli uomini (1), e vi erano proverbi i quali dicevano che gracil Ligure valesse più di fortissimo Gallo, e che le loro donne aveano il vigore degli uomini, e questi quello delle fiere (2). Le donne infatti prendevano parte a tutti i lavori del sesso forte, e quella loro soprannaturale gagliardia faceva inarcar le ciglia al buon greco Posidonio (3) quand'egli vedeva puerpuere tornare alla marra appena sgravate, datosi solo il tempo di lavare il neonato nelle gelide acque del più vicino ruscello. Svezzati appena i fanciulli gli avvezzavano a procurarsi con l'arco e la fionda il cibo, e stropicciavano loro continuamente le membra per renderle più flessibili e pronte. Sulle coste si davano al mare quasi fosse il lor nativo elemento, e lo dominarono gran tempo avanti l'èra fenicia ed ellenica. Vivendo i più sopra un terreno povero e petroso erano giunti a dissodarlo stritolando il macigno e ingrassando la rena, e non potendo neppure con la fatica e con l'arte superare la sterilità del suolo, uomini e donne si allogavano fuori paese per faccende rusticane. E comechè

(1) Strabone, V.
(2) Diodoro, V.
(3) Strabone, III.

grandemente incerta apparisse la propria loro natura e povero il loro stato, non per questo si meritavano quella bruttura di ladroneccio, di menzogna e di frodi in che si dicevano allevati (1); imperocchè se i Romani li chiamavano per ispregio ladroni e peggio, quel vocabolo che i popoli vincitori posero parimenti ai Sanniti non aveva altro significato se non quello di uomini accorti, destri, insidiosi negli agguati di guerra, ed espertissimi in quelle maestrie che suppliscono al difetto del numero e della forza con la sagacità e con l'astuzia. « Tuttavia in questa « razza non è ancora al dì d'oggi cancellata ogni traccia della sua robu- « sta virilità d'altri tempi. In Piemonte e in Liguria il popolo compa- « rativamente

« Tiene ancora del monte e del macigno »;

« una certa sobrietà, una gravità, una sodezza, una più che italiana vi- « talità può tuttavia scorgersi nelle genti subalpine, qualità che hanno « senza dubbio contribuito a distinguerle dai loro fratelli di levante e « di mezzogiorno (2) », « e che han giovato a plasmare quella loro forte « e tenace indole, quell'amore della stabilità e dell'ordine che fa di essi « il popolo *meglio fazionato a governo*, come dice il Botta (3) »; quel popolo che, divenuto egemonico in Italia, potè promuovere la riunione delle divise membra materne, e spianare la via alla ricostituzione della nostra unità nazionale, desiderio, speranza e voto di tanti secoli!

E qui raccogliendo le sparse fila del nostro discorso, ei mi pare che possa dirsi rimaner dimostrato:

1°. Essere i Liguri odierni discendenza diretta di que' Liguri dell'antichità che nell'epoche antestoriche avean popolato non pure l'Italia, ma parte ancora della Francia e della Spagna;

2°. Esser eglino di stirpe affine a quelle altre genti che abitavano l'Eu-

(1) Sed ipsi (Ligures) unde oriundi sunt exacta memoria illiterati, mendacesque sunt, et vera minus meminerunt. *Cato in origin. ap.* Servium, XI, 75. Non diversamente diceva di loro Nigidio Figulo: nam Ligures qui Apenninum tenuerunt latrones, insidiosi, fallaces, mendaces; e Virgilio, *Æneid.* XI, 715-47.

Vane Ligur, frustraque animis elate superbis,
Nequicquam patrias tentasti lubricus artes:
Nec fraus te incolumen fallaci perferet Auno.

(2) Gallenga, *Op. cit.*, I, 77.

(3) Gioberti, *Del Primato.* Napoli, 1848, II, 181.

ropa innanzi l'arrivo de' popoli Ariani; stirpe distinta pel carattere brachicefalo del cranio , e per quelle altre qualità di natura che sono proprie della schiatta turaniana;

3°. Le colonie Ariane venute in Italia avervi in parte sostituito i più antichi abitatori, ed essersi soprapposte alla razza indigena, il cui tipo scomparve e fu assorbito dall' ariano che divenne il tipo generale della Penisola.

4°. Ma in Piemonte ed in Liguria la vecchia Razza si serbò predominante, onde quivi il tipo antico o non fu punto, o fu solo lievemente modificato; perocchè anch'oggi è osservabile nella maggioranza degli abitanti di quelle Province la forma del cranio brachicefalo, la quale si conserva immutata da quella ch'essa era nell'età più remota.

5°. Non pertanto i nativi del Piemonte e della Liguria, compenetrati col resto degli abitatori della Penisola, e vincolati con essi per comunanza di lingua, di religione e di costumi, han da lungo tempo formato insieme una sola nazione, come tutto il gran territorio fra l'Alpi e il Mare ha formato da gran tempo e forma al presente una sola e indivisibile patria.

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

Tav. I. Cranio ligure antico, di sesso femmineo, rinvenuto il 1862 in Torre della Maina, paesetto di collina distante dieci miglia da Modena, descritto a pag. 29.

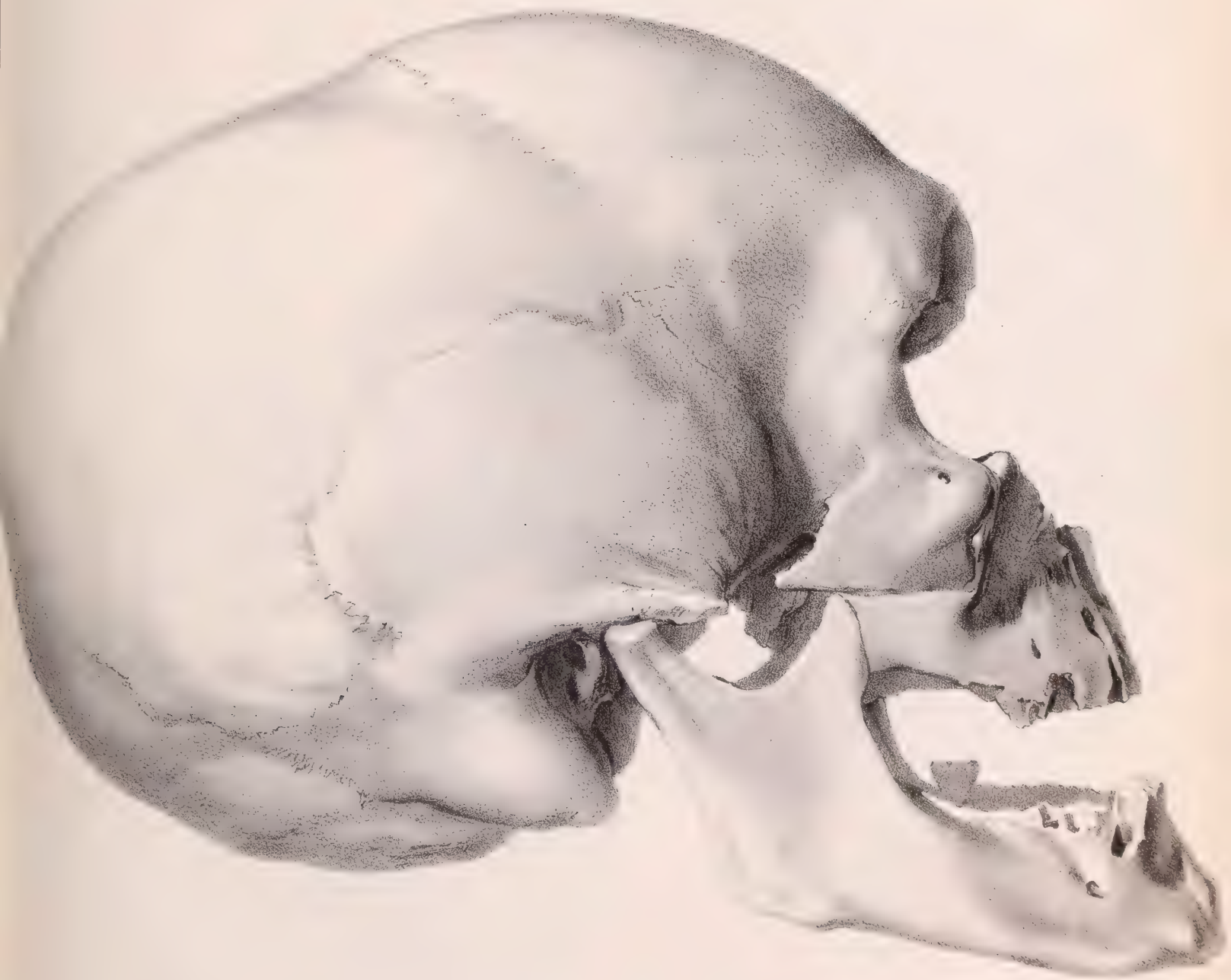
Tav. II. Altro cranio ligure antico, di sesso maschile, rinvenuto parimenti il 1862 in Torre della Maina, descritto a pag. 31.

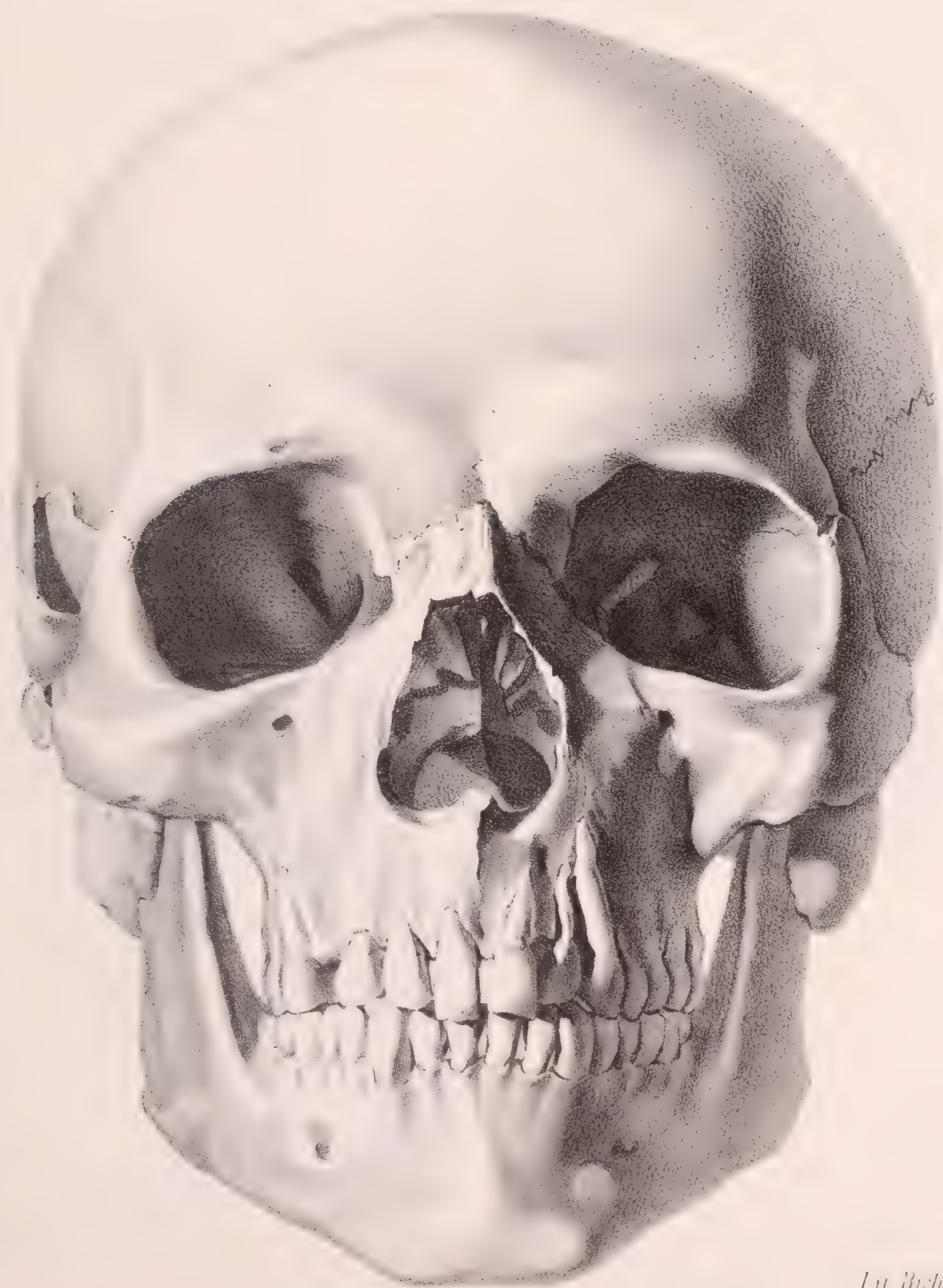
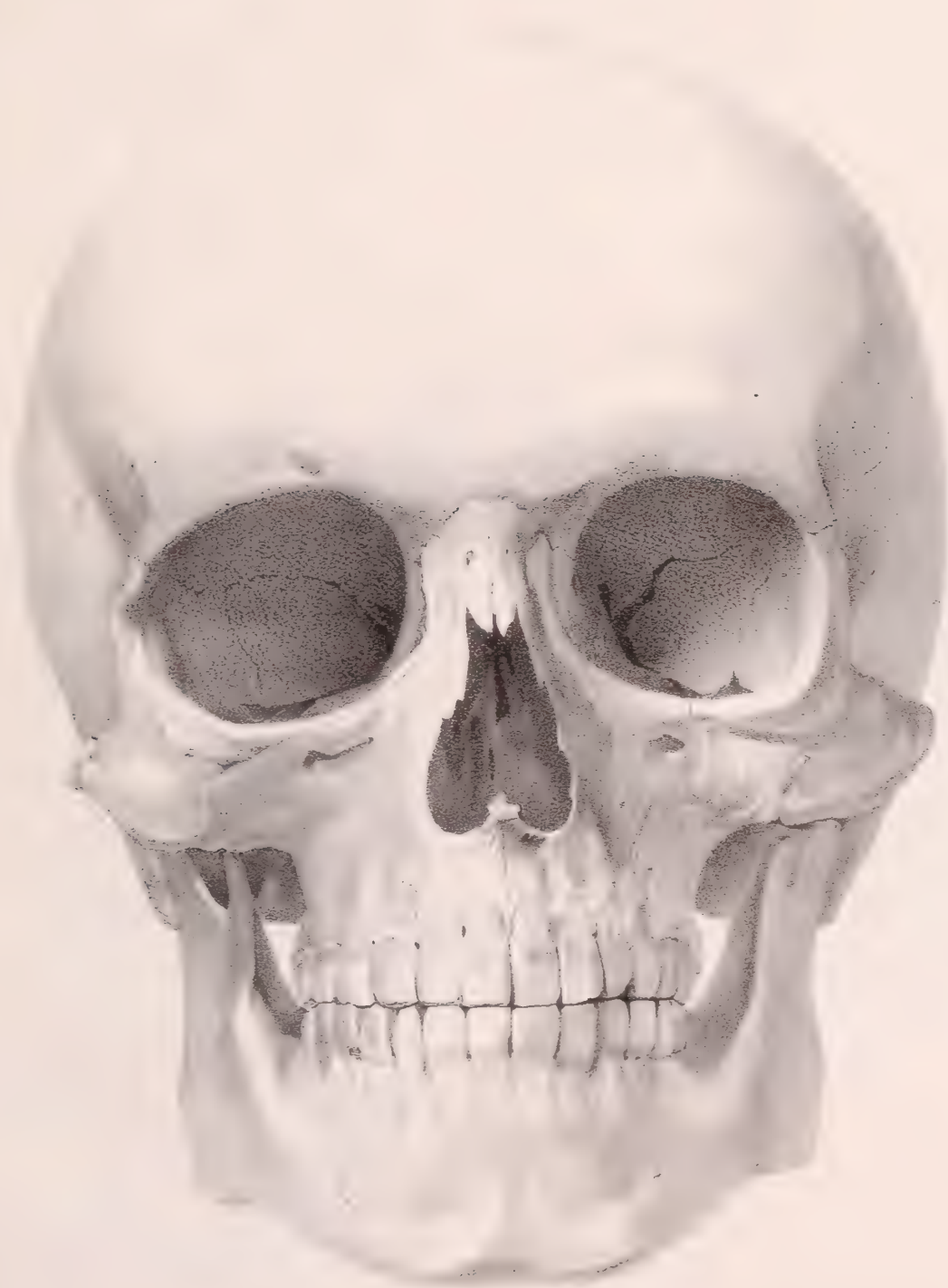
Tav. III. Lo stesso veduto di faccia.

Tav. IV. Cranio ligure odierno di un montanaro della Liguria.

Tav. V. Lo stesso veduto di faccia.

Tav. VI. Cranio di un individuo nativo della Provincia di Torino.

Tav. VII. Lo stesso veduto di faccia.

K. Grob dis.

Lit. Richter e C.º Napoli.

Lit. Richter e C.

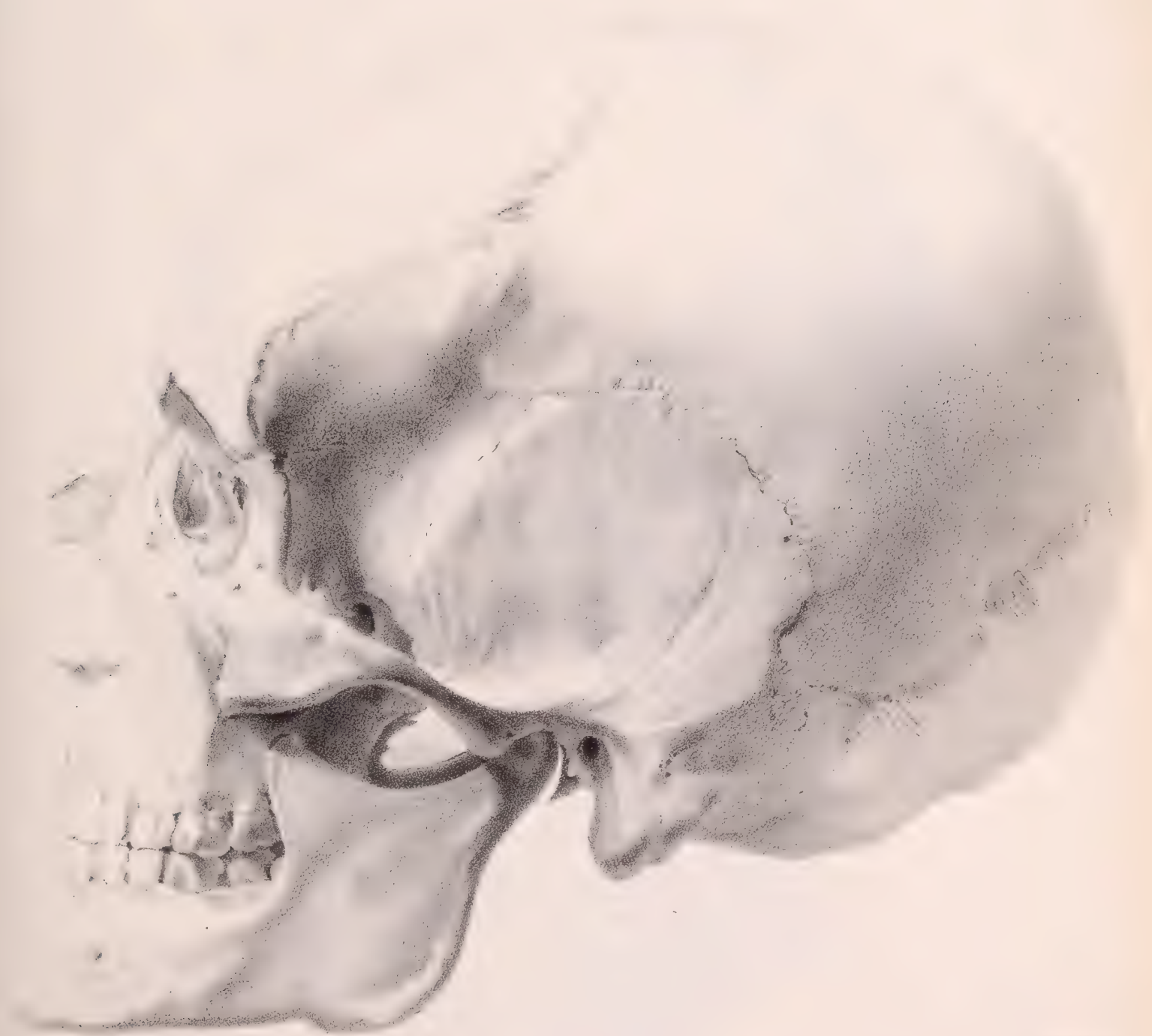
Lit. Richter e C.

Lit. Richter e

Lit. Richter e C.

Lit. Richter e C.

Lit. Richter e C.

Vol. II. N.° 2.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA
DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SOPRA UN NUOVO UDOMETRO AUTOGRAFICO

MEMORIA

DEL SOCIO ORDINARIO L. PALMIERI

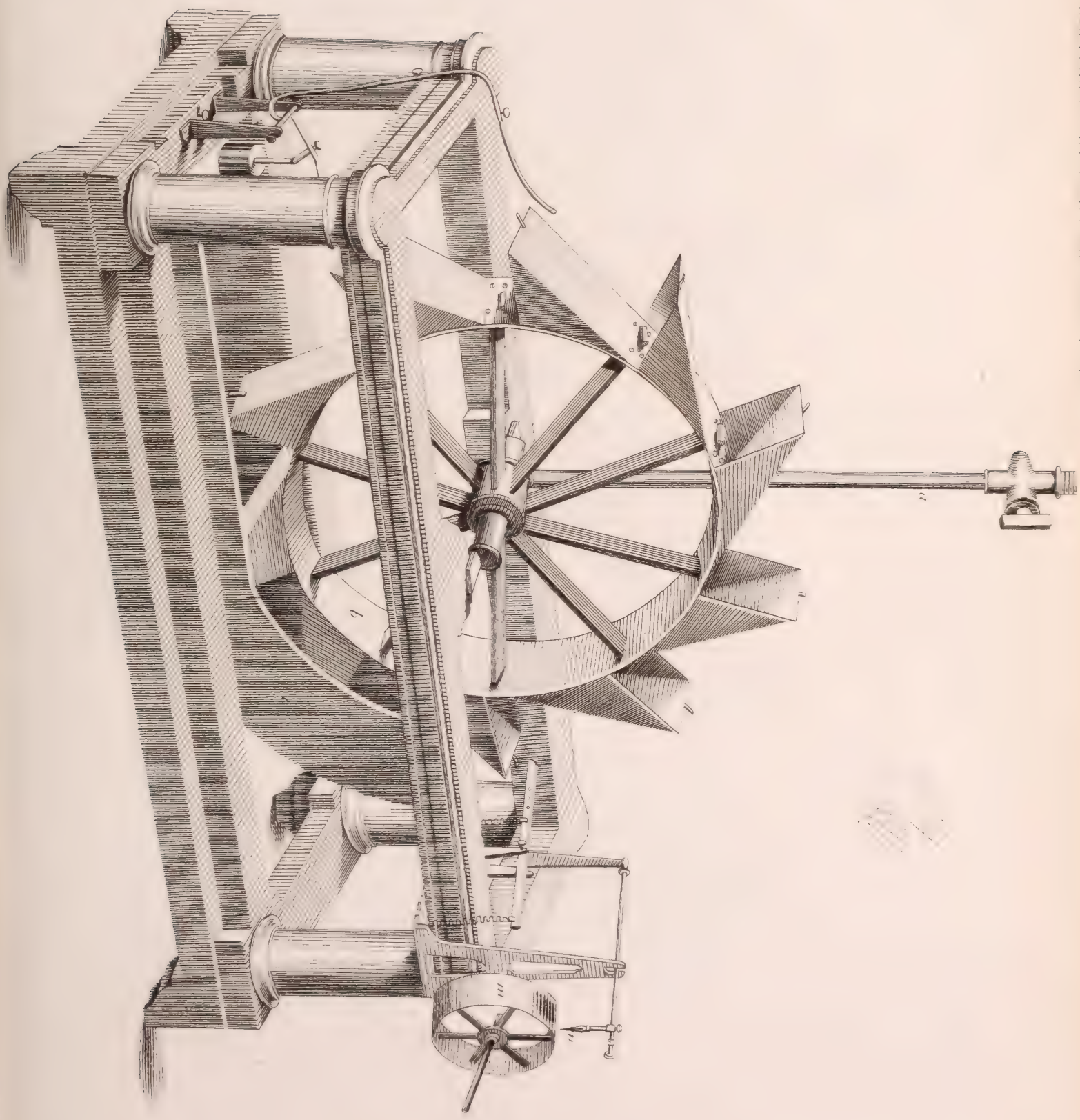
letta nella tornata del dì 13 ottobre 1863.

Tra gli udometri grafici di cui si hanno descrizioni, primeggia senza dubbio quello di Horn consistente in una navetta divisa in due compartimenti la quale essendo bilicata nel mezzo è costretta ad oscillare per lo peso dell' acqua che alternativamente va a riempiere le due cavità in cui essa è divisa. Ingegnoso del pari è l' udometro grafico di Kreil nel quale un piccolo recipiente è costretto a versarsi quando è pieno, ed una leva con una matita segna sulla carta il numero delle volte che il detto recipiente si versa. In questi congegni si ha sempre dell' acqua perduta. L' udometro che vi presento mi pare corrispondere in una maniera più precisa allo scopo cui è ordinato. Esso consiste in una ruota portante nella sua circonferenza 10 cassette le quali per altrettanti cannelli a guisa di raggi comunicano con una cavità cilindrica ch' è verso l' asse: entro di questa a dolce strofinio se ne trova un' altra la quale ha una sola apertura. L' acqua entra in questa cavità cilindrica interna e per quell' apertura della quale di sopra è detto passa a riempire una delle cassette, la ruota allora perduto l' equilibrio fa un passo, e versandosi l' acqua della cassetta che s' era piena, si riempie la seconda e così appresso. Ogni cassetta che passa fa muovere mercè una leva a zanca una matita la quale fa un tratto sopra di una carta che si muove a passo misurato per un congegno di orologeria.

La vasca superiore è di tale ampiezza che ogni millimetro di acqua riempie una delle cassette della ruota, per cui si avrà sulla carta la indicazione della quantità di pioggia, della sua durata ec. Sulla stessa carta verrà indicata anche la forza e la direzione del vento per mezzo di congegno anemografico che vi descriverò in altra occasione, non avendo ancora ricevuta l' ultima mano.

A rendere più chiara la intelligenza di questo strumento vi aggiungo il disegno della ruota di sopra indicata. L' acqua viene dalla vasca superiore per un cannello *a* nell' asse cilindrico della ruota a cassette *b*. Questo asse è fisso ed ha una sola apertura orizzontale verso la parte destra : sopra questo asse la ruota è mobile, e siccome essa ha dieci raggi che sono dieci canali, così un solo di questi corrisponde con l' apertura anzidetta e dà passaggio all' acqua per riempire la cassetta che si trova in sito orizzontale ; questa empita discende e si versa passando in suo luogo la seconda e così appresso. Ogni cassetta che passa urta per un istante un braccio di leva *x* il quale abbassandosi trasporta la matita *v* sulla carta avvolta sulla ruota *m* mobile per un congegno di orologeria. Verso la sinistra la ruota a cassette porta un meccanismo di scappamento che obbliga le cassette a presentarsi regolarmente in direzione dell' apertura dell' asse interno della ruota. Ogni cassetta è della capacità di 200 centimetri cubici di acqua e la vasca superiore ha la sezione di 2000 centimetri quadrati, onde per ogni centimetro di acqua che cade la ruota fa un giro, dando dieci tratti di matita sulla carta ognuno de'quali corrisponde ad un millimetro di acqua caduta. La carta essendo divisa in ore si saprà quando la pioggia cominciò, che durata ebbe e con quale intensità discese. L' acqua che si versa dalle cassette della ruota cade in una vasca sottoposta *c* dalla quale può essere raccolta in un vase graduato che può servire di controllo.

Salv. Pisani dis.

Vol. II. N.° 3.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA
DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

RICERCHE SULLE RELAZIONI TRA LA GEMINAZIONE DEI CRISTALLI ED IL LORO INGRANDIMENTO

MEMORIA

DEL SOCIO ORDINARIO A. SCACCHI

letta nella tornata del dì 3 novembre 1863.

I particolari co'quali si produce l'ingrandimento dei cristalli offrono argomento di studio che, mentre sembra piuttosto sterile e mancante di attrattive per gl'ingegni speculativi, son di avviso che potrà tornare molto utile al progresso della cristallografia. Ricerche di tal fatta che acquistano una certa importanza considerate nel loro insieme, e mettendo a riscontro i diversi fatti gli uni con gli altri, mi propongo rendere di pubblica ragione in particolare lavoro quando esse saranno meglio avanzate verso il loro compimento. Ora mi limito ad esporre un fatto esaminato sino al presente in poche specie di cristalli, il quale riferendosi allo stesso tema del loro ingrandimento, offre la speciale condizione che non sembra possibile renderne ragione senza ammettere un ignoto e non prevedibile rapporto tra il fenomeno della geminazione e l'altro dell'accrescimento; o, ciò che vale lo stesso, senza ammettere nel fatto della geminazione una forza maravigliosa di cui non si era punto sospettato per lo innanzi. Egli è altresì notevole che essendovi diversi modi di geminazione, non tutti hanno la medesima efficacia, e la maniera di agire della medesima specie di geminazione varia moltissimo secondo che i cristalli si trovano esposti a ricevere un accrescimento più o meno rapido.

Nella memoria sulla *polisimmetria dei cristalli* che ho presentato all'Accademia nello scorso mese di maggio, comparando i cristalli del solfato potassico prismatico con quelli del solfato potassico romboedrico, ho semplicemente annunziato che i cristalli gemini del primo s'ingrandiscono assai più presto dei cristalli semplici della medesima specie, la qual cosa non avviene per i cristalli gemini romboedrici, nei quali il fenomeno della geminazione procede in particolar guisa affatto diversa dalle geminazioni ordinarie. Ho pure annunziato lo stesso fatto discorrendo del paratartrato acido di soda triclino; ma per non molto dilungarmi dall'argomento di quella memoria, ho tralasciato di esporre gli esperimenti per i quali era venuto a quelle conclusioni, ed il naturale sviluppo delle medesime ricerche sopra altre specie di cristalli.

Quando ho cominciato a studiare questo argomento ho molto dubitato della straordinaria efficacia che per i fatti osservati mi sembrava dover attribuire alla geminazione; almeno non sapeva rendermi esatto conto della importanza di tali fatti. Ed anche adesso che mi son determinato a pubblicarli, se li stimo meritevoli dell'attenzione dei naturalisti, non so dire qual sia il loro vero valore. Quel che più mi è stato dispiacevole in queste ricerche è provvenuto dalla difficoltà di trovare sostanze che, al pari del solfato potassico, si prestassero alle necessarie esperienze per giungere a risultamenti sicuri. Di molte sostanze cristallizzabili non è facile avere sì i cristalli semplici che i geminati; avendo le due qualità di cristalli, è poi non meno difficile trovarne di tale natura che s'ingrandiscano nelle acque madri senza che il loro accrescimento venga di leggieri disturbato da inconvenienti di varia natura. Sulle sostanze molto solubili non si può fare assegnamento, perchè divenute le soluzioni cristallizzanti, nuovi cristalli si aggiungono e si attaccano a quelli che si erano cominciati ad ingrandire; per le sostanze pochissimo solubili spesso avviene essere più facile la produzione di nuovi cristallini che l'ingrandimento dei cristalli immersi o preesistenti nelle soluzioni; in tutti i casi se sopraggiunge un abbassamento di qualche grado di temperatura, se l'evaporazione diventa molto rapida, se in altre guise il liquore è disturbato dal suo tranquillo e moderato procedimento, il più delle volte non si può tener più conto dei saggi intrapresi. Egli è però che il chiarire con esperimenti l'argomento preso a trattare è più difficile di quel che a prima giunta potrebbe sembrare.

Intanto prendendo ad esaminare in questa memoria la riferita proprietà dei cristalli gemini, è d'uopo ricordare che lo stesso fatto della

geminazione è causa di altri notevoli fenomeni cristallografici, o, se non è rigorosamente dimostrato che tali fenomeni derivino dalla geminazione, è per lo meno manifesta la loro intima relazione. Così nei cristalli di solfato potassico prismatico ho mostrato come la poliedria di alcune specie di facce è in tale stretto rapporto con i piani di geminazione che sembra essere necessaria conseguenza dei medesimi (1). Nei cristalli della stessa specie ho pure fatto conoscere che essendo essi geminati s' impiantano col piano di geminazione perpendicolare al piano di attacco, fig. 23 a 26 (2) mentre i cristalli semplici s' impiantano per una delle estremità ω', ω, fig. 1. Nei cristalli di paratartrato acido di soda prismatico si ha che i cristalli semplici sono sempre stranamente rampollanti, al contrario dei cristalli gemini i quali non presentano alcun segno di rampolli (3). D'altra parte i fatti di recente studiati nei cristalli gemini del solfato potassico, siano romboedrici, siano prismatici, aggiungono novella importanza al fenomeno della geminazione. Sono al certo ammirevoli le geminazioni superficiali sulle facce poliedriche μ, fig. 76, dei cristalli romboedrici e sulle facce m'', m'', fig. 22 e 27, dei cristalli prismatici geminati per o. Ed ancora più maravigliosa è la legge che determina i gruppi geminati per e e per o, fig. 1, nei cristalli prismatici. Essendo moltissime le combinazioni possibili di cristalli gemini per e e per o, si è veduto in quelle sin ora osservate non esservi mai geminazione da entrambi i lati della medesima faccia ε; ed essendovi geminazione per o in una parte ε, nell'altra parte opposta ε' vi è sempre un'altra geminazione sia per o sia per e (4). Per questi fatti è facile prevedere che dallo studio approfondito dei cristalli gemini può ripromettersi la cristallografia non lievi soccorsi al suo avanzamento

Prima di esporre i fatti per i quali son pervenuto a conoscere il più rapido ingrandimento dei cristalli gemini ragguagliati ai cristalli semplici della medesima specie, stimo opportuno trattenermi ad esaminare il fenomeno conosciuto col nome di geminazione dei cristalli, ed esporre qual sia al presente la mia opinione su tale fenomeno.

(1) *Sulla poliedria delle facce dei cristalli.* Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino. Tomo XXI, 1862.

(2) Le figure citate in questa memoria sono quelle stesse che accompagnano la precedente memoria *sulla polisimmetria dei cristalli.*

(3) *Sulla polisimmetria dei cristalli;* pag. 100 e seguente.

(4) Per la più ampia esposiziono di questi fatti può riscontrarsi la citata memoria sulla polisimmetria.

I cristallografi chiamano gemino ogni cristallo formato dall'unione di due cristalli in tal modo congiunti insieme che uno di essi prenderebbe la posizione dell'altro girando intorno ad un asse determinato per un arco di 180°. Questa definizione esattissima quando serve ad esprimere il fatto dei cristalli gemini tale quale si presenta alla nostra osservazione, mena naturalmente ad un concetto riguardo al modo della sua produzione che non è del pari esatto. Dappoichè essa fa presumere due principali condizioni; la prima cioè che il cristallo gemino sia in origine formato dall' unione di due cristalli, e la seconda che i due primitivi cristalli nel congiungersi avessero avuto un determinato movimento l'uno rispettivamente all'altro. Supponendo che i cristallini prima di geminarsi si trovino identicamente situati, questo movimento sarebbe determinato dalla legge che, uno di essi restando immobile, l'altro giri per un arco di 180° intorno ad un dato asse. Ora le riferite condizioni non sono comprovate da alcun fatto; e quantunque i cristalli gemini apparissero come formati dall'unione di due cristalli, tale apparenza non basta perchè se ne debba conchiudere che nell'iniziarsi il fenomeno della geminazione realmente due distinti cristalli si congiungano. E come vedremo or ora si può di leggieri attribuire ad altra cagione la particolare apparenza dei cristalli gemini. La seconda condizione del movimento scambievole tra i due cristalli è ancora qualche cosa che non mi sembra probabile, non conoscendosi la cagione che potrebbe produrre tale movimento. D'altra parte poi entrambe le condizioni se fossero vere, ne conseguirebbe che in tutti i casi di cristalli gemini vi sarebbe un piano di geminazione perpendicolare all'asse di rivoluzione; e di più i cristalli geminati si dovrebbero facilmente disgiungere nel verso del piano di geminazione come più o men facilmente si separano i cristalli congiunti per caso senza alcuna legge determinata. Intanto l'esperienza dimostra che nel separare l'uno dall'altro i cristalli che costituiscono i gruppi geminati s'incontra la medesima resistenza che si ha nel disgiungere una parte dall'altra del medesimo cristallo. E se in molti casi è chiaramente distinto e ben definito il piano di geminazione, sono altresì frequenti gli esempî nei quali non si rinviene alcun determinato confine che faccia riconoscere la superficie per la quale l'uno all'altro si congiungono i cristalli dei gruppi geminati. Questo principalmente succede spesso in diverse specie di cristalli triclini o monoclini nei quali l'asse di rivoluzione è parallelo agli spigoli di una zona di facce esistenti nel cristallo senza che sia possibile nello stesso cristallo una faccia perpendicolare al medesimo asse; come pure suc-

cede nella fluorina, nella sodalite, nel sale ammoniaco, nella cabasia ed in altre sostanze, nelle quali i cristalli dei gruppi geminati si congiungono in modo che sembrano gli uni con gli altri compenetrarsi.

Quantunque sull' intima costituzione fisica dei cristalli nulla ancora conosciamo di certo, nondimeno possiamo adottare l'ipotesi che i cristalli siano composti d'impercettibili molecole dotate di forze attrattive in determinate direzioni con particolari proprietà in ciascuna direzione, le quali direzioni con le corrispondenti loro proprietà particolari sono in rapporto con la forma di ciascuna specie di cristallo. Questa ipotesi non è contradetta da alcun fatto, e sentiamo una specie di necessità di adottarla come mezzo indispensabile per esprimere le nostre idee.

D'altra parte poi non entrerò ad investigare qual sia la forma delle molecole, ovvero se esse abbiano forme determinate, sembrandomi i risultamenti di tali ricerche nè capaci di esatta dimostrazione, nè in alcun modo proficui per le conseguenze che se ne potrebbero far derivare. Per le medesime ragioni non entrerò ad esaminare se tra le molecole dei cristalli vi sia perfetto contatto, o se invece siano esse allogate a qualche distanza le une dalle altre.

Intanto debbo soggiungere che ciascuna molecola isolata pare che non abbia se non la semplice attrazione per ogni verso uniforme, e che le riferite direzioni di speciale attrazione si manifestino quando le molecole sì per la loro vicinanza e sì per altre favorevoli condizioni giungono ad esercitare l'una sull'altra l'influenza della loro scambievole attrazione. Si perviene a questa conclusione per alcuni fatti e per considerazioni diverse delle quali mi basta riferirne una sola.

Prendiamo ad esempio le molecole dei cristalli trimetrici e consideriamo in esse tre direzioni, ciascuna di speciale attrazione, parallele agli assi cristallografici. Se volessimo supporre altra maniera di direzioni attrattive, purchè in rapporto con la forma dei cristalli, si giungerebbe sempre allo stesso risultamento. Chiameremo a, b, c le tre direzioni di forze attrattive di una molecola x; a', b', c' le medesime forze attrattive in determinate direzioni di una seconda molecola y, e così di seguito a'', b'', c'' per una terza molecola z, e per altre molecole in numero indeterminato. Osserveremo poi che queste forze convengono tutte nella qualità di attrarre, mentre quelle dinotate con lettere diverse sono tra loro differenti, sia pel grado d'intensità, sia per altre qualità che per ora non importa d'investigare.

Ciò premesso se supponiamo le molecole x, y, z già fornite rispetti-

vamente delle forze attrattive a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' prima di congiungersi, è facile intendere che dalla loro unione non può derivarne che confuso aggruppamento senza quei precisi caratteri geometrici che natura ci offre nei cristalli trimetrici. Dappoichè quando le molecole x, y pervengono al punto di esercitare la loro scambievole attrazione, tranne il caso fortuito ed estremamente raro che le direzioni del medesimo nome s'incontrino esattamente nel medesimo verso; in ogni altro caso il modo di loro unione non sarà soggetto ad alcuna legge. Se per esempio y s'incontra con x in modo che stiano esattamente o approssimativamente b' nel verso di a, e z incontrandosi con x ed y stia c'' nel verso di b e b'' nel verso di a', ne dovrà seguire che x, y, z rimarranno stabili nella posizione che deriva dal loro accidentale incontro, perchè l'attrazione è qualità comune a tutte le tre direzioni, nè vi può essere ragione perchè b' di y con a di x, ovvero c'' di z con b di x non debbano scambievolmente attrarsi. In generale dunque nella ipotesi che le molecole isolate siano dotate di speciali forze attrattive in determinate direzioni, la posizione scambievole che esse prenderanno nel congiungersi dipenderà dal verso pel quale s'incontrano e dalla intensità di azione scambievole che esercitano le une sulle altre le forze attrattive delle diverse molecole in conseguenza del medesimo verso pel quale queste s'incontrano. Condizioni che non potrebbero dare nei cristalli nè una forma costante, nè alcuna forma regolare.

Dietro la considerazione fin qui esposta fa d'uopo conchiudere che le speciali direzioni di forze attrattive si producono nelle molecole allorquando queste pervengono ad esercitare la loro scambievole azione. Ed allora è facile intendere come il punto pel quale le molecole si toccano o il punto di minore distanza, nel caso che esse non giungessero a toccarsi, servirà a stabilire le direzioni attrattive. Per esempio la linea che congiunge questo punto con i centri delle molecole darà la posizione di una direzione di speciale attrazione; due altre linee che, partendo dal centro di ciascuna molecola, siano inclinate tra loro e con la prima linea con determinati angoli variabili, secondo la natura della sostanza cristallizzante, daranno due altre direzioni di speciale attrazione. Quindi in ogni molecola che si accosta per congiungersi al primo gruppo di molecole verranno ad ingenerarsi le speciali direzioni di attrazione conformi alle direzioni attrattive preesistenti nelle prime molecole.

Facciamo ora osservare che può avvenire, ed avviene d'ordinario, che in tutte le molecole che compongono un cristallo le direzioni attrattive

dello stesso nome si producano sempre le une alle altre parallele, che siano cioè parallele le a, a', a'' ec. come pure le b, b', b'' e le c, c', c'', ed allora è chiaro che ne nascerà un cristallo semplice. Può invece avvenire che in due molecole primitive x ed y che si congiungono (e vale lo stesso per una molecola che si congiunge ad un gruppo di molecole) per cagioni finora ignote le direzioni a, b, c di x non si producono rispettivamente parallele alle direzioni a', b', c' di y; ma invece, secondo i diversi casi una sola di esse, o due, ovvero tutte tre si generino tra loro inclinate con determinate leggi. Di più per le molecole che in seguito si congiungono ad x le direzioni attrattive si svolgano sempre rispettivamente parallele ad a, b, c, come rispettivamente parallele ad a', b', c' si svolgano le direzioni attrattive delle molecole che si congiungono ad y. La conseguenza necessaria di questa particolare maniera di prodursi le direzioni attrattive nelle molecole sarà che il cristallo ingrandito ci si presenterà con i caratteri proprî di quei cristalli che diciamo gemini.

Dalle cose poi ora dichiarate si deduce che la differenza tra i cristalli semplici ed i cristalli geminati sta in ciò, che nelle molecole che compongono i primi le direzioni delle forze attrattive si sono generate tutte rispettivamente parallele, mentre nei secondi si sono svolte, nell' iniziarsi il fenomeno che diciamo geminazione, in direzioni non parallele, ma con determinate leggi inclinate. Quanto ai cristalli trigemini ed alle geminazioni più volte e variamente ripetute, son tutti fatti ai quali facilmente si applica lo stesso principio.

Questa teoria dei cristalli gemini ci porge il fatto della geminazione più atto a produrre importanti conseguenze che non è la semplice condizione di due cristalli con determinata regola congiunti insieme. Dappoichè nascendo i cristalli gemini dal manifestarsi nelle molecole le forze attrattive della medesima specie non in una sola direzione, ma in due direzioni, questa circostanza persiste per tutto il tempo che il cristallo continua ad ingrandirsi, e potrebbe derivarne l'effetto dell'ingrandimento più rapido nei cristalli semplici, del quale ho preso a discorrere. Al contrario poi riguardata la geminazione come l' unione di due cristalli, la cagione del fenomeno non sarebbe che istantanea, e dopo l'avvenuto congiungimento il cristallo gemino non offrirebbe nulla di diverso di due o più cristalli semplici in qualunque modo accidentalmente accozzati; tal che bisogna cercare un'altra origine dei fenomeni che vediamo conseguitare la geminazione. Non intendo dire con questo di poter dare una chiara spiegazione del perchè i cristalli gemini abbiano più rapido accresci-

mento. La vera spiegazione resta ancora a conoscersi; ed ho voluto soltanto accennare che ammettendo nelle diverse molecole dei cristalli gemini la virtù di generarsi le direzioni attrattive omonime non parallele, ma in certa guisa tra loro inclinate, in questo fatto può aversi la presunzione che esista la cagione dell'ingrandimento più rapido.

Solfato di potassa prismatico.

Avendo fatto più volte soluzioni calde di solfato potassico, e concentrate al punto che, lasciate in cristallizzatoi chiusi, han cominciato a cristallizzare alquanto prima di raggiungere la temperatura dell'aria ambiente o poco dopo di averla raggiunta, in meno di ventiquattr'ore si sono in esse depositati molti cristalli isolati, taluni gemini, altri semplici, ed i primi sempre assai più grandi dei secondi. È stato questo il primo fatto che ha richiamata la mia attenzione sul rapporto che i cristalli ci presentano tra il fenomeno della geminazione ed il loro ingrandimento. E per averne più esatta conoscenza ho pesato in tre diversi esperimenti dieci cristalli gemini, scegliendo i più grandi, ed altrettanti cristalli semplici ancor essi i più grandi che si erano prodotti. Nel primo esperimento, tolti i cristalli dal liquore dodici ore dopo che esso era stato versato nel cristallizzatoio, ho trovato il peso dei cristalli semplici eguale a grm. 0,036 e quello dei cristalli gemini eguale a grm. 0,486, e però circa quottordici volte maggiore. Nel secondo esperimento, anche dodici ore dopo di aver tenuto il liquore alla temperatura dell'ambiente, il peso dei dieci cristalli semplici è stato di grm. 0,031, e quello dei dieci cristalli gemini di grm. 0,625, cioè circa venti volte maggiore. Nel terzo esperimento, trascorse ventiquattr'ore da che la soluzione calda era stata versata nel cristallizzatoio, ho trovato i cristalli semplici pesare grm. 0,102, ed il peso dei cristalli gemini eguale a grm. 1,996, ancor esso circa venti volte maggiore. Questa differenza di peso tra le due qualità di cristalli non potevasi attribuire all'essersi i cristalli gemini generati prima dei cristalli semplici, dappoichè avendo tenuto d'occhio la loro prima apparizione, mi sono assicurato che sono divenuti visibili alternativamente ora gli uni ed ora gli altri senza alcuna differenza di tempo che addimostrasse la precedenza dei cristalli geminati.

Dopo questi primi risultamenti ho stimato necessario d'intraprendere e sullo stesso solfato di potassa prismatico, e sopra altre specie di cri-

stalli una serie di esperimenti che meglio chiarissero il fatto del maggiore ingrandimento dei cristalli gemini dimostrato dai precedenti saggi. Quindi ho immerso un certo numero di cristalli, ciascuno di peso determinato, nelle soluzioni cristallizzanti, e poi li ho ripesati dopo alquanti giorni che sono rimasti ad ingrandirsi nelle soluzioni. Si ottiene così l'esatta determinazione in ciascuno di essi dell' avvenuto aumento di peso. D' ordinario l' ingrandimento dei cristalli non verificandosi per ogni verso uniforme , ho stimato necessario tener conto di due principali dimensioni dei medesimi misurate prima della immersione , e dopo il ricevuto ingrandimento; e, come sarà manifesto per quel che dovrò in breve esporre , la determinazione di questo elemento è di non piccola importanza per avere una giusta idea del fenomeno che ho tolto ad esaminare. Quantunque sia facile prevedere che l' ingrandimento dei cristalli debba essere in rapporto della estensione della loro superficie, e non della loro mole, pure il nostro argomento richiedeva che si fosse cominciato dal dimostrare esperimentalmente tale principio. Ed ho preferito fare il saggio con i cristalli di nitrato baritico, sì perchè dei medesimi è facile averne di varia grandezza e quasi della stessa forma, per le facce in tutti estese con le medesime proporzioni, e sì perchè le soluzioni di questo sale adoperate con qualche diligenza riescono bene a produrre l' ingrandimento dei cristalli senza che lievi accidenti vi apportino notevole disturbo. Nel seguente quadro sono riportati i risultamenti ottenuti con dodici cristalli di nitrato baritico ingranditi per venticinque giorni nella medesima coppa alla temperatura variabile tra 26°, 2 e 23°, 4. I cristalli prima della immersione avevano le facce dell'ottaedro e del cubo, poggiavano tutti per una faccia dell'ottaedro, la quale essendo del pari che la sua faccia parallela assai più larga delle altre, ciascun cristallo era più esteso in larghezza che in altezza. Estratti dal liquore dopo il tempo indicato, siccome è loro particolar carattere di manifestarsi distintamente emiedrici quando s'ingrandiscono con lentezza, oltre le facce dell'ottaedro e del cubo, avevano minutissime anche le facce del dodecaedro pentagonale 0 1 2 , e lo stesso ottaedro era distinto in due tetraedri, uno che diremo t con facce levigate, e l'altro t' con facce scabre. Essendo poi porzione dei cristalli immersi poggiati per t ed un'altra porzione poggiati per t', ho distinto nel quadro con le medesime lettere t e t' gli uni dagli altri per far rilevare come i cristalli poggiati per t, e che per conseguenza erano terminati superiormente da una faccia scabra t', hanno l'ingrandimento verticale paragonato a quello

in direzioni orizzontali alquanto maggiore degli altri cristalli poggiati per t'. Malgrado un lieve disquilibrio che per questa cagione provviene al proporzionato ingrandimento dei diversi cristalli, le cifre riportate nel quadro manifestano chiaramente che, in proporzione del peso primitivo, i cristalli più piccoli hanno maggiore accrescimento, come appunto in proporzione della mole i cristalli più piccoli hanno superficie più estesa.

Reputo poi questo esperimento bastevole a dimostrare nei cristalli l'ingrandimento proporzionato alla loro superficie; nè so se vi possa essere altro metodo più esatto, avuto riguardo alla grande difficoltà di misurare con precisione la superficie dei cristalli, ed alla maniera come suole avvenire il loro incremento non per tutto uniforme.

Nitrato di barite.

		Prima della immersione			**25 giorni dopo la immersione**			*Aumento rapportato al peso primitivo*
	N.°	*Peso*	*Larghezza*	*Altezza*	*Peso*	*Larghezza*	*Altezza*	
t	1	grm. 0.676.5	mm. 10.0	mm. 3.2	grm. 0.948.5	mm. 11.9	mm. 3.8	0.402
t	2	» 0.432.0	» 9.5	» 3.1	» 0.769.5	» 11.4	» 3.7	0.781
t'	3	» 0.371.5	» 9.8	» 2.4	» 0.679.0	» 12.7	» 3.0	0.828
t'	4	» 0.297.5	» 8.3	» 2.3	» 0.549.5	» 10.2	» 3.0	0.847
t	5	» 0.259.5	» 8.1	» 2.3	» 0.531.0	» 10.0	» 3.0	1.046
t'	6	» 0.193.5	» 6.8	» 2.3	» 0.414.5	» 9.5	» 3.1	1.142
t'	7	» 0.168.0	» 7.0	» 2.2	» 0.341.0	» 8.8	» 2.8	1.030
t	8	» 0.106.0	» 5.4	» 2.2	» 0.231.0	» 7.4	» 2.7	1.179
[illegible]	9	0.081.0	» 5.3	» 1.6	» 0.195.5	» 7.3	» 2.3	1.414
t	10	» 0.053.0	» 4.2	» 1.8	» 0.165.0	» 6.0	» 2.8	2.113
t'	11	» 0.043.0	» 4.1	» 1.7	» 0.141.0	» 6.1	» 2.5	2.280
t'	12	» 0.023.5	» 3.1	» 1.4	» 0.093.0	» 5.2	» 2.1	2.915

Dai precedenti studii sopra i cristalli semplici di solfato potassico prismatico aveva riconosciuto che essi, generati nelle soluzioni di puro solfato potassico, avevano d'ordinario la lunghezza nel verso dell'asse $\omega'\omega$, fig. 1, circa quattro volte maggiore della larghezza $\varepsilon\varepsilon'$, ed in quelli generati nelle soluzioni che contenevano un po' di potassa caustica aveva avuto non rari esempî nei quali la lunghezza $\omega'\omega$ superava di circa dieci

volte la larghezza $\varepsilon\varepsilon'$. Nei cristalli poi formatisi nelle soluzioni che contenevano più o meno abbondante il carbonato di potassa, rimanendo sempre maggiore la lunghezza $\omega'\omega$, essa era il più delle volte meno del doppio della larghezza $\varepsilon\varepsilon'$, secondo le proporzioni rappresentate nella figura 14. Quindi negli esperimenti fatti con soluzioni diverse ai cristalli semplici bislunghi ho sempre aggiunto alquanti cristalli avuti da soluzioni con carbonato potassico che ho distinti con l'epiteto di brevi. Quanto ai cristalli gemini li ho pure distinti in due categorie comprendendo nella prima quelli con geminazione duplicata, fig. 9, che hanno l'apparenza dei medesimi cristalli semplici, e mettendo nella seconda gli altri cristalli che, presentando diversi casi di geminazione per le facce e e per le facce o, si distinguevano dai precedenti per la loro forma piramidata, fig. 4, 6, 7, 22, ecc.

Ho stimato pure necessario di sperimentare con diverse soluzioni per prender nota delle differenze che possono derivare dalla presenza nel liquore di sostanze straniere. Finalmente debbo avvertire; per le variazioni che possono provvenire dalle diverse temperature e dal diverso grado di umidità dell'aria col variare dei giorni, che tutti i saggi sono stati fatti contemporaneamente. E per ciascuna specie di liquore ho adoperato un solo cristallizzatoio, curando di situare i cristalli immersi quasi ad eguale distanza l'uno dall'altro.

A. — *Soluzione di puro solfato potassico.*

	N.°	Prima della immersione			Sei giorni dopo la immersione			Aumento rapportato al peso primitivo
		Peso	*Lunghezza* ω'ω, fig. 1	*Larghezza* εε', fig. 1	*Peso*	*Lunghezza* ω'ω, fig. 1	*Larghezza* εε', fig. 1	
Cristalli semplici bislunghi	1	grm. 0.042.0	mm. 7.8	mm. 1.7	grm. 0.044.0	mm. 8.3	mm. 1.7	0.048
	2	» 0.038.5	» 8.5	» 1.6	» 0.043.5	» 10.0	» 1.6	0.130
	3	» 0.031.5	» 7.9	» 1.6	» 0.039.0	» 9.1	» 1.6	0.238
	4	» 0.019.0	» 12.0	» 1.3	» 0.020.5	» 13.8	» 1.3	0.079
	5	» 0.014.0	» 6.7	» 1.4	» 0.017.5	» 8.3	» 1.4	0.250
	6	» 0.012.0	» 6.9	» 1.3	» 0.016.0	» 8.6	» 1.3	0.280
	7	» 0.006.0	» 6.0	» 0.9	» 0.008.0	» 7.4	» 0.9	0.333
medio		» *0.023.4*			» *0.026.9*			*0.150*
Crist. semplici brevi	8	» 0.038.0	» 5.2	» 3.2	» 0.057.0	» 8.0	» 3.2	0.500
	9	» 0.032.0	» 5.4	» 3.3	» 0.051.5	» 8.5	» 3.3	0.609
	10	» 0.012.0	» 3.8	» 2.3	» 0.020.0	» 5.8	» 2.3	0.667
medio		» *0.027.3*			» *0.042.8*			*0.568*
Crist. con geminazione duplicata	11	» 0.045.5	» 5.3	» 3.8	» 0.094.0	» 8.3	» 4.5	1.066
	12	» 0.030.0	» 5.1	» 3.3	» 0.074.5	» 6.7	» 4.1	1.483
	13	» 0.028.0	» 4.8	» 3.2	» 0.074.0	» 6.6	» 3.7	1.643
	14	» 0.025.5	» 7.2	» 2.3	» 0.060.0	» 9.2	» 2.7	1.353
	15	» 0.017.5	» 3.5	» 3.1	» 0.041.0	» 6.2	» 3.2	1.343
medio		» *0.029.3*			» *0.068.7*			*1.343*
			Diametro ω'o, fig. 4	*Diametro* CC', fig. 18		*Diametro* ω'o, fig. 4	*Diametro* CC', fig. 18	
Cristalli con geminazioni varie	16	» 0.049.5	mm. 3.6	mm. 5.3	» 0.186.0	mm. 6.8	mm. 8.0	2.758
	17	» 0.041.0	» 3.5	» 4.6	» 0.111.5	» 5.4	» 7.0	1.720
	18	» 0.036.0	» 3.5	» 4.4	» 0.139.5	» 5.3	» 7.2	2.875
	19	» 0.026.5	» 3.7	» 3.4	» 0.098.5	» 5.0	» 4.6	2.717
	20	» 0.021.0	» 3.1	» 4.5	» 0.072.5	» 5.3	» 6.4	2.452
	21	» 0.018.5	» 3.3	» 2.9	» 0.087.0	» 5.2	» 4.2	3.703
	22	» 0.011.5	» 2.9	» 2.2	» 0.044.5	» 4.7	» 4.1	2.870
medio		» *0.029.1*			» *0.105.6*			*2.628*

B. — *Soluzione con circa il quinto di solfato sodico.*

	N.°	Prima della immersione			Sei giorni dopo la immersione			*Aumento rapportato al peso primitivo*
		Peso	*Diametro* ω'ω, fig. 1	*Diametro* εε', fig. 1	*Peso*	*Diametro* ω'ω, fig. 1	*Diametro* εε', fig. 1	
Cristalli semplici bislunghi	1	grm. 0.044.0	mm. 7.6	mm. 1.8	grm. 0.051.0	mm. 8.8	mm. 2.1	0.159
	2	» 0.038.5	» 8.3	» 1.6	» 0.046.0	» 9.4	» 2.0	0.195
	3	» 0.033.0	» 7.3	» 1.6	» 0.039.0	» 7.9	» 2.0	0.182
	4	» 0.030.0	» 6.7	» 1.6	» 0.037.5	» 7.0	» 2.0	0.237
	5	» 0.023.0	» 7.0	» 1.4	» 0.028.0	» 8.0	» 1.7	0.217
	6	» 0.020.0	» 11.3	» 1.2	» 0.024.5	» 12.3	» 1.5	0.225
	7	» 0.011.0	» 6.1	» 0.8	» 0.014.0	» 7.0	» 1.0	0.273
medio		» *0.028.5*			» *0.034.5*			*0.203*
Crist. semplici brevi	8	» 0.033.0	» 6.2	» 2.8	» 0.044.0	» 7.7	» 2.9	0.333
	9	» 0.031.0	» 5.2	» 2.7	» 0.041.0	» 6.7	» 2.7	0.323
	10	» 0.014.5	» 4.0	» 2.5	» 0.024.5	» 5.9	» 2.5	0.690
medio		» *0.026.2*			» *0.036.5*			*0.393*
Cristalli con geminazione duplicata	11	» 0.044.5	» 5.0	» 4.1	» 0.079.5	» 6.6	» 4.7	0.787
	12	» 0.033.5	» 5.8	» 2.6	» 0.062.5	» 7.5	» 3.1	0.866
	13	» 0.027.5	» 4.7	» 3.6	» 0.058.0	» 6.4	» 3.7	1.109
	14	» 0.022.0	» 5.0	» 2.4	» 0.045.5	» 6.4	» 3.1	1.067
	15	» 0.017.5	» 3.6	» 3.0	» 0.041.0	» 5.2	» 3.8	1.343
medio		» *0.029.0*			» *0.057.3*			*0.976*
			Diametro ω'O, fig. 4	*Diametro* CC', fig. 18		*Diametro* ω'O, fig. 4	*Diametro* CC', fig. 18	
Cristalli con geminazioni varie	16	» 0.048.0	mm. 4.0	mm. 5.1	» 0.097.5	mm. 5.2	mm. 6.6	1.031
	17	» 0.033.5	» 3.4	» 3.4	» 0.065.0	» 5.0	» 3.8	0.940
	18	» 0.029.5	» 3.0	» 4.0	» 0.058.0	» 4.2	» 5.3	0.966
	19	» 0.019.5	» 3.2	» 2.7	» 0.038.5	» 3.9	» 3.0	0.974
	20	» 0.014.0	» 2.5	» 3.7	» 0.060.5	» 3.9	» 4.6	3.205
	21	» 0.009.0	» 2.4	» 2.6	» 0.026.0	» 3.0	» 4.0	1.889
medio		» *0.025.6*			» *0.057.6*			*1.250*

C. — *Soluzione con potassa caustica.*

	N.°	Prima della immersione			Sei giorni dopo la immersione			*Aumento rapportato al peso primitivo*
		Peso	*Diametro* ω'ω, fig. 1	*Diametro* εε', fig. 1	*Peso*	*Diametro* ω'ω, fig. 1	*Diametro* εε', fig. 1	
Cristalli semplici bislunghi	1	grm. 0.029.5	mm. 8.4	mm. 1.5	grm. 0.040.0	mm. 11.2	mm. 1.5	0.356
	2	» 0.027.5	» 7.8	» 1.5	» 0.038.5	» 10.1	» 1.5	0.400
	3	» 0.018.0	» 9.4	» 1.4	» 0.025.5	» 12.2	» 1.4	0.417
	4	» 0.011.0	» 6.1	» 1.2	» 0.018.0	» 8.8	» 1.3	0.636
	5	» 0.006.5	» 5.6	» 0.9	» 0.009.5	» 8.1	» 1.0	0.461
medio		» *0.018.5*			» *0.026.5*			*0.422*
Crist. semplici brevi	6	» 0.042.0	» 5.4	» 3.0	» 0.067.0	» 8.4	» 3.3	0.595
	7	» 0.039.0	» 4.3	» 3.3	» 0.067.0	» 6.9	» 3.3	0.718
	8	» 0.011.0	» 3.5	» 2.2	» 0.022.0	» 6.5	» 2.3	1.000
medio		» *0.030.7*			» *0.052.0*			*0.694*
Crist. con geminaz. duplicata	9	» 0.038.0	» 5.2	» 3.3	» 0.112.0	» 7.9	» 3.6	1.947
	10	» 0.034.5	» 5.4	» 2.7	» 0.097.0	» 8.0	» 3.4	1.838
	11	» 0.014.5	» 3.7	» 2.3	» 0.035.0	» 6.0	» 3.1	1.414
	12	» 0.008.5	» 3.2	» 2.1	» 0.018.5	» 5.2	» 2.2	1.176
medio		» *0.023.9*			» *0.065.6*			*1.745*
			Diametro ω'o, fig. 4	*Diametro* CC', fig. 18		*Diametro* ω'o, fig. 4	*Diametro* CC', fig. 18	
Cristalli con geminazioni varie	13	» 0.046.5	mm. 4.0	mm. 5.2	» 0.148.0	mm. 6.5	mm. 6.6	2.183
	14	» 0.037.5	» 4.0	» 3.4	» 0.104.5	» 6.0	» 4.9	1.787
	15	» 0.019.0	» 2.4	» 3.6	» 0.063.0	» 4.2	» 5.3	2.316
	16	» 0.013.5	» 5.8	» 2.1	» 0.047.0	» 7.7	» 3.1	2.500
	17	» 0.008.0	» 2.1	» 1.8	» 0.031.0	» 5.0	» 2.5	2.875
medio		» *0.024.9*			» *0.078.7*			*2.461*

D. — *Soluzione con carbonato di potassa.*

	N.°	Prima della immersione			Sei giorni dopo la immersione			*Aumento rapportato al peso primitivo*
		Peso	*Diametro* ω'ω, fig. 1	*Diametro* εε', fig. 1	*Peso*	*Diametro* ω'ω, fig. 1	*Diametro* εε', fig. 1	
Cristalli semplici bislunghi	1	grm. 0.040.5	mm. 9.5	mm. 1.7	grm. 0.068.5	mm. 12.1	mm. 2.4	0.691
	2	» 0.034.0	» 8.3	» 1.7	» 0.056.0	» 10.8	» 2.0	0.647
	3	» 0.024.5	» 10.0	» 1.5	» 0.035.0	» 11.7	» 1.9	0.429
	4	» 0.008.0	» 7.9	» 0.9	» 0.015.5	» 9.5	» 1.3	0.937
	5	» 0.006.5	» 5.9	» 0.9	» 0.012.0	» 7.4	» 1.3	0.846
medio		» *0.022.7*			» *0.037.4*			*0.648*
Crist. semplici brevi	6	» 0.057.5	» 6.5	» 3.2	» 0.093.5	» 9.4	» 3.4	0.626
	7	» 0.035.5	» 5.4	» 2.5	» 0.058.0	» 8.0	» 3.2	0.634
	8	» 0.016.5	» 3.8	» 2.2	» 0.032.0	» 6.3	» 2.5	0.939
medio		» *0.036.5*			» *0.061.1*			*0.674*
Crist. con geminaz. duplicata	9	» 0.035.0	» 5.5	» 2.7	» 0.120.5	» 8.4	» 4.1	2.443
	10	« 0.026.0	» 6.4	» 2.2	» 0.102.5	» 8.9	» 3.5	2.942
	11	» 0.013.0	» 3.3	» 2.4	» 0.033.5	» 6.1	» 2.6	1.577
	12	» 0.007.5	» 3.0	» 2.0	» 0.018.5	» 5.2	» 2.2	1.467
medio		» *0.020.4*			» *0.067.8*			*2.373*
			Diametro ω'o, fig. 4	*Diametro* CC', fig. 18		*Diametro* ω'o, fig. 4	*Diametro* CC', fig. 18	
Cristalli con geminazione varia	13	» 0.036.0	» 4.3	» 3.2	» 0.159.0	» 7.2	» 5.3	3.417
	14	» 0.027.0	» 4.0	» 3.3	» 0.098.5	» 5.5	» 5.1	2.648
	15	» 0.020.0	» 4.0	» 3.0	» 0.156.0	» 9.0	» 6.2	6.800
	16	» 0.015.0	» 3.0	» 2.7	» 0.073.5	» 5.3	» 5.0	3.900
	17	» 0.011.5	» 3.6	» 2.5	» 0.103.5	» 8.1	» 4.8	8.000
medio		» *0.021.9*			» *0.118.1*			*4.393*

Ragguagliati gli aumenti in peso che presentano i cristalli gemini con i medesimi aumenti dei cristalli semplici, non può cader dubbio sulla grande preponderanza dei primi in tutti i saggi fatti, comunque variando la chimica composizione dei liquori cristallizzanti. Nondimeno questa stessa preponderanza è di molto inferiore a quella rinvenuta nei cristalli

rapidamente ingranditi nelle soluzioni in cui si erano generati. Negli esperimenti per i cristalli immersi nelle soluzioni cristallizzanti si ha una giusta misura della lentezza come ha proceduto il loro accrescimento paragonando al tempo trascorso l' aumento di peso ; ed in essi l' aumento dei cristalli gemini può ritenersi approssimativamente quadruplo di quello dei cristalli semplici. Dai tre saggi di sopra riferiti per i cristalli rapidamente ingranditi, si ha lo stesso aumento dei cristalli gemini circa diciotto volte maggiore.

Un altro fatto che apparisce evidente per le cifre riportate nei precedenti quadri consiste nella maniera come avviene l' accrescimento dei cristalli semplici assai sproporzionatamente maggiore nel verso dell'asse $\varpi'\varpi$, fig. 1, che nella direzione $\varepsilon\varepsilon'$, e nella direzione $C'C$, fig. 12, non essendovi alcuna sensibile differenza tra le dimensioni $\varepsilon\varepsilon'$, e $C'C$. A questa medesima conseguenza conduce la semplice considerazione della forma costantemente bislunga dei cristalli semplici. E dando allo stesso fatto una diversa espressione, possiam dire che le molecole sono attratte con maggior forza dalle faccette m, e, ϖ, ed in generale dalle faccette situate verso la estremità ϖ', ϖ, che dalle altre faccette più grandi situate nella zona C, ν, μ, ε. Diremo le prime faccette di forte attrazione e le seconde di debole attrazione, e ciò equivale al dire che vi sia nei cristalli la proprietà di attrarre fortemente nelle direzioni delle perpendicolari calate dal centro alle prime facce, e di attrarre debolmente nelle direzioni delle perpendicolari calate sulle seconde.

Ove poi si pon mente alle facce che sogliono terminare i cristalli gemini, si troverà che in essi, al contrario di ciò che avviene nei cristalli semplici, le facce μ, fig. 4 e 5, sono piccolissime o mancano del tutto, mentre sono grandissime le facce m; e da ciò deriva la forma dei gruppi somigliante a due piramidi esagone congiunte per le basi. Se le facce μ, m nei cristalli gemini serbassero le medesime proporzioni in grandezza che nei cristalli semplici, essi dovrebbero offrire, siccome veggonsi rappresentate nella figura 2, le facce μ, μ', μ'', ε, ε', ε'' che s'incontrano con angoli rientranti molto estese, ed in proporzione delle facce m, m', m'' anche più estese di quel che appariscono nella figura. Il trovarsi per l'opposto le facce μ, ν, ε assai piccole paragonate alle facce m, n, e, vuol dire che l'ingrandimento sulle prime è eguale o quasi eguale all'ingrandimento sulle seconde; che le prime cioè sono divenute ancor esse faccette di forte attrazione quasi come le seconde. È facile poi rendersi ragione della piccolezza o mancanza delle facce μ, ν, ε nei cristalli gemini

per la loro posizione ordinata ad incontrarsi con angoli rientranti. La quale posizione impedisce che nelle medesime facce apparisse quella estensione che esse avrebbero nei cristalli semplici, quando anche in questi si verificasse la condizione dell'incremento sulle facce μ, ν, ε quasi eguale a quello sulle facce m, n, e.

Quindi è che assicurato nei cristalli semplici il natural carattere di forte attrazione delle faccette m, n, e e di debole attrazione delle faccette μ, ν, ε, l'effetto immediato della geminazione consiste nel rendere faccette di forte attrazione le μ, ν, ε al pari o quasi al pari delle m, n, e.

Comparando nei quadri i risultamenti ottenuti con le diverse categorie di cristalli, si scorge chiaro che i cristalli con geminazione duplicata s'ingrandiscono più dei cristalli semplici; ed i cristalli con altre maniere di geminazioni, per le quali si trovano esternamente assai grandi le facce m, essendo piccolissime o mancando le facce μ, s'ingrandiscono più dei cristalli con geminazione duplicata. Ciò mostra che quantunque le μ, ν, ε diventino nei cristalli gemini comparati ai semplici faccette di forte attrazione, le faccette m, n, e restano sempre di più forte attrazione delle precedenti. Questa conseguenza apparirà ancora più chiara ove si consideri che i cristalli con geminazione duplicata per la loro forma bislunga, a parità di peso, hanno più estesa superficie degli altri cristalli gemini, e si dovrebbero più di questi ingrandire se le μ, ν, ε non avessero sempre minor forza attrattiva delle altre m, n, e. Rimarrebbe ora a sapere se le stesse facce m, n, e, α acquistino ancor esse per la geminazione maggior forza attrattiva di quella che posseggono nei cristalli semplici. Se si potessero avere cristalli assai più grandi di solfato potassico, non sarebbe difficile misurare con sufficiente esattezza l'estensione delle facce m nelle diverse maniere di cristalli che si vogliono mettere ad esperienza, e risolvere così il dubbio. Ma la piccolezza dei cristalli sopra i quali ho potuto sperimentare non mi ha permesso nemmeno di tentare questa sorta di saggi. Sopra tutto i cristalli semplici hanno le facce m sempre minutissime in proporzione della loro grandezza; e quando si cerca ingrandirli, tenendoli per molto tempo nelle acque madri, a lungo andare succede qualche geminazione superficiale, o sopraggiungono altre imperfezioni che li rendono mal proprii agli esperimenti.

Intanto conviene esaminare se ad altre cagioni possa attribuirsi il riferito maggiore incremento dei cristalli gemini. Se immaginiamo nel suo primordio un cristallino trigemino della forma rappresentata dalla figura 3, abbiamo che necessaria conseguenza della geminazione è l'incon-

trarsi delle facce μ e μ', μ e μ'', ε ed ε', ε ed ε'' ecc. con angoli rientranti all'esterno. Quindi è che le rispettive posizioni che occupano le facce μ ed ε potrebbero dar luogo a credere che lo stare così le une di rincontro alle altre sia cagione che con maggiore energia le molecole siano sollecitate a depositarsi su di esse, e quindi a produrre il riempimento degli angoli rientranti che troviamo nei gruppi geminati ingranditi, fig. 4 e 5. In questa supposizione il più rapido accrescimento dei cristalli gemini non deriverebbe realmente dallo stesso fenomeno della geminazione, ma dalla scambievole posizione che prendono nell'aggrupparsi i cristalli gemini. Questa ipotesi intanto trovo non potersi ammettere per molte ragioni. E mi basta menzionarne una sola derivante dai cristalli con geminazione duplicata, fig. 9, la cui forma è affatto simile a quella dei cristalli semplici, senza angoli rientranti, e non mancano per questo di avere più rapido ingrandimento.

Da ultimo volgendo la nostra attenzione sull'influenza che la diversa composizione chimica dei liquori cristallizzanti esercita sul medesimo incremento dei cristalli in essi immersi, troviamo, almeno per le soluzioni sperimentate, che esse senza alterare profondamente la legge del più rapido ingrandimento dei cristalli gemini, ne rendono l'efficacia alquanto variabile. Sopra tutto è notevole che mentre nella soluzione *A* di puro solfato potassico, e nell'altra *C* con potassa caustica l'ingrandimento dei cristalli semplici sulle facce della zona C, μ, ν, ε è così debole che spesso non è stato possibile determinarlo, nella soluzione **D** con carbonato potassico l'ingrandimento sulle medesime facce è molto maggiore. La stessa differenza ho fatto innanzi avvertire per i cristalli nella loro origine prodotti nelle soluzioni con carbonato di potassa. E questo fatto non fa che rendere più complicato l'argomento che ho preso ad esaminare, dappoichè la presenza del carbonato potassico nel liquore produce lo stesso effetto che abbiam veduto derivare dalla geminazione, quantunque in minori proporzioni.

Solfato potassico romboedrico.

Nei cristalli gemini di questa specie non ci ha distinto piano di geminazione; ed invece di paragonarli ad aggruppamenti di due o più cristalli, meglio sarebbe considerarli come formati da due o più masse cristalline scambievolmente allogate in due determinate posizioni. Dappoichè un cristallo, o una massa cristallina si congiunge all'altra con superficie d'irregolarissima figura. I cristalli rappresentati nelle figure 30 a 35, mostrando chiaramente all'esterno gl'irregolari e variabili confini che distinguono le masse cristalline d'identica posizione dalle altre di posizione diversa, fanno comprendere come le medesime masse si congiungono internamente. Per maggiore chiarezza ho distinto con le lettere m, μ, e le parti del gruppo geminato identicamente situate in una delle due posizioni, e con le lettere m', μ', e' le parti che sono allogate nell'altra posizione.

Non ho tralasciato di sperimentare sopra i cristalli semplici ed i gemini di questa specie per assicurarmi se anche in essi si manifestasse la differenza rinvenuta nell'altra specie prismatica, ed i risultamenti quì appresso riportati non dimostrano sensibile differenza d'ingrandimento tra le due maniere di cristalli. Non pertanto debbo avvertire che quantunque i cristalli adoperati in questi saggi erano gli uni distintamente semplici, come quello rappresentato nella figura 20, e gli altri geminati, siccome sono figurati nei numeri 30 a 35, dopo l'avvenuto ingrandimento i cristalli semplici presentavano alcune delle facce μ, in origine convesse, divenute piane nel mezzo. La quale trasformazione ho già mostrato nella memoria sulla polisimmetria (pag. 35 a 38) derivare da geminazione superficiale avvenuta sulle medesime facce μ. Egli è però che nel corso dell'esperimento, non essendo del tutto escluso il fenomeno della geminazione dai cristalli che in principio erano semplici, non possiamo a rigore conchiudere che il particolar modo di geminarsi i cristalli di solfato potassico romboedrico non dia luogo ad alcuna differenza di accrescimento.

	Cristalli semplici				Cristalli gemini		
N.°	*Peso prima della immersione*	*Peso quattro giorni dopo la immersione*	*Aumento rapportato al peso primitivo*	N.°	*Peso prima della immersione*	*Peso quattro giorni dopo la immersione*	*Aumento rapportato al peso primitivo*
1	grm. 0.712.0	grm. 1.358.0	0.906	1	grm. 0.375.5	grm. 0.767.0	1.043
2	» 0.467.0	» 0.901.0	0.929	2	» 0.315.5	» 0.624.5	0.979
3	» 0.382.0	» 0.688.0	0.801	3	» 0.250.5	» 0.496.0	0.980
4	» 0.255.0	» 0.508.5	0.994	4	» 0.266.0	» 0.520.5	0.957
5	» 0.145.5	» 0.347.0	1.385	5	» 0.235.5	» 0.483.5	1.053
6	» 0.072.0	» 0.213.0	1.958	6	» 0.072.0	» 0.188.0	1.611
7	» 0.055.5	» 0.171.0	2.081	7	» 0.051.0	» 0.149.5	1.931
medio	» *0.298.4*	» *0.598.1*	*1.004*		» *0.223.7*	» *0.461.3*	*1.062*

Nitrato di stronziana.

Dalle soluzioni di nitrato di stronziana abbandonate alla spontanea evaporazione a temperature alquanto maggiori di 25° si hanno cristalli anidri appartenenti al sistema del cubo, ed il più delle volte alcuni semplici, altri geminati mescolati alla rinfusa. Le due qualità di cristalli si distinguono per essere i primi trasparenti ed i secondi d'ordinario traslucidi o opachi e più grossi dei precedenti; talchè il maggiore ingrandimento dei cristalli gemini in paragone dei cristalli semplici si scorgerà ben distinto ove si faccia attenzione a quel che avviene nelle soluzioni cristallizzanti lasciate per alquanti giorni tranquillamente evaporare. Più tempo passa , e più rapida procedendo l'evaporazione, senza che sia disturbata la quiete delle acque madri, meglio apparirà manifesto il preponderante incremento dei cristalli gemini; ed a lungo andare mi è sembrato talvolta quasi i soli cristalli gemini s'ingrandissero, o quasi l'ingrandimento di questi impedisse l'ingrandirsi dei cristalli semplici. Avendo cercato stabilire di quanto l'accrescimento dei gruppi geminati avanzasse quello dei cristalli semplici con le medesime norme seguite pel solfato potassico prismatico, non credo di essere riuscito a giuste conclusioni. Dappoichè il liquore nel quale aveva immerso le due qualità di cristalli per farli ingrandire ha cominciato ben presto a depositare novelli cristallini e però non ho potuto prolungare oltre dieci giorni l'espe-

rimento. Quindi per le cifre registrate nello specchietto posto in fine di questo articolo, quantunque rimanga confermato nel nitrato di stronziana la differenza di accrescimento tra i cristalli semplici ed i geminati, questi non si trovano superare i primi che poco più d'un terzo nell'aumento di peso; eccedenza che non dubito avrei trovato maggiore se non fosse sopraggiunta la comparsa dei novelli cristalli che han ritardato l'ingrandirsi di quelli immersi nel liquore cristallizzante.

I cristalli gemini di nitrato di stronziana si congiungono per le facce dell'ottaedro, come avviene per le altre sostanze le cui forme cristalline si riferiscono al sistema del cubo. Tuttavia vi sono in essi tali particolari che non ho mai osservato così costanti in altri cristalli siano naturali, siano artefatti. D'ordinario non sono due cristalli soltanto, ma tre o maggior numero di cristalli che si congiungono con i piani di geminazione tra loro paralleli, o anche talvolta con i piani di geminazione inclinati, come le facce dell'ottaedro, di 109°28′. A questa condizione, della quale ho osservato qualche esempio nei cristalli di spinello del Ceilan, ne vanno unite due altre più notevoli. La prima di esse è il prolungarsi ciascun cristallo da una parte o dall'altra oltre il piano di geminazione in guisa che la medesima faccia per la quale un cristallo si congiunge all'altro si trova in parte posta allo scoverto, come la faccia *o* nella figura 72, che rappresenta esattamente secondo l'originale un cristallo gemino di nitrato di stronziana. Per intendere l'altra condizione che alla precedente va connessa, fa d'uopo aver presente come nei cristalli gemini del sistema cubico, quando vi sono le facce dell'ottaedro, tre facce di questa forma pertinenti ad un cristallo s'incontrano con angoli rientranti di 141°4′ con tre facce dell'ottaedro dell'altro cristallo. Questi angoli rientranti non ho mai osservato nel nitrato di stronziana; ed invece, talmente si distende ciascun cristallo del gruppo geminato rispettivamente agli altri che le facce dell'ottaedro dell'uno s'incontrano con angoli rientranti con le facce del cubo dell'altro. Nella figura 75, che rappresenta con maggiori dimensioni una parte del cristallo disegnato nella figura 72, ho distinto con le lettere o, o' due facce appartenenti all'ottaedro del cristallo $Coo'o''$ e con la lettera k' una faccia che appartiene al cubo dell'altro cristallo $k\infty k'\infty'$. Quindi facendo attenzione a quel che mostra la medesima figura, si scorgerà lo strano estendersi dei due cristalli l'uno rispettivamente all'altro, in modo tale da riuscirne sì l'incontro con angolo rientrante di 125°16′ della faccia o con k', che l'incontro più notevole con angolo rientrante di 78°54′ del-

l'altra faccia o' con la medesima faccia k'. Le riferite forme, fuori l'ordinario, dei cristalli gemini del nitrato di stronziana dimostrano in essi la virtù d'ingrandirsi maggiormente in alcune direzioni, siccome nel verso del piano di geminazione, la quale virtù non si rinviene nei cristalli semplici.

D'altra parte poi gli angoli rientranti che più volte in essi si ripetono rendono la loro superficie più estesa di quella che presentano i cristalli semplici di egual mole. E da ciò deriva non lieve difficoltà di trovare per ciascuna specie di cristalli esemplari che presso a poco si pareggiassero in superficie come in peso; la quale difficoltà ho cercato di vincere negli esperimenti scegliendo tra i cristalli semplici quelli che erano più depressi, e tra i cristalli gemini quelli che meno profondi presentavano gli angoli rientranti.

	Cristalli semplici				Cristalli gemini		
N.°	*Peso prima della immersione*	*Peso dieci giorni dopo la immersione*	*Aumento rapportato al peso primitivo*	N.°	*Peso prima della immersione*	*Peso dieci giorni dopo la immersione*	*Aumento rapportato al peso primitivo*
1	grm. 0.411.5	grm. 0.595.5	0.447	1	grm. 0.267.5	grm. 0.457.0	0.708
2	» 0.217.5	» 0.335.0	0.540	2	» 0.151.0	» 0.274.5	0.818
3	» 0.170.0	» 0.284.0	0.671	3	» 0.150.5	» 0.272.0	0.807
4	» 0.129.0	» 0.219.5	0.702	4	» 0.097.5	» 0.192.0	0.970
5	» 0.113.5	» 0.209.0	0.841 (a)	5	» 0.097.0	» 0.185.5	0.912
6	» 0.080.0	» 0.139.5	0.744	6	» 0.062.0	» 0.128.0	1.065
7	» 0.049.0	» 0.086.5	0.765	7	» 0.022.5	» 0.064.5	1.867
medio	» *0.167.2*	» *0.267.0*	*0.597*		» *0.121.1*	» *0.224.8*	*0.856*

Ossalato di ammonio e rame.

I cristalli dell'ossalato di ammonio e rame sono triclini con due direzioni di clivaggio quasi egualmente nitide parallele alle facce B e C, fig. 74, tra loro inclinate di 85°23'. Le facce B sogliono essere assai più

(a) In questo cristallo vi è stato maggiore ingrandimento in proporzione degli altri cristalli semplici; e quantunque non avessi in esso ravvisato alcun segno di geminazione, si differenziava dagli altri cristalli semplici, perchè invece di essere trasparente, era alquanto opaco, come d'ordinario sono i cristalli gemini del nitrato di stronziana.

grandi delle altre, e tra le principali specie di faccette vi sono le seguenti inclinazioni:

* A' sopra $B' = 120°54'$	B' sopra $o' = 122°26'$	B sopra $v = 145°57'$
· A' » $C' = 78\ 58$	· A' » $c = 150\ 12$	B » $n = 131\ 34$
* B' » $C' = 94\ 38$	B » $u = 142\ 49$	C » $n = 123\ 54$
* B » $e = 105\ 42$	A' » $u' = 114\ 28$	A' » $n = 76\ 32$

a sopra $b = 122°44'$; a sopra $c = 74°12'$; b sopra $c = 102°16'$;

$$a : b : c = 1 : 1,3047 : 1,6402 .$$

A 100 , B 010 , C 001 , e 110 , o 101 , u 011 , v $0\bar{1}1$, n 121

Spesso i cristalli sono gemini, come quello disegnato nella figura 74, con l'asse di rivoluzione parallelo agli spigoli formati dalle facce della zona ABe. Quando nel gruppo geminato il cristallo situato come $A'B'C'$ trovasi a sinistra, le faccette di ciascun cristallo si estendono a vicenda con tale regolarità che gli spigoli formati dai loro incontri si trovano più o meno esattamente disposti intorno ad un piano inclinato nell'interno del cristallo di 73°25′ sulle facce B e di 106°35′ sulle facce B'. Si hanno in tal caso le inclinazioni dalla faccia C' del cristallo sinistro sulla faccia C del cristallo destro eguale a 147°6′ con l'angolo superiore rientrante e l'inferiore prominente; di v' sopra u eguale a 161°55′ con angolo rientrante; di u' sopra o eguale a 145°7′ con angolo rientrante. Talvolta invece d'incontrarsi superiormente v' con u, s'incontrano o' con u facendo angolo diedro prominente di 145°7′. Intanto la faccia B' si trova situata nel medesimo piano con B, e la prima di esse si distingue dall'altra per essere striata nel verso dello spigolo $o'B'$. In altri gruppi geminati che hanno a dritta il cristallo situato come $A'B'C'$ di raro gli spigoli formati dall'incontro delle facce di un cristallo con le facce dell'altro si trovano allogati intorno ad un medesimo piano. D'ordinario le facce B e B', restando parallele, non si congiungono in un medesimo piano, e ciascun cristallo, secondo la variabile loro estensione, in diversi modi riesce prominente sull'altro, formandosi così profondi angoli rientranti che non corrispondono ad un piano comune. Questa sorta di cristalli non sono stati mai adoperati negli esperimenti.

Nel fare i medesimi esperimenti ho dovuto tener conto di altri particolari caratteri dei cristalli dell'ossalato di ammonio e rame che di leg-

gieri vengono a complicare il loro ingrandimento. Sì per i cristalli semplici come per quelli geminati, quando il loro incremento procede con un certo grado di rapidità, suole avvenire che su di essi si generano novelli cristallini. I quali cristallini mentre per un verso hanno una determinata situazione che li mette in rapporto col cristallo primitivo, per un altro verso rilevano in tal modo su di esso prominenti che sembrano del tutto indipendenti. I cristallini che come appendici si producono sopra i cristalli semplici sono impiantati sopra una delle facce C; talvolta essi stessi sono semplici, e le loro facce sono parallele alle facce della medesima specie del cristallo maggiore; altre volte i cristallini sono gemini ed uno dei due che compongono il gruppetto geminato ha la medesima situazione del cristallo primitivo, siccome è reso manifesto dal parallelismo delle facce della medesima specie. I cristallini che si generano sopra i cristalli gemini, sono gemini ancor essi, ed impiantati ove s' incontrano le facce C, sia dalla parte ove le facce C formano angolo prominente, sia dalla parte opposta ove formano angolo rientrante. Ed in quest' ultima parte (figura 74 superiormente) ove le facce C lasciano angusto spazio all' ingrandimento dei novelli cristallini, essi sono assai ristretti e quasi peduncolati ove s' impiantano. Nei cristallini poi vi è la medesima specie di geminazione di quella del primo cristallo gemino, talchè sono dalla medesima parte tutti quelli situati come il cristallo $A'B'C'$.

Prendendo in considerazione i riferiti particolari, perchè tra i cristalli semplici ed i geminati adoperati nello sperimento vi fosse stato assai prossimamente il medesimo rapporto tra il loro peso e l'estensione delle loro superficie, ho prescelto cristalli gemini, come quello rappresentato nella figura 74, con le facce B', B unite in un medesimo piano. E per impedire la produzione dei cristallini che sogliono prodursi sulle facce C ho procurato ritardare l'evaporazione del liquore cristallizzante tenendo in parte chiusa l'apertura della coppa. Nel saggio con queste precauzioni eseguito alla temperatura variabile tra 19°, 8 e 21°, 5, l'ingrandimento dei cristalli gemini, come apparisce nel seguente quadro, è stato alquanto maggiore del doppio dell'ingrandimento dei cristalli semplici.

	Cristalli semplici				Cristalli gemini		
N.°	Peso prima della immersione	Peso sette giorni dopo la immersione	Aumento rapportato al peso primitivo	N.°	Peso prima della immersione	Peso sette giorni dopo la immersione	Aumento rapportato al peso primitivo
1	grm. 0.089.0	grm. 0.127.0	0.427	1	grm. 0.113.0	grm. 0.236.5	1.093
2	» 0.039.0	» 0.067.0	0.718	2	» 0.049.0	» 0.122.5	1.500
3	» 0.034.5	» 0.060.0	0.739	3	» 0.039.0	» 0.097.0	1.487
4	» 0.020.5	» 0.042.5	1.073	4	» 0.026.5	» 0.074.5	1.811
5	» 0.012.5	» 0.027.0	1.160	5	» 0.012.5	» 0.042.5	2.400
medio	» *0.039.1*	» *0.064.7*	*0.655*		» *0.048.0*	» *0.114.6*	*1.388*

Paratartrato acido di soda.

Sopra i cristalli triclini del paratartrato acido di soda non ho potuto fare particolari esperimenti comparativi immergendo nel liquore cristallizzante cristalli semplici e geminati di peso determinato; dappoichè in tal caso si producono cristalli della medesima sostanza le cui forme hanno il tipo di simmetria che si riferisce al sistema prismatico; ed i cristalli immersi poco o nulla s'ingrandiscono in principio; e dopo qualche tempo, se le muffe non vengono a guastare la soluzione, col progredire l'ingrandimento dei cristalli nuovamente generati, quelli immersi s'impiccoliscono e finiscono col restare del tutto disciolti. Tuttavia tra i cristalli triclini che si generano nelle soluzioni convenevolmente concentrate, e lasciate per qualche giorno alla spontanea evaporazione, avendone spesso osservato alquanti semplici, fig. 43, uniti ai cristalli gemini, fig. 44, 45, 46, più abbondanti, ho sempre trovato i secondi assai più grossi dei primi. Nello studiare il paratartrato acido di soda triclino sotto il rapporto dell'ingrandimento dei suoi cristalli non è stato possibile assicurarmi della contemporanea apparizione dei cristalli semplici e dei geminati. Talvolta mi è sembrato che i cristalli in origine semplici divenissero gemini in seguito, e pervenuti in tale stato s'ingrandissero con rapidità molto maggiore che per lo innanzi. Ma la conoscenza del come avvengono questi fenomeni, in una sostanza pur troppo complicata nei suoi caratteri cristallografici, è avvolta in difficoltà non facili a supe-

rarsi. L'osservazione pertanto mi ha ripetute volte confermato che ai cristalli gemini dell' ordinaria grandezza di quattro a sei millimetri nel loro maggior diametro, e che talvolta oltrepassano i quindici millimetri, vanno uniti alquanti cristalli semplici di circa un millimetro, e che di raro misurano poco più di due millimetri; dalle quali proporzioni si può calcolare, prendendo le medie grandezze, che i primi avanzano in grandezza i secondi meglio di venti volte.

INDICE

Introduzione, pag. 1; notevoli fenomeni che sono in relazione con la geminazione dei cristalli, p. 2; teoria dei cristalli gemini, p. 4. Esperimenti con i cristalli di solfato potassico prismatico, p. 8; considerazioni sopra i medesimi esperimenti, p. 15. Esperimenti e considerazioni sopra i cristalli di solfato potassico romboedrico, p. 19. Nitrato di stronziana, produzione dei cristalli semplici uniti ai geminati, p. 20; caratteri straordinarii dei cristalli gemini, p. 21; esperimenti con i cristalli di nitrato di stronziana, p. 22. Ossalato di ammonio e rame, p. 22; particolari caratteri dei suoi cristalli, p. 23; esperimenti fatti con i medesimi, p. 25. Paratartrato acido di soda, ingrandimento dei suoi cristalli, p. 25.

AVVERTIMENTO

Per le figure citate in questa memoria si riscontrino le tavole che accompagnano la memoria sulla *polisimmetria dei cristalli*.

Vol. II. N.° 4.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA
DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SULL'OZONO ATMOSFERICO

NUOVE INDAGINI

DEL SOCIO ORDINARIO L. PALMIERI.

MEMORIA

letta nella tornata del dì 10 novembre 1863.

Fin dallo scorso secolo fu osservato che l'ossigeno per mezzo dell'elettricità poteva modificarsi ed acquistare un esaltamento chimico che punto non si ravvisa nell'ossigeno ordinario. Ma fu Schönbein che da pochi anni scoprendo nuovi fatti del medesimo genere chiamò specialmente l'attenzione dei chimici sopra questo particolar modo di essere, o stato allotropico dell'ossigeno, cui egli diede il nome di *Ozono* dall'odore col quale la sua presenza suolsi annunziare, odore del tutto simile a quello che si avverte in vicinanza di poderosa macchina elettrica messa in attività in mezzo ad aria secca.

Sebbene dapprima l'ozono si credesse un composto ossigenato e propriamente un vero perossido d'idrogeno espresso dalla formola HO^3, pure dopo che l'ossigeno secco e non commisto ad altra materia fu convertito in ozono per mezzo delle scariche elettriche, parve impossibile ricusare il concetto di una verace allotropìa di questo fluido aeriforme. Molte sono le maniere di ottenere l'ozono, le scariche elettriche, il fosforo umido ad una temperatura alquanto elevata, l'elettrolisi dell'acqua a temperature prossime o meglio inferiori allo zero, ecc.

Assicurata dunque l'esistenza dell' ozono nel laboratorio, si ebbe ragione di sospettare che anche l'ossigeno dell'aria potesse assumere più o meno questo stato allotropico, sia per effetto dell'elettricità atmosferica, sia per altre cagioni. E siccome l'ozono ha tra le altre proprietà, quella di scomporre il ioduro di potassio, così Schönbein preparò le sue carti reagenti con soluzione di questo ioduro ed amido, le quali colorandosi più o meno all'azione dell'ozono potevano riuscire acconce a dare una certa misura della quantità di esso esistente nell'aria. Di quì l'Ozonometro che passò ben presto fra le mani dei meteorologisti, e col quale parecchie serie di osservazioni furon fatte, esponendo le carte anzidette all'aria libera per 12 ore, secondo Schönbein medesimo aveva consigliato. A parte le cagioni perturbatrici delle quali appresso si dirà, quel metodo delle 12 ore non potea menare ad alcuna conchiusione sicura, siccome dimostrai già in altro mio lavoro; imperciocchè la carta nel corso di 12 ore si colora da una parte per le cause siano quali si vogliano che scompongono il ioduro di potassico, e dall'altra si scolora perchè il iodo va via; onde alla fine si à una tinta che non è nè la somma, nè la media delle parziali colorazioni patite in sì lungo tempo.

Essendosi poscia notato che quelle carte possono colorirsi per l'azione di molti acidi, come del pari essere scolorite dall'ammoniaca, Houzeau volle prepararle in altro modo: prese dunque delle carte azurre di tornasole e per una debole soluzione acida fece sì che prendessero una tinta rossa piuttosto leggiera, indi immerse per metà nella consueta soluzione amido-iodurata, ed asciugate le esponeva all'aria o all'ozono artificiale. Egli è chiaro che operando sulla carta un acido, deve arrossire di più la parte non preparata col ioduro potassico, ed operandovi un alcali dovrà reintegrare il primiero colore; ma se invece è l'ozono che vi esercita la sua azione, allora il ioduro di potassio scomponendosi, dovrà repristinarsi più o meno solo il colore della metà iodurata, rimanendo l'altra metà senza verun cangiamento. Ciò non pertanto conviene osservare che sulle carte ozonoscopiche operano benanche altre cagioni, che l'ozono, come si dirà, esercita eziandio un'azione sulle carte di tornasole e finalmente che le carte di Houzeau sono poco sensibili (1). Ci ha benanco delle carte preparate con solfato di protossido di manganese con la tintura di Guaiaco, ecc; ma tutte presentano più o meno, questi ed

(1) Houzeau ha nell'aprile di questo anno proposto anche un altro metodo che riesce non solo qualitativo, ma eziandio quantitativo: di esso discorrerò appresso.

altri inconvenienti, per cui quasi sempre nelle investigazioni ozonoscopiche si fece ricorso alle carte amido-iodurate variamente sensibili per modo che James di Sédan ridusse a 21 le tinte della sua gamma cromatica che Schönbein aveva diviso in 10 ed Hozeau in 5.

Ora vedendo che sulle carte ozonoscopiche opera la luce in presenza dell'ossigeno ordinario, che molto efficacemente vi operano il cloro ed i vapori nitrosi, anche in assenza della luce, che esse si colorano al buio coi vapori dell'etere del creosoto ecc. in presenza dell'ossigeno, che si tingono poco coi vapori dell'acquarzente e più o meno con quelli degli olî essenziali, sorger dovea naturalmente il dubbio intorno alla causa della colorazione delle carte ozonoscopiche, esposte all'aria, e quindi il Professor Silvestri (1) e più decisamente il Cloez non trovarono alcuna ragione per accettare l'esistenza dell'ozono atmosferico. Il chimico francese dopo molti studii sul proposito dichiara francamente, che tuttociò che si è fatto finora per mostrare la presenza dell'ozono nell'aria e per misurarne la quantità è privo di fondamento (2), e poco appresso soggiunge: *fino a tanto che, dietro matura disamina, tutte le quistioni relative a quest' argomento non siano risolute, sarà permesso dubitare della presenza dell' ozono nell' atmosfera* (3). Codesti dubbii del Cloez vengono ribaditi dall'altro importantissimo lavoro di lui riguardante la nitrificazione, dal quale risulta, come dalle belle ricerche antecedenti del Professor de Luca, la esistenza nell'aria dell'acido nitrico o di altri composti nitrosi ossigenati, capaci a colorire le carte ozonoscopiche.

Stando così le cose prima di por mano a nuove indagini meteorologiche sull'ozono atmosferico, io sentii la necessità di fare un passo indietro per assicurarmi prima di tutto se veramente vi sia l'ozono nell'aria, e dopo un anno di studii, *provando e riprovando*, secondo il motto dell'Accademia del Cimento, credo di esser giunto a dare le prove irrecusabili dell'esistenza dell'ozono meteorico, naturale o atmosferico che dire si voglia.

Prima di tutto ho dovuto rivedere la serie delle cagioni da cui le carte ozonoscopiche possono essere colorite per conoscere poscia se mettendosi al coperto di queste l'aria possedesse tuttavia una virtù propria di scomporre il ioduro di potassio, e se questa virtù fosse in tutto iden-

(1) Rendiconto de'lavori eseguiti nel Laboratorio di chimica dell'Università di Pisa sotto la direzione del prof. Sebastiano de Luca p. 11. Dispensa 1ª Pisa 1861.

(2) Annales de Chimie et de Physique, 3.ª Série, vol. 50, pag. 82.

(3) Pag. 95.

*

tica a quella che diamo all'ossigeno nei laboratorii, quando lo trasformiamo in ozono. Per la prima parte sarò breve, perchè ò potuto far tesoro del lavoro del Cloez, onde dirò solo quello che vi ho aggiunto di proprio; per la seconda poi conviene che mi allarghi alquanto più in parole, essendo l'argomento nuovo, intricato ed importante (1).

La Luce. La luce colora le carte di Schönbein in presenza dell'ossigeno solo o misto a qualsiasi altro fluido aeriforme di per sè stesso inerte, come azoto, idrogeno, acido carbonico, ossido di carbonio, ecc., ancorchè l'ossigeno vi sia in quantità tenuissima; codesta colorazione è favorita dal vapore acqueo per modo che in uno spazio perfettamente secco punto non si appalesa o solo debolissimamente immergendo la carta in acqua stillata. Nelle stesse condizioni poi non ò mai visto colorirsi le carte preparate col solfato di protossido di manganese, nè quelle di Houzeau esposte per 48 ore alla luce diretta o diffusa in qualunque stagione dell'anno; che anzi le prime talvolta da giallo-ranciate diventano bianche ed esposte così all'aria libera ripigliano di nuovo il loro colorito e poscia immerse in acqua prendono la tinta consueta attribuita all'ozono. Siffatte sperienze, siccome ognuno intende van fatte in recipienti di vetro perfettamente chiusi. Niuna carta ozonoscopica si colora nell'idrogeno, nell'azoto, nell'ossido di carbonio, nel vapore acqueo per mezzo della luce, siccome avea osservato il Cloez; e se talvolta avviene il contrario, è segno manifesto o di piccola quantità di ossigeno o di tracce di cloro, di acido cloroidrico, o di vapori nitrosi. Le carte che in recipienti chiusi esposti alla luce si colorano in presenza dell'ossigeno, restano inalterate nelle tenebre. Ma la luce è assolutamente inetta a colorire le carte nel vuoto torricelliano secco ed umido ed anche in quello della macchina pneumatica mantenuto in modo che il provino non superi i 5 o 6 millimetri. Vedendo che le carte nell'ossigeno ordinario si colorano col favore della luce, alcuni furono indotti a pensare che questa avesse la virtù di convertire l'ossigeno in ozono ovvero dargli lo stato nascente, come par che lo dia al cloro in presenza dell'idrogeno, i quali per essa prontamente si combinano. Il

(1) La maggior parte de'reagenti ed altre sostanze di cui ho fatto uso sonomi state somministrate dal laboratorio di chimica dell'Università per l'esemplare cortesia del professore Sebastiano de Luca il quale mi ha dato non pochi altri aiuti, permettendo eziandio che il suo abile coadiutore Giuseppe Giordano mi prestasse efficace cooperazione, preparandomi ciocchè mi potesse occorrere. Spesso ho fatto capo anche dal prof. Ubaldini ch'è gentile quanto abile ed esperto sperimentatore. S'abbiano tutti un attestato della mia gratitudine.

Cloez per provare che la cosa non procede a questo modo à esposte due carte ozonoscopiche al passaggio dell'aria vivamente illuminata dal sole, una delle quali era esposta e l'altra difesa dalla luce ed à veduto colorirsi l'una e non l'altra. Dal che convien conchiudere che la luce di per sè sola potrà polarizzare l'ossigeno in presenza del ioduro di potassio, ma non è atta a dargli in modo permanente la forma di ozono, come fanno le cagioni delle quali di sopra è detto.

Un altro fatto degno di nota è che la soluzione amido-iodurata non si colora in vasi chiusi esposti alla luce, e nemmeno in vasi aperti innanzi ai più potenti raggi solari. Se in questa soluzione bagnate una striscia di carta e poscia la collocate verticalmente in guisa che la parte inferiore peschi nella soluzione, è chiaro che una porzione di questa carta fuori del livello del liquido si manterrà per imbimbizione costantemente bagnata e la rimanente si asciugherà; allora sarà agevole ad ognuno il vedere che solo quest'ultima parte si colora e quella bagnata si mantiene perfettamente bianca. Quando il vase rimane per più giorni esposto all'aria il livello della soluzione si abbassa col diseccarsi del liquido e le pareti del vase che restano a secco si colorano.

In Inghilterra dove le osservazioni ozonometriche furono maggiormente introdotte negli Osservatorii Meteorologici è usato l'Ozonometro del Dottor Moffat, nel quale le carte ozonoscopiche molto sensibili sono collocate in un recinto in cui l'aria può liberamente circolare senza che la luce vi penetri.

Cloro e vapori nitrosi. Efficacissima è l'azione del cloro, dell'acido cloroidrico non che dei vapori nitrosi non solo sulle carte, ma eziandio sulla soluzione amido-iodurata, senza il concorso della luce: ma avendo operato in una cameretta buia non ò mai visto colorirsi le carte, allorchè la quantità di questi fluidi aeriformi era sì poca da non farne avvertire l'odore; anzi mentre di notte nella cameretta l'odore del cloro o dell'acido iponitrico debolmente si avvertiva, la carta di Schönbein non era minimamente colorita, ed un'altra simile esposta nello stesso tempo all'aria libera avea preso una tinta tra i 2 ed i 3 gradi della scala ozonometrica.

Essenze. Le essenze esposte all'aria ed alla luce si sa che acquistano la virtù di colorire le carte ozonoscopiche. Questo fatto meritava dal canto mio una peculiare attenzione, perocchè gli effluvii delle piante resinose ed aromatiche potrebbero efficacemente concorrere al coloramento delle carte, tanto più che alcuni affermano, che le medesime in campagna lungi da ogni vegetazione si mantengono bianche.

Le essenze sulle quali ò potuto sperimentare sono state quelle di trementina, di lavanda, di rosmarino, di menta, di cannella, di limone, di arancio e di mandorle amare. Ho sottoposto a prova anche molte acque aromatiche come di cannella , di rose , di menta ecc. Le carte esposte ne'vapori di queste in recipienti chiusi e fuori l'azione della luce non sonosi mai colorite: non così mi è avvenuto coi vapori degli olî essenziali i quali, sebbene con varia energia tutti ànno la virtù di colorire le carte ozonoscopiche, almeno in presenza dell'ossigeno e senza l'intervento della luce. Ma per rendere più cospicuo il fenomeno si ponga in un fiaschetto di vetro una piccola quantità di uno di questi olî e si riscaldi con una lampada ad acquarzente, la carta immersa nei vapori che si elevano, prontamente colorasi come se si fosse messa nell'atmosfera luminosa del fosforo umido; ma se quest'olio lo fate bollire per qualche tempo vedrete i suoi vapori perdere a poco a poco la virtù di colorire le carte , e quando è giunto il momento in cui più non si colorano vedete invece scolorirsi quelle che si erano colorite dapprima; e poichè rimangono scolorite anche dopo levate dal fiaschetto senza aver perduto la virtù di ricolorirsi, e lo scoloramento avviene ad una temperatura di 50°, non può credersi che ciò derivi dalla evaporazione dell'iodo , o dalla proprietà dell'ioduro di amido di scolorirsi per riscaldamento e ricolorirsi con l'abbassamento di temperatura, proprietà di cui si avvalse il prof. de Luca nelle sue belle sperienze sulla temperatura della soluzione amido-iodurata a stato sferoidale. Secondo il prof. Meissner l'ossigeno che si svolge dall'essenza di trementina sarebbe antiozono. Io non ò ripetute le sue sperienze per assicurarmene, perocchè spero potermi versare sull'argomento dell' antiozono in altro lavoro, ma ò solo notato che introducendo una striscia di carta ozonoscopica ne'vapori delle essenze ad una temperatura di circa 50° si osserva quasi sempre un fumo bianco che potrebbe essere indizio dell'antiozono, come appresso si dirà. Le essenze che per una ebollizione prolungata perdono la virtù di colorire le carte, la riacquistano esposte all'aria ed alla luce. Le carte azurre di tornasole prendono decisamente una tinta rossa esposte nei vapori anzidetti ad una temperatura alquanto elevata.

Cloez dice che l' olio essenziale di mandorle amare si comporta in modo diverso dalle altre essenze , imperciocchè esso non colora le carte neppure in presenza della luce e dell'ossigeno, quantunque assorba quest'ultimo per passare allo stato di acido benzoico idrato. Immergendo le carte in questa essenza, come in altre di debole efficacia, quantunque

esposte innanzi all'aria ed alla luce, veramente non si colorano, ma non dee dirsi lo stesso dei loro vapori, specialmente a caldo. Avendo sperimentato coi vapori dell'essenza di mandorle amare ricavata dalle foglie del lauro regio e ben rettificata, ho visto le carte colorirsi nel buio alla temperatura dell'ambiente, un poco più col favore dell'umido, meno in aria secca. Le carte azurre di tornasole, immerse in quest'olio leggermente arrossivano, forse a cagione dell'acido idrocianico, ma le carte di Schönbein non pativano alterazione sensibile. Lo stesso interveniva operando nell'acqua in cui erasi agitata una certa quantità dell'olio anzidetto. Riscaldando poi l'essenza di cui parliamo ed immergendo le carte asciutte nei vapori di essa, queste evidentemente si colorivano, quantunque meno di quello che suole avverarsi con le essenze più energiche, e la loro tinta rendevasi più cospicua, immergendole dopo in acqua stillata. Prolungando la ebollizione per molto tempo la virtù di colorire le carte viene scemando senza mai interamente sparire, ed intanto viene anche debolmente mostrandosi quella di scolorire le carte colorite dapprima, ma con la particolarità che scolorite dai vapori dell'essenza si ricolorano prontamente all'aria, il che coi vapori delle altre essenze o punto non interviene o solo debolissimamente. Il fenomeno riesce di una meravigliosa chiarezza, se la carta colorita sia stata bagnata prima di esporsi ai vapori dell'essenza. Dopo prolungato bollimento l'olio raffreddandosi si rappiglia in un corpo solido cristallino, il quale riscaldato di nuovo gode le medesime proprietà che aveva nel momento in cui fu tolto dalla lampada. Con un'altra varietà di quest'olio essenziale ricavato propriamente dalle mandorle ho veduto con prolungata ebollizione sparire del tutto la virtù di colorire le carte ozonoscopiche e rimanere quella di scolorirle per ricolorirsi prontamente all'aria. In tutte le essenze sulle quali ho fatto dei saggi ho veduto che le goccioline liquide che si depongono per distillazione sulle pareti fredde del fiaschetto hanno una potente virtù di colorire le carte che con esse si bagnano.

È questo un curioso argomento di studii sul quale forse ritornerò, ma pel momento mi basti l'aver notato che anche i vapori dell'essenza di mandorle amare colorano le carte ozonoscopiche.

Ciò premesso mi corre ora l'obbligo di provare, esservi nell'aria una cagione di colorire le carte ozonoscopiche indipendente e diversa da tutte quelle di sopra indicate, e che questa goda di tutte le proprietà dell'ozono artificiale: dopo di che, procedendo a fil di logica dovrà conchiudersi o l'assoluta negazione dell'ozono in generale, o dovrà ritenersi per indubitata l'esistenza dell'ozono atmosferico.

Per venire a capo di questo difficile ed intrigato problema mi è stato mestieri fare qualche nuovo studio sull'ozono artificiale, per mettere in chiaro alcune sue proprietà poco o nulla avvertite da coloro che mi precedettero in simili elucubrazioni: esso è stato quasi sempre ottenuto dall'elettrolisi dell'acqua a bassa temperatura o dal fosforo umido.

Si era detto che l'ozono può passare liberamente nell'acqua, ma Andrews fu il primo ad avvedersi che l'acqua distrugge una piccola quantità di ozono: interviene lo stesso aspirando l'aria con due aspiratori, in uno dei quali essa si fa passare direttamente sopra carte ozonoscopiche collocate in una canna di vetro coperta di carta nera, e nell'altro sulle medesime carte nello stesso modo collocate, ma dopo di avere attraversata l'acqua contenuta in una boccia a lavaggio; passate eguali quantità d'aria dall'una parte e dall'altra, non si hanno tinte eguali sulle carte; per lo più le ò avute colorite nella ragione di 5 a 3.

Io non intendo per ora decidere una lite che *sotto il giudice ancor sospesa pende*, non pretendo cioè di sapere senza nuove e pazienti indagini se l'ossigeno che si svolge dalla vegetazione delle piante sia, almeno in parte, allo stato di ozono, ma certamente le sperienze del Cloez non possono valere a dare una sentenza negativa. Egli pose delle piante acquatiche *Potamogeton* o *Ceratophyllon* in acqua della senna saturata di acido carbonico e l'espose alla luce obbligando l'ossigeno che copioso si svolgeva per la scomposizione dell'acido carbonico a passare sopra una carta ozonoscopica difesa dell'azione della luce, e dopo di aver raccolti due litri e mezzo di ossigeno misto ad azoto, acido carbonico e vapore aqueo, trovò che la carta non erasi punto colorata. Ma chi mai può pretendere che con due litri di gas si possa avere ozono bastante a manifestare la sua azione sulle carte; e poi quest'ozono attraversando l'acqua della Senna ha dovuto anche in parte distruggersi.

L'ozono sparisce passando attraverso la soluzione di nitrato d'argento. Quando io vidi la prima volta questo fenomeno con l'aria, continuai le aspirazioni per 15 giorni per 7 ed 8 ore al giorno, facendola passare con una velocità di 15 litri all'ora, perchè sospettai che l'acido cloroidrico potesse essere la causa del coloramento delle carte; ma visto che la soluzione rimase limpida, come limpida del pari era rimasta l'acqua attraverso la quale nell'esperienza antecedente era passata l'aria, trattata con la stessa soluzione, volli vedere se lo stesso fenomeno si avverasse con l'ozono artificiale, e trovai che questo, aspirato nello stesso modo, dava il medesimo risultamento; solo deve badarsi che la soluzione non

sia acida, perocchè un'aura di acido nitrico può indurre lo sperimentatore in inganno.

Il fatto più importante poi è che apre la via per intenderne parecchi altri dei quali dovrò discorrere appresso è che l'ozono passa più o meno liberamente attraverso i bicarbonati alcalini o terrosi e rimane interamente assorbito o distrutto dai carbonati. Il bicarbonato ed il carbonato di soda mostrano il fenomeno in una maniera più cospicua. Per avere il carbonato di soda esente da tracce di acidi diversi dall'acido carbonico, in compagnia di Giuseppe Giordano coadiutore al Laboratorio di Chimica, andai a collocare una soluzione di soda entro la mofeta di S. Maria del Principio in Torre del Greco, la quale è sorgente quasi continua d'acido carbonico, notevolmente accresciuta dopo l'incendio del Vesuvio del dì 8 dicembre 1861. Dopo pochi giorni ebbi del bellissimo bicarbonato, una parte del quale fu ridotto in carbonato per via di calcinazione. Ora fatta passare l'aria attraverso la soluzione satura del bicarbonato, aspirata nel modo che di sopra è detto, la carta ozonoscopica si coloriva quasi egualmente dell'altra sulla quale con simili aspirazioni passava l'aria che non aveva attraversato alcun liquido. Ponendo invece la soluzione del carbonato, la carta rimase bianca dopo 50 ore di aspirazione, mentre l'altra assoggettata all'immediato passaggio dell'aria era fortemente colorita. Simili risultamenti ò avuto dall'ozono preparato con l'elettrolisi dell'acqua a bassa temperatura, ed anche da quello ottenuto col fosforo. Quest'ultimo fatto passare prima per soluzione di acido cromico o bicromato potassico, indi per un tubo in U ripieno di carbonato sodico umido e poi per due o tre bocce a lavaggio con soluzione di carbonato potassico più non colora le carte di Schönbein ; ed è bello il vedere come dei pezzettini di carta interposti tra i passaggi dell'ozono da una boccia all'altra vanno gradatamente mostrando tinte più deboli. Chi dunque dal vedere che le carte ozonoscopiche colorandosi all'aria libera non si colorano quando l'aria è passata attraverso una soluzione di carbonato alcalino, ne volesse inferire che siffatto coloramento proveniva da qualche acido libero esistente nell'aria farebbe un difettivo sillogismo. La probabile spiegazione di questo fatto sarebbe, secondo mi penso, alquanto agevole supponendo che l'ozono od ossigeno elettronegativo in presenza di un corpo alcalino od elettropositivo, qual'è il carbonato, entrando in combinazione con l'azoto genererebbe dei nitriti o dei nitrati meglio che non avvenga con un corpo meno alcalino o elettropositivo qual'è un bicarbonato. Ora poi s'intende che se l'aria passi

lungamente attraverso la soluzione del carbonato di soda dovrà alla fine riacquistare la virtù di colorire le carte, perchè il carbonato a lungo andare, per l'acido carbonico contenuto nell'aria, deve diventare bicarbonato. E quì conviene che mi soffermi alquanto per dare una nuova interpretazione alle importanti sperienze di Cloez sulla genesi del nitro. Questo valoroso chimico non credendo all'esistenza dell'ozono atmosferico, e volendo ripetere la origine del nitro in alcune congiunture dalla semplice ossidazione di certi corpi, la quale indurrebbe per trasporto *(entrainement)* la formazione dell'acido nitrico che altri avea fatto derivare appunto dall'ozono, ha ordinato delle esperienze, mercè le quali aspirando per otto mesi continui l'aria depurata prima di tutti gli acidi col farle attraversare soluzioni di carbonato potassico e di potassa, ed indi degli alcali facendola passare per pomice solforica, la introduceva in recipienti ne'quali erano diverse materie con carbonati o senza, ed ebbe dove più dove meno, dove sì, dove no, dei nitrati: ora io dico che da quelle sperienze non risulta che l'ozono non abbia per nulla cooperato alla formazione dei nitrati, imperciocchè ne'primi tempi l'ozono rimaner doveva assorbito dalle soluzioni alcaline depuratrici dell'aria, ma dopo che le medesime erano convertite in bicarbonati, una parte almeno dell'ozono dovea passare ne'recipienti, nei quali egli raccolse i nitrati. Mi duole che il Valentuomo non abbia interposta una carta ozonoscopica tra l'aria depurata ed i recipienti anzidetti perocchè son convinto che dopo qualche tempo l'avrebbe veduta colorirsi. Il Cloez intanto ricordando l'esperienze antecedenti del Prof. de Luca, dalle quali risulta una maggior copia d'acido nitrico raccolto dall'aria in vicinanza delle piante, crede che ciò derivi dai concimi, giacchè le piante finchè vivono consumano e non producono acido nitrico.

Ma a me preme domandare se veramente in ogni tempo vi sia nell'aria dell'acido nitrico od iponitrico libero, giacchè le prove desunte dai nitrati che si ottengono facendo passar l'aria sopra alcune basi non mi sembrano del tutto concludenti, imperciocchè potrebbe l'ossigeno attivo, l'ozono, combinarsi all'azoto in presenza di quelle basi con le quali i nitrati si formano. Il Cloez non à mancato di dimostrare per altra via la esistenza dell'acido nitrico libero nell'aria, ma ciò nondimeno pare che la prova che ne dà non sia irrecusabile. Egli dunque facendo passare l'aria attraverso una sensibilissima soluzione acquosa di tornasole osservò che dopo molto tempo essa prendeva oltre la colorazione distintiva dell'acido carbonico quella degli acidi energici, la quale persisteva

col riscaldamento ; ma io ripeto che la tintura di tornasole è alterata dall'ozono, e quel coloramento di cui parla il chimico citato è sì debole ed incerto, che egli stesso à creduto dover ricorrere ad una prova *complementaria* per assicurarsi dell'esistenza dell'acido nitrico, la quale prova consiste nel fare passare 15, o 20 metri cubici di aria per una soluzione di carbonato potassico ad un determinato titolo e nell'osservare che per lo più la soluzione divenendo meno alcalina contiene un poco di nitrato; ed ecco che per tal modo si ricade sulla prova indiretta la quale punto non dimostra l'esistenza dell'acido nitrico libero nell'aria; ma invece dal vedere che mentre i nitrati si formano l' ozono sparisce, si è indotti a conchiudere che quei nitrati riconoscono per lo meno la lor causa occasionale dall'ozono.

Del resto quantunque il Cloez ritenga l'acido nitrico libero nell'aria, pure dichiara che il medesimo vi si trova solo in certi tempi dell'anno ed in quantità sì picciola da non averla potuto giammai valutare, ancorchè avesse operato sopra una mole considerevole di aria. Per la qual cosa sembra che l'aria possegga la virtù di colorire le carte ozonoscopiche indipendentemente dall' acido nitrico od altri composti nitrosi ossigenati, i quali possono solo accidentalmente ed in qualche tempo trovarsi nell'aria, mentre le carte ozonoscopiche sempre si colorano ad eccezione di certi luoghi ove si trovano cagioni acconce a distrugger l'ozono o a scolorire le carte. Le stesse sperienze di Cloez provano fino all'evidenza che i nitrati si posson formare con aria perfettamente priva di acido nitrico o altro composto nitroso, ma non dimostrano che possano aversi in tali condizioni senza l'ozono. Le sperienze del Prof. de Luca per le quali egli ebbe dei nitrati operando con l'ozono sembrano venire in appoggio del mio parere. Ci à senza dubbio delle cagioni per le quali puossi avere in qualche luogo e per qualche tempo dell'acido nitrico nell'aria, perocchè si sa che il medesimo si forma nella combustione dell'idrogeno in presenza dell'azoto, con le ripetute scariche elettriche nell'aria, ecc., onde diviene il facile compagno e spesso il successore dell'ozono, perocchè in tutte le congiunture, in cui l'ossigeno si polarizza fortemente come elettro-negativo, acquista attitudine di unirsi all'azoto, ed in presenza dell'acqua si ha l'acido nitrico, ma ciò sembra avvenire nei momenti della polarizzazione energica e primitiva, come durante la combustione, il passaggio delle scariche elettriche ecc. , e dopo l'ossigeno potrà serbare in parte lo stato nascente, ma non si unirà più all'azoto senza di un corpo in presenza del quale possa provocarsi una nuova combinazione.

Se le carte ozonoscopiche si colorano all'aria indipendentemente dalla luce e dai vapori nitrosi deve dirsi lo stesso pel cloro, giacchè le soluzioni alcaline attraverso le quali si fa passar l'aria per molto tempo, mentre dànno notevole quantità di nitrati, mostrano appena tracce insignificanti di cloruri, come lo prova anche il mantenersi limpida almeno per molto tempo la soluzione di nitrato d'argento.

Restano da ultimo gli effluvii aromatici delle piante. Fo prima di tutto osservare che le carte si colorano benissimo in alto mare e coi venti che dal mare procedono, che si colorano di notte in mezzo alle vecchie lave del Vesuvio alla distanza di 2 chilometri dalle scarse piante che covrono la campagna circostante, ed in tempo di perfetto riposo del Vulcano, quando non vi sono fumarole di qualche attività. Ma ponendo da banda tutto questo, veniamo ad una prova sperimentale senza replica. L'aria fatta passare per soluzione di ioduro potassico diviene assolutamente inetta a colorire le carte ozonoscopiche, ora fate che la medesima prima di passare per la soluzione anzidetta abbia attraversata l'essenza di trementina, allora le carte in brevissimo tempo saranno colorate. Le carte dunque sono generalmente colorate nell'aria da qualche cosa che rimane assorbita o distrutta dalla soluzione di ioduro di potassio, e non dai vapori o emanazioni aromatiche le quali impunemente l'attraversano. Dicasi lo stesso se invece di questa soluzione si usi quella di carbonato di potassio. In ultimo conviene notare che se il Cloez per impugnare la ipotesi dell'ozono svolto dalle piante ricorda che le carte si colorano anche meglio nel verno con una temperatura di 10° sotto zero, quando la vegetazione è sospesa, pare che siffatta obbiezione possa opporsi del pari alla ipotesi degli effluvii odoriferi delle piante come cagione di coloramento delle carte ozonoscopiche (1).

Provato che le carte si colorano nell'aria indipendentemente dalla luce, dai vapori nitrosi, dal cloro e dalle essenze, ci rimane a dimostrare che cotesta virtù dell'aria gode di tutte le altre proprietà dell'ozono. Abbiamo veduto già come sparisce attraversando la soluzione di ioduro di potassio, come si comporta all'istesso modo coi carbonati alcalini ec. ora ci è agevole il vedere che abbia le altre qualità essenziali dell'ozono. Si sa che l'ozono sparisce passando in acqua nella quale siasi stempe-

(1) Dalle recenti esperienze fatte del Poey tra i profumi delle piante aromatiche di Avana risulta che le carte non si colorano con gli effluvii di quelle piante neppure in presenza della luce finchè stiano sotto dei recipienti, ma si colorano solo quando quegli effluvii vengano a mescersi a gran copia di aria. V. C. R. agosto 1863.

rato del biossido di bario, svolgendosi, secondo Schönbein, in tale rincontro l'ossigeno ordinario, ed il biossido convertendosi in barite idrata. Ora fate passare in simil modo l'aria pel biossido di bario, ed essa perderà perfettamente la virtù di colorire le carte ozonoscopiche. Interviene lo stesso col perossido di manganese stemperato in acqua, tanto con l'ozono artificiale quanto con quello dell'atmosfera, solo si badi che questo perossido sia puro ed esente da tracce di acido cloroidrico. L'acqua di barite fa passare egualmente l'ozono del laboratorio e quello della natura, l'acqua di calce assorbe l'uno come l'altro; le foglioline di argento cambiano egualmente di aspetto senza cambiare di peso (1); lo zinco e lo stagno non si alterano se l'aria sia secca, l'ossido di rame si comporta come il perossido di manganese, il iodo s'ingiallisce, e così dicasi delle altre qualità che all'ozono appartengono.

Finalmente poichè Houzeau ha indicato non ha guari un altro modo di giovarsi del ioduro di potassio per iscoprire la presenza dell'ozono io non ho voluto mancare di metterlo a prova con l'aria.

Entro due tubi o piccole bocce a lavaggio si pongano tre centimetri cubici di acqua pura colorita con alcune gocce di soluzione di tornasole *rosso vinoso stabile* (2). In una di queste bocce si pone la centesima parte di ioduro di potassio perfettamente neutro, indi unite le due bocce per un cannello ricurvo, mercè un aspiratore si faccia passare l'aria prima nell'acqua senza ioduro e poi in quella col ioduro di potassio, se il colore in questa si repristina rimanendo nell'altra senz'alterazione sensibile è segno che l'ozono ha scomposto il ioduro di potassio dando origine alla formazione della potassa.

Ne' molti sperimenti che ho fatto ho sempre visto più o meno repristinarsi il colore della soluzione di tornasole nella boccia ove era il ioduro di potassio, e non ho mai osservato, almeno nel tempo che ha durato ogni esperienza (da 48 a 60 ore), arrossita la soluzione contenuta nella prima boccia, ma qualche volta invece anche questa ha mostrato di tendere al violetto (3). Houzeau ricavando la potassa ottenuta viene a conoscere la quantità di ozono, ma per gli usi della meteorologia questo metodo riesce, almeno per ora, impraticabile.

(1) Andrews e Tait. Annales de Chimie et de Physique T. 56 P. 335.

(2) Questo si prepara aggiungendo alla decozione di tornasole ordinaria qualche goccia di acido solforico allungato fino a che prenda la tinta vinosa permanente, il che si conosce se passata sopra un coccio di porcellana rimane di quel colore dopo disseccata.

(3) Annales de Chim. et de Physiq. t. LXVII, p. 472 — 1863.

Qualora poi si paragonino le condizioni sotto le quali l'ozono si manifesta più copioso nell'aria con quelle per le quali l'elettricità atmosferica più abbonda si trova una tale corrispondenza da valere per una prova sussidiaria in favore dell'esistenza e dell'origine dell'ozono atmosferico. Il dottor Moffat dopo dieci anni di osservazioni ozonometriche fatte ad Hawarden all'altezza di 260 piedi sul livello del mare col suo ozonometro in cui le carte sono preservate dall'azione della luce, è pervenuto ai risultamenti che seguono riferiti alla 31ª riunione dell'Associazione britannica per l'avanzamento delle scienze (1). La quantità di ozono cresce con lo scendere del barometro, con l'aumento dell'umidità relativa, coi venti di S. e di S. O. È maggiore in tempo di pioggia e di elettricità negativa, è più grande di notte che di giorno, più nell'inverno che nella state. Varia coi luoghi per modo che al lido del mare è sempre più che nell'interno delle terre; è maggiore con le altezze, abbonda in campagna ed è scarso nei luoghi abitati, giungendo a zero, ove sono sostanze in putrefazione. Esso à un gran potere ossidante e perciò è distrutto dalle sostanze ossidabili. Sul mare e verso le sponde, mancando i prodotti della putrefazione, l'ozono si mostra più copioso, e le correnti atmosferiche equatoriali sono generalmente più ozonifere di quelle che vengono dai poli. Le lunghe calme rendon l'aria priva o scarsa di ozono il quale rinasce col vento. Ora la maggior parte di queste condizioni indicate dal Moffat io le trovo del pari nell'elettricità atmosferica per cui spero un giorno, all'ozonometro strumento di sua natura grossolano ed imperfetto, poter sostituire l'elettrometro atmosferico da me ridotto strumento comparabile e di grande precisione.

Mentre la *serietà* britannica, rimossa l'azione perturbatrice della luce, accetta l'esistenza dell'ozono atmosferico (2), mentre in Francia si elevan dubbii gravissimi contro di essa, in Germania non solo si crede all'ozono dell'aria, ma benanche all'antiozono messo innanzi la prima volta da Schönbein come un altro stato allotropico dell'ossigeno, per modo che il primo sarebbe elettro-negativo, ed elettro-positivo il secondo. Nella scuola francese, ove accettandosi appena l'ozono artificiale si

(1) V. Report of the thirty-first meeting of the British association ecc. Notice and Abstracts of Miscellaneus communications to the sections, Pag. 88 e 89 London 1862.

(2) V. *Instructions for taking meteorological observations*; ec. By Colonel Henry Iames ec. London 1861. — *Drews pratical meteorology*. London. 1860 ec.

In queste istruzioni compilate per incarico del Segretario di stato del Ministero della Guerra è detto. *It is desirable, therefore, that a note should be taken atleast once a day of the indications of the ozonometer papers, and entered in the Meteorogical Register* p. 51.

pone in dubbio l'atmosferico si dura fatica a fare buon viso all'antiozono, per cui il Wurz chiama ingegnosa ma temeraria l'ipotesi del chimico di Bala. Il recente lavoro del Dottor Meissner (1) sull'ossigeno è ricco di tal copia di fatti e di ragioni in favore dell'antiozono, che non pare agevole rivocarlo in dubbio: avrei solo desiderato qualche sperimento che più direttamente ne assicurasse l'esistenza nell'aria, quantunque non manchino parecchie prove indirette. Io non starò quì a ricordare le proprietà dell'antiozono, ma non posso tacerne una messa in luce dal Meissner per le importanti conseguenze meteorologiche alle quali può condurre, ed anche perchè ci mette per la strada per la quale puossi in modo più certo incontrare l'antiozono dell'aria. Il valoroso professore di Gottinga adunque facendo passare l'ozono perfettamente puro per soluzione di ioduro potassico e quindi per acqua stillata, osserva sulla superficie di questa formarsi una nebbia senza che avvenga abbassamento di temperatura, e questa egli chiama *atmizono*; se questa nebbia si riduce in acqua non vi si trovano segni di essere ossigenata, come lo è per poco l'acqua pura sottoposta attraverso la quale l'aeriforme è passato. Cosicchè l'antiozono nell'aria umida genera nebbia a guisa dell'opalescenza, come dice il Meissner, che in alcune soluzioni si ha per piccola quantità di un reagente, e nell'acqua forma perossido d'idrogeno o acqua ossigenata. E poichè si possiede ora un mezzo squisito per iscoprire deboli tracce di acqua ossigenata, così non sarà difficile avere una prova diretta dell'antiozono nell'aria. Riserbando ad altro lavoro siffatta investigazione, voglio qui ricordare che il chimico citato dimostra essere l'ossigeno una condizione essenziale per aver la nebbia, per modo che raffreddando i vapori acquei contenuti nel vuoto, nell'azoto, nell'idrogeno, nell'acido carbonico ecc., essi si rappiglieranno in gocciole, ma non faranno la nebbia propriamente detta, ed ha eziandio dimostrato che la nebbia si fa più rada col rendere l'ossigeno più scarso, onde ne segue che le nubi più dense si hanno nelle basse regioni dell'atmosfera, e gradatamente si perviene a quelle altezze, nelle quali è appena possibile avere dei cirri leggieri. Dal che sembra doversi inferire che l'ossigeno sia sempre in qualche maniera nelle condizioni d'antiozono, epperò quando sia più energicamente costituito in questo stato vi sarà maggiore attitudine alla generazione delle nebbie e delle nuvole. Or poichè l'antiozono sarebbe una derivazione dell'elettricità po-

(1) Untersuchungen über den Sauerstof. Hannover 1863.

sitiva, così il Meissner si giova delle mie ricerche sull'elettricità atmosferica, per indicare la origine dell'ossigeno elettropositivo, il quale quando sia energicamente costituito in questo stato non sarebbe assorbito dalla soluzione di potassa ed acido pirogallico. Ciò basta per mostrare l'importanza di questi studii per le numerose applicazioni di cui possono essere fecondi. Se oltre l'ozono trovasi anche l'antiozono nell'aria, le osservazioni ozonometriche fatte con le carte amido-iodurate non potranno avere alcuna significazione, finchè non si abbia il modo di valutare l'ozono e l'antiozono, perocchè non è possibile che queste due modalità dell'aria si comportino egualmente sulla nostra economia.

Molti annebbiamenti e molti fumi, di cui non sappiamo dare ragione, ripeterebbero, secondo il Meissner, la loro origine dall'antiozono il quale spesso si genera insieme con l'ozono. Il fosforo stesso ne darebbe una prova, imperciocchè l'ossigeno dell'aria assumendo il suo stato elettronegativo nel combinarsi al fosforo, svolgerebbe dietro di sè elettricità positiva, origine dell'antiozono e quindi della nebbia in presenza dei vapori acquei. I fumi bianchi che si manifestano quando l'ossigeno si estrae dal clorato di potassa in presenza del perossido di manganese, e perfino le misteriose nebbie secche, potrebbero ripetersi dalla medesima origine.

Comunque sia, dimostrata per ora l'esistenza dell'ozono atmosferico, volgerò la mia attenzione all'antiozono, e quindi procurerò di cercare i mezzi più acconci per le osservazioni meteorologiche corrispondenti. Io son convinto del grande avvenire riserbato alla Meteorologia, ma fino a tanto che l'igiene, la pastorizia, l'agricoltura e la navigazione ànno poco o nulla a giovarsi delle sue osservazioni, francamente dirò che la vera meteorologia non è per anco nata; epperò io mi penso che la parte più grave di essa sia riposta nelle indagini ordinate a scoprire nuove leggi, anzichè nell'ammassare volumi di osservazioni parziali quantunque eseguite con grande precisione. Quando avremo strumenti atti a manifestare il corso e l'andamento di tutte le cagioni operanti nella natura, allora la vita, questa risultante ed in pari tempo questo compendio di tutte le forze, non sarà più misteriosamente legata all'ambiente donde prende vigore, ed in cui non di rado incontra le arcane cagioni dei morbi.

Vol. II. N.° 5.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA
DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

STUDII SULLA FAMIGLIA DELLA RUDISTE.

MEMORIA

DEL SOCIO ORDINARIO G. GUISCARDI.

Parte prima letta nell' adunanza del dì 10 novembre 1863.

Dal Lapeyrouse ai Sigg. Bayle e Woodward lo studio dei fossili che il Lamarck riunì sotto questo nome ha tanto progredito, che la loro struttura può dirsi completamente conosciuta. Non è lo stesso però dei rapporti che le Rudiste hanno con i molluschi viventi e, se l'opinione di ravvicinarle alla famiglia delle Camacee oggi è più che altra generalmente ricevuta, non credo le loro affinità così pienamente dimostrate che ogni dubbio si possa dire rimosso; ma questo argomento è stato trattato da tali uomini che io non pretenderò certo di entrare in siffatta discussione.

Io mi propongo soltanto di far conoscere le forme di questa famiglia che, per quanto so, s'incontrano nel Napolitano e di descrivere quelle che non sono ancora conosciute: e nel farlo non lascerò passare inosservati i particolari della loro struttura i quali, io penso, contribuiranno a far viemeglio caratterizzare questi esseri singolari.

Avrei voluto presentare all'Accademia tutto intiero il lavoro, intrapreso da più anni ed interrotto per varie vicende; ma nuovi ostacoli frapponendosi ogni giorno al suo compimento, mi son determinato a

suddividerlo in monografie, intitolando ciascuna dal nome d' un genere. In questa che ora presento mi occupo del genere

Hippurites, Lamarck.

H. cornu-vaccinum, Bronn.

Di questa specie il gabinetto geologico ha recentemente acquistato una valva inferiore proveniente dai monti di Vitulano.

È alquanto compressa soprattutto al margine, dove il diametro maggiore dalla cresta cardinale al punto opposto è di circa 85 mill. Dal margine in giù diminuisce poco sensibilmente il diametro e solo verso l'apice rapidamente si restringe. Presso ai due terzi della lunghezza, a partire dal margine, è piegata ad angolo alquanto maggiore del retto e, misurata lungo la convessità, dal margine all'apice infranto è circa 35 cent.; intiera potè esser lunga 38 cent. questa valva.

Il guscio è bigio, lamelloso, similissimo per questo a quello delle ippuriti di Untersberg. La figura dei pilastri e della cresta, la loro sporgenza, i rapporti fra essi e le docce che li separano convengono pienamente e con le rappresentazioni grafiche e con gli esemplari di questa specie di cui ho conoscenza.

H. Taburnii n. sp.

Distinguo con questo nome un pezzo di valva inferiore cilindrica, un poco schiacciata alla regione cardinale, alquanto incurva, il cui diametro interno è di circa 90 mill. e che su la lunghezza di 1 decimetro si restringe solo di 2 mill. Apparentemente dovè essere ben lunga.

All'esterno ha tre solchi *poco profondi* ma ben distinti ed è ornata di piccole coste di cui si contano 13 nella superficie di circa 16 millimetri quanto dista cioè il solco della cresta cardinale da quello del primo pilastro.

La figura dei pilastri, la loro sporgenza e segnatamente quella della cresta di poco maggiore della sporgenza del vicino pilastro B, distinguono benissimo questa forma, di cui la fig. 1 rappresenta un taglio perpendicolare all'asse della valva.

Nondimeno ho lungamente inclinato a riguardarla come derivante dall'*H. cornu-vaccinum;* ma avendo posto mente alla condizione dei solchi in questa specie *assai profondi*, e più ancora all'altra della superficie intercetta fra il solco della cresta (A) e quello del pilastro (C), che nel-

l'*H. cornu-vaccinum* è circa il settimo della superficie della valva, mentre in questa che descrivo la stessa superficie l'è poco meno del dodicesimo, — non ho più esitato a riguardarla come una specie assai bene distinta dalle altre.

La prossimità dei detti due solchi, per la quale il signor Bayle a ragione scriveva — « ce caractère suffirait à lui seul pour distinguer l'*H.* « *cornu-vaccinum* de toutes les espèces d' hippurites connues jusqu' à « présent » — è una caratteristica che non più a questa specie, ma evidentemente conviene all'*H. Taburnii.*

Non è possibile darne la frase specifica, trattandosi d'un frammento, ma i caratteri indicati bastano a farla riconoscere.

Questo pezzo proviene dal M. Taburno, e si conserva nel gabinetto geologico della nostra università.

H. Baylei, n. sp.

Anche questa specie non è rappresentata che da un pezzo di valva inferiore della quale però esiste il margine completo. Il quale è obbliquo sull'asse ed inclinato verso la regione cardinale che fa col piano nel quale giace il margine un angolo di circa 105°. Il labbro mostra distintissime le rughe e granulazioni dal d'Orbigny attribuite ai cirri del mantello dell'animale.

L'esterno è adorno di coste di cui si possono numerare 16 in una superficie di 26 mill. Sono inuguali, spesso angolose e d'ordinario una volta sola, raramente due; nella regione cardinale fra due coste se ne aggiunge un'altrâ piccolissima. Le linee d'accrescimento si abbassano su gli spigoli delle coste e si elevano nelle depressioni fra esse, per modo che la valva risulta finamente ornata di linee piegate a zigzag.

Secondo le linee d'accrescimento si notano ancora dei leggieri restringimenti, non perpendicolari all'asse, nè paralleli, che anzi pare che queste linee d'accrescimento a partir dall'apice diventino più e più inclinate. Forse fu uniforme il crescere della conchiglia nella parte inferiore, ma nella superiore fu minore verso la regione cardinale e da questo ebbe origine l'inclinazione del labbro.

Io pensai altra volta che la regione cardinale avesse influenza sull'incurvarsi delle ippuriti, ma in prosieguo ho potuto accertarmi che essa v'è del tutto estranea, avendo incontrato molte valve inferiori incurve secondo un piano perpendicolare a quello che passerebbe per la regione cardinale e l'opposta, così che i solchi stanno su l'uno dei fianchi.

Due soli solchi mostra questa valva all'esterno, l'uno più profondo dell'altro e, dietro quel che se ne sa (1), si sarebbe indotti a credere che corrispondessero ai due pilastri, riproducendosi in essa l'esempio dell'*H. bioculatus*, Lamk. e di altre, in cui il solco rispondente alla cresta cardinale non esiste. Ma nella valva in parola il caso è affatto contrario, fig. 2 e 3; poichè in questa il solco meno profondo risponde alla cresta cardinale e l'altro *ai due pilastri insieme;* così che questo solco, che è il più profondo dei due, non rappresenta già la linea mediana di ciascun pilastro, ma sibbene il mezzo della doccia fra essi.

La superficie fra i solchi ornata di 15 coste è poco meno del settimo di quella della valva intera.

Il numero dei solchi fu ben determinato dal d'Orbigny quando scrisse che la valva aderente delle ippuriti — « est marquée extérieurement « de deux sillons et souvent d'une troisième depression » — ed è chiaro abbastanza d'altra parte che la frase del Woodward — « with three « parallel furrows » — debba essere modificata.

H. Arduinii, n. sp.

Al contrario delle precedenti, questa specie è rappresentata solo dalla valva superiore, libera od opercolare che voglia dirsi, tutta convertita in quarzo, fig. 4 a 9.

Essa è convesso-conica a base apparentemente circolare, forse del diametro di 8 centimetri ed alta più che 3. I due strati onde è fatta sono chiaramente indicati dalle due diverse tessiture che ha il quarzo. Lo strato interno è di quarzo cristallino e costituisce tutte le cavità e le sporgenze; l'altro strato esterno che ha aspetto terroso e tessitura fibrosa, segregato perciò da uno stesso organo, costituisce i canali e la superficie porosa, come suol dirsi, ma che meglio direbbesi *forata*. I due strati non si toccano se non per i canali e per i lembi. Dove manca l'esterno apparisce l'apice dello strato interno della valva, mammillato ed in mezzo ad una depressione circolare, e, da questo apice, che non è il punto più alto della valva, hanno origine costole e solchi, inuguali, flessuosi talvolta, in generale pochissimo distinti e che meglio si riconoscono alla sottile striatura ondulata prodotta dalle linee d'accrescimento. Vi si notano però due solchi ben larghi e profondi ed un terzo angusto che potrebbe dirsi *ripiegatura*. Questa corrisponde alla cresta cardinale ed i due solchi corrispondono agli osculi.

(1) Bayle, Bull. de la Soc. géol. de France, 2.ème série tom. XII.

I canali sono adattati nei solchi che ho detto poco distinti; fra due raramente ne sta un terzo che non aderisce se non alla superficie forata: non ne ho veduto che si biforcassero. Stanno ancora i canali nei solchi rispondenti agli osculi e, nel primo (*g*) fig. 6, che è più profondo dell'altro, se ne contano tre, due sul fondo ed uno sur uno degli orli del solco. Questo canale è sorretto dal margine del solco stesso che protraendosi alquanto entra nella spessezza della sua parete; ed agli altri due liberi nel solco, servono di appoggio in simil guisa piccoli rilievi lineari longitudinali e trasversali che s'elevano sul suo fondo.

Nell'altro solco (*f*) corrispondente all'osculo del secondo pilastro i canali aderiscono per tutta la loro superficie perchè compressi; inoltre s'inflettono sulla spessezza dello strato interno (*e*) fig. 5, 6 e 7 e pare che si aprissero intorno all'osculo e che, o essi stessi dicotomizzandosi o altri soprapponendosi ad essi, giungessero poi al margine della valva, fig. 7. Questo non posso dir con certezza poichè per mala ventura giusto su quest'osculo la valva è involta nella roccia, quarzosa anch'essa, nè mi è stato possibile riconoscere l'andamento dei canali.

Lungo la ripiegatura che ho detto, in due punti s'insinuano i canali e si aprono all'interno in due punti diversi della cresta cardinale, che sta in fondo ad una piccola cavità, di cui mi occuperò nel descrivere l'interno della valva.

Dove parte della parete dei canali è rimasta aderente allo strato interno, si vede la loro struttura fibroso-pinnata fig. 8 *(in alto)*, le fibre divergendo dalla linea mediana. I canali all'esterno sono quale fortemente striato per lungo, quale no, ma sempre vi si nota la struttura fibrosa.

Ho già detto che lo strato esterno aderisce all'interno solo per i canali e pel margine; in tutto il resto lo strato esterno, poroso, è libero ed isolato. La comunicazione dei pori con i canali è messa in evidenza anche dalle fratture ed è, dirò così, immediata; poichè non esistono le ramificazioni dei canali descritte dal d'Orbigny (1), nè sarebbero possibili dopo quel che ho detto; però le inflessioni dello strato esterno sui canali aumentando le superficie del loro contatto, vengono ad accrescersi ancora i punti per i quali si stabilisce la comunicazione fra lo strato esterno ed i canali, come lo mostrano le prominenze e depressioni irregolarmente disposte dello strato esterno, ed i pori meno frequenti

(1) Ann. des Sc. Nat. 3.ème série, Tom. VIII, pag. 260

nelle seconde e stivati sulle prominenze alle quali sottostanno immediatamente i canali. I pori in basso sono rotondi o compressi; in sopra si slargano, divengono angolosi e vi si notano pliche rilevate, quattro talvolta, che fanno più angusta la piccola cavità imbutiforme: lo spazio fra i pori è liscio e rotondato.

La valva superiore delle ippuriti suol esser piana o di poco convessa, e però la molta convessità di questa che descrivo non può a meno d'influire sulla sua interna struttura. In fatti, fig. 4^a e 4^b, col margine della regione cardinale comincia una grande cavità che comprende gli osculi e la cresta cardinale, e, seguendo la superficie conica, cresce di profondità finchè ne acquista una anche maggiore al vertice della valva, e diviene cavità umbonale (M). Il resto è una superficie piana in forma di ferro di cavallo e ricorda assai l'*H. Loftusi*, Wood. (1). Fra la cresta cardinale e il primo osculo, assai presso a questo, sorge dal fondo della cavità un dente compresso, largo e bipartito; di cui l'un estremo (G) è separato dalla superficie a ferro di cavallo da un seno non molto profondo, e l'altro estremo (H) è congiunto alla sommità dell'osculo da una lamina incurva. La presenza di questo dente e la sua posizione seguendo la curva a ferro di cavallo fa che si possano distinguere due cavità fra le quali esso si trova—l'una grande *osculo-umbonale*, l'altra piccola in fondo alla quale sta la cresta cardinale (A) e ne occupa giusto il mezzo. Un solco ben distinto cinge l'osculo del secondo pilastro.

L'estremità del dente prossima all'osculo è infranta e si può argomentare che dovesse essere ben più lungo; l'altra estremità è appena sdrucita così che si può ben credere che la sua lunghezza non dovesse essere di molto maggiore.

A partire dal seno che divide il dente dalla lamina a ferro di cavallo, per circa la metà della curva esiste una frattura che io penso rappresenti l'attacco del primo dente cardinale, e dell'apofisi destinata alle inserzioni muscolari.

La cresta cardinale ha i margini alquanto divaricati e diversamente curvi; quello verso l'osculo è piano, l'altro margine è rilevato sul fondo della cavità. Dei due canali ai quali ho già fatto allusione l'uno si vede in parte e si apre quasi nel mezzo della cresta dove i margini sono più discosti.

(1) Quart. Journ. Feb. 1855, Vol. XI. Pl. III fig. 4.

Questa valva fa parte anch'essa delle collezioni del nostro gabinetto geologico, proviene dagli Abruzzi e dallo stesso deposito in cui trovasi la *Sphærulites Tenoreana* che ho altra volta descritta (1).

Io mi auguro di potere, in un tempo che voglio sperare non molto lontano, visitare io stesso la località ove giacciono questi preziosi fossili per così completarne la descrizione ancor monca, e determinare le zone alle quali le nuove specie appartengono.

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE.

Fig. 1. Sezione trasversale della valva inferiore dell' *H. Taburnii.* (A) cresta cardinale, (B) primo pilastro, (C) secondo pilastro.

Fig. 2. Sezione trasversale della valva inferiore dell' *H. Baylei.* (A) cresta cardinale, (B) primo pilastro, (C) secondo pilastro, (*s*) solco esterno *comune* ai due pilastri.

Fig. 3. La stessa valva guardata di lato per mostrarne gli ornamenti esterni.

Fig. 4^a e 4^b. Valva superiore dell' *H. Arduinii*, veduta all'interno. (A) cresta cardinale, (B) osculo del primo pilastro, (C) osculo del secondo pilastro; (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*,) grande cavità che comincia col margine e che in (*f*) divien poi cavità umbonale (M). (H, G) estremità libere del dente che separa dalla detta cavità l'altra piccola in fondo alla quale sta la cresta cardinale (A); (*c d*) orlo della superficie a ferro di cavallo, sul quale si nota una frattura che assai probabilmente è l'attacco del primo dente cardinale e delle apofisi per le inserzioni muscolari; (*f*) orlo del solco che cinge l'osculo del secondo pilastro (C), (*g*) seno che separa il dente dalla superficie a ferro di cavallo, (*h*) fossetta non so dire a che destinata, (*i*) aperture dei canali sul margine della valva.

Fig. 5. Sezione della stessa valva secondo la linea (*x z*) della fig. 4^a. (*a*) apice, (M) cavità umbonale, (*f*) orlo del solco che cinge l'osculo del secondo pilastro, (*g*) seno che divide il dente dalla superficie a ferro di cavallo, (*o*) lamina che congiunge l'estremo (H) del dente alla sommità dell'osculo (B).

(1) Bull. de la Soc. géol. de France, (2) Tom. XIX, pag. 1031.

Fig. 6. Valva superiore dell'*H. Arduinii* veduta all'esterno. (A) cresta cardinale, (B) primo osculo, (C) secondo osculo, (*a*) apice mammillato dello strato interno, (*b*, *b*) quel che rimane della superficie porosa, (*c*, *c*) canali, (*d*) tre canali nel solco (*g*) che corrisponde al primo osculo, (*e*) spessezza della valva sulla quale si piegano i canali nel solco (*f*) del secondo osculo. Veggasi anche (*e*) nelle fig. 5 e 7.

Fig. 7. Questo frammento mostra porzione dei canali staccati dallo strato interno del quale parte soltanto è rimasta ad essi aderente. (C) osculo del secondo pilastro, (*a*) apice della valva, (*b*) canali adagiati sulla superficie conica, (*e*) i canali piegati sulla spessezza dello strato interno lungo la curva dell'osculo e che ricompariscono cresciuti di numero in (*d*) sul margine.

Il pezzo rappresentato da questa figura è stato tolto via nelle fig. 5 e 6, così che in esse si vede la superficie (*e*) che è la spessezza dello strato interno con tre sottili rilievi i quali rispondono ai piccoli solchi che risultano dal toccarsi dei canali, sebbene alquanto compressi.

Fig. 8 e *9.* Parte della superficie porosa [(*b*, *b*) fig. 6], dell'*H. Arduinii*, nella prima delle quali si veggono anche i canali.

N. B. Che queste due figure sono state litografate da fotografie ingrandite tre volte; e che le altre delle quali non è indicata la dimensione sono tutte di grandezza naturale.

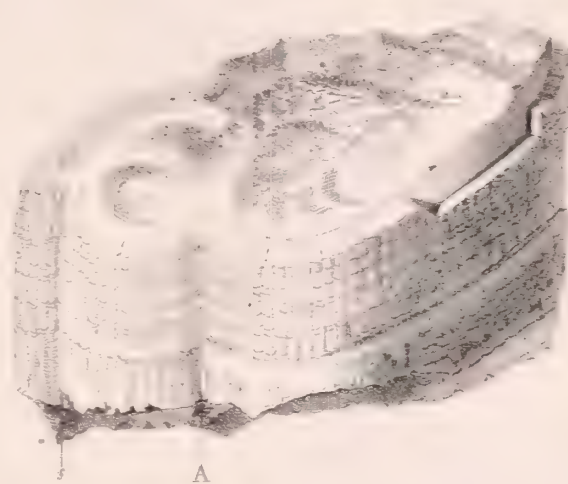
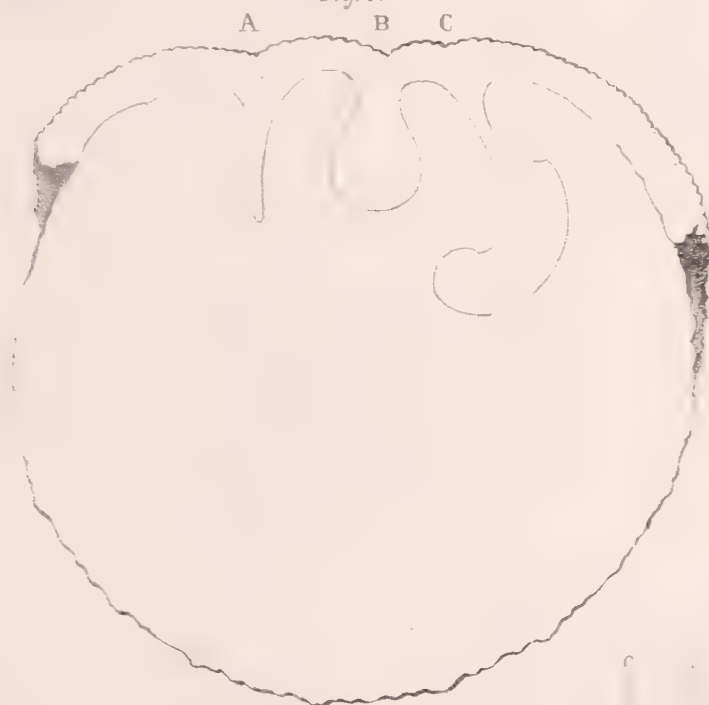
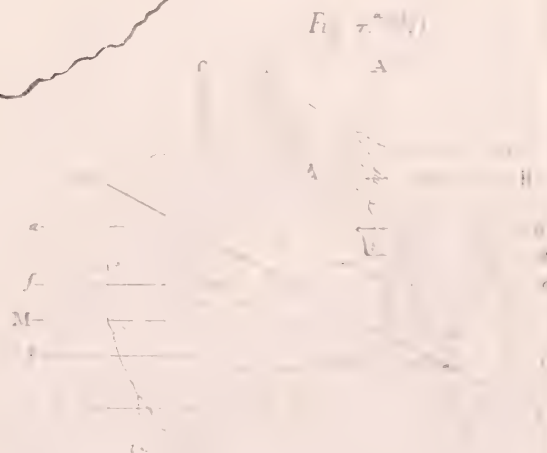
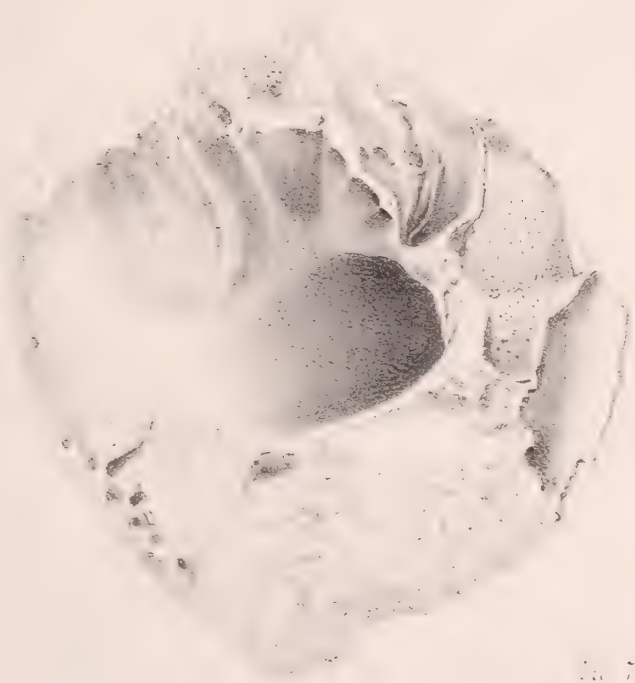
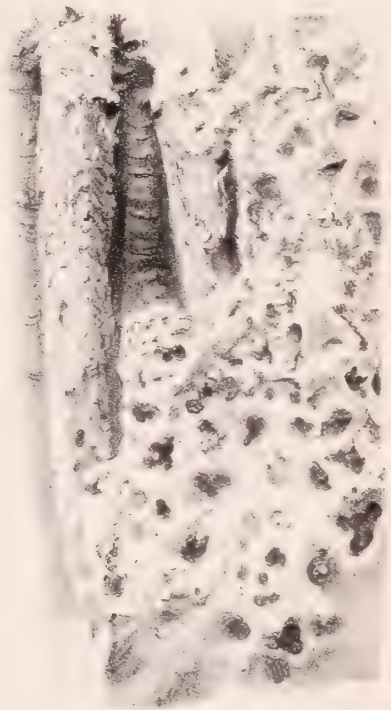
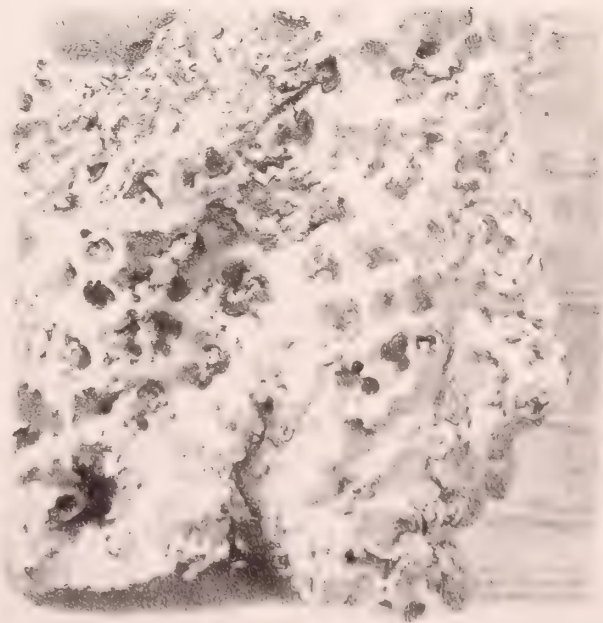



Fig. 2.
A
B
C
Fig. 3.
s
A
Fig. 1.
A
B
C
Fig. 5
f
e
M
g
G
H
o
B
A
a
f
M

Vol. II. N.° 6.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA
DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

NUOVO ELETTROMETRO BIFILIARE

MEMORIA

DEL SOCIO ORDINARIO L. PALMIERI.

letta nella tornata del dì 12 aprile 1864.

Il metodo del conduttore mobile da me usato per le osservazioni di meteorologia elettrica m'imponeva, alcuni anni or sono, la necessità di avere un elettrometro sensibilissimo e comparabile. Raggiunsi in gran parte lo scopo col mio elettrometro unifiliare ch'è una modificazione dell'elettrometro atmosferico di Peltier (1). Ma poichè l'indice di questo porta un frammento di ago da cucire debolmente calamitato, ed una punta sporgente dal mezzo dell'indice tocca leggiermente una piccola cavità sottoposta, così si aveano due cagioni che poteano far variare di qualche poco la sensibilità dello strumento, le quali erano le variazioni nella intensità del magnetismo dell'ago e quelle dell'attrito sebbene piccolissime pe'cangiamenti che le condizioni igrometriche dell'aria arrecar poteano nella lunghezza del filo di bozzolo. Con un poco di pratica i piccolissimi errori provenienti da dette cagioni si evitavano o si correggevano, ma non tutti poteano farlo. Per la qual cosa ho fatto da circa un anno eseguire un nuovo elettrometro di grande ed invariabile squisitezza, esente da qualsiasi inconveniente e facile ad essere trasportato.

Figuratevi un filo sottilissimo di alluminio o anche di argento *mn* fis-

(1) V. Gli Annali dell'Osservatorio Vesuviano. Vol. I e II.

sato nel mezzo ad un dischetto di argento dorato *r* molto sottile e di diametro eguale a quello della figura o poco maggiore. Nel mezzo dell' indice trovasi un anelletto pel quale passa un filo di bozzolo i cui capi nella parte di sopra divergono alquanto e sono raccomandati ad un verricello: è chiaro che questo indice *mn* avrà una forza direttrice invariabile la quale dipende dalle distanze inferiore e superiore de' fili, dalla lunghezza di questi e dal peso dell'indice e del dischetto. Immaginate ora che il dischetto *r* entri in un bacinetto o piattello *s* della profondità di tre millimetri il quale abbia il diametro di circa due millimetri maggiore di quello del dischetto e che questo vi s' interni per circa un millimetro. Suppongasi finalmente che col piattello metallico siano uniti due bracciuoli orizzontali *ab* i quali si trovino molto prossimi all'indice *mn* nello stato di quiete, è chiaro che se il piattello *s* co' corrispondenti bracciuoli orizzontali riceva una carica questa opererà per influsso sul dischetto *r* che si elettrizzerà di elettricità contraria, e l'indice *mn* specialmente verso gli estremi si elettrizzerà di elettricità omologa per cui si avrà un deviamento più o meno grande secondo la intensità della carica.

Ciò posto volgendo lo sguardo alla figura ove è rappresentato quasi a metà del vero tutto lo strumento, s' intenderà che il piattello è collocato entro un cilindro di cristallo sormontato da una canna *v* alta 25 in 30 centimetri entro la quale passano i fili che tengono sospeso il dischetto con l'indice; che il piede del piattello s' innesta con un filo metallico circondato da un cannello di vetro pieno di mastice coibente il quale penetrando la base inferiore del cilindro di cristallo la quale è anch' essa di cristallo passa orizzontalmente entro la base di legno *zz* e termina in una colonnetta di rame dorato *t* destinata ricevere le cariche; che i deviamenti dell'indice si possono leggere mercè un cannocchialetto *c* orizzontale munito di filo micrometrico, e che questo cannocchialetto girando intorno all'asse dello strumento mercè un'alidada munita di nonio può far conoscere sulla graduazione esterna messa sulla base *zz* i gradi e le frazioni di grado di deviamento dell' indice. Anche nell' interno del cilindro di cristallo si può mettere sotto l' indice un cerchio graduato per leggere su questo i deviamenti dell' indice mercè un altro cannocchialetto. Ma la graduazione interna che trovo migliore è la verticale espressa sulla superficie cilindrica *dd* la quale somiglia un goniometro. Per le letture col cannocchialetto orizzontale la sola graduazione esterna messa sulla base *zz* sarebbe sufficiente, ma qualora si voglia fare delle letture senza del cannocchialetto la graduazione interna verticale è necessaria.

Entro il cilindro di cristallo con facile operazione s'introduce un poco di cloruro di calcio in apposito vasellino per mantenere asciutta l'aria interna la quale si mantiene quasi senza comunicazione con l'aria esterna per la maniera onde è lavorato lo strumento.

Quando l'elettrometro deve essere trasportato il dischetto si fa scendere nel fondo del piattello, l'indice entra in apposita fenditura fatta nell'orlo del medesimo ed è sicuro contro le oscillazioni che potrebbero sconcertarlo.

Il peso del dischetto con l'indice è di 360 milligrammi. Quando lo strumento si vuole più torpido si farà il dischetto più pesante o si rimarrà un più grande intervallo tra l'orlo di esso e le interne pareti verticali del piattello. Se il dischetto ed il piattello si facciano più grandi senz' accrescere di molto il peso del primo, lo strumento guadagna in isquisitezza almeno entro certi confini.

Tenuto l'indice in istato di quiete a qualche grado di distanza da' bracciuoli orizzontali del piattello, basta una carica leggerissima per farlo deviare con moto tanto regolare che l'occhio comodamente lo accompagna come fosse l'indice di un galvanometro. Solo conviene badare che l'indice nello stato di quiete cioè allo zero non stia in contatto con gli anzidetti bracciuoli perchè allora al venire della carica non devierebbe senza obbligarlo a distaccarsene mercè un colpo dato col dito sulla base dello strumento.

In tutti gli elettrometri a ripulsione in cui un indice leggiero si trova a piccola distanza da un conduttore che riceve la carica, si nota prima l'attrazione e poi la ripulsione la quale talora suole anche mancare senza un urto leggiero che distacchi l' indice dal conduttore , nè mai spontaneamente se ne allontana se il contatto sussisteva da prima; ma quando l'indice tocchi con la parte di mezzo il conduttore che lo deve respingere siccome interviene all'elettrometro di Peltier ed al mio elettrometro unifiliare, il deviamento è immancabile specialmente quando s'abbia cura a collocare lo zero dell'indice a piccola distanza dal conduttore che lo deve respingere. Lo stesso si avvera quando l' indice abbia nel mezzo un appendice sporgente in sotto la quale entri senza contatto in una cavità praticata nel mezzo del conduttore ordinato a respingerlo, il che io avendo provato al Melloni la prima volta col mio elettrometro unifiliare mantenendo la punta dell'indice sospesa entro la cavità sottoposta , fu occasione a questo illustre fisico d'immaginare il suo ingegnoso elettroscopio.

E siccome il deviamento è più grande quando le superficie d'influsso sono più considerevoli così il Melloni usò due cilindri, ma per via di comparazioni ho veduto che il miglior modo di disporre siffatte superficie è quello da me adoperato.

Veniamo ora a dire della relazione tra le forze e gli archi di deviamento, per vedere come il nostro strumento possa meritare il nome di elettrometro. Supponiamo che per una data carica l'indice resti deviato per un arco a, chiamando k il valore della coppia bifiliare orizzontale che tende a ricondurre l'ago alla sua giacitura di equilibrio, si ha:

$$k = \frac{\Delta \delta \, \mathrm{P} \operatorname{sen} a}{l},$$

dove Δ, δ indicano le distanze inferiore e superiore de' fili e P il peso dell'indice col dischetto. Ciò basterebbe per le misure delle intensità avvalendosi degli archi di deviamento *definitivo*; ma come passar deve necessariamente un certo tempo prima che l'indice si fermi, così si hanno delle perdite che variando con le condizioni igrometriche dell'ambiente nascer debbono degli errori poco atti ad essere valutati. Per la qual cosa anche nel mio elettrometro unifiliare io pensai di avvalermi degli *archi impulsivi*, cioè del primo deviamento dopo del quale l'indice fatte alcune oscillazioni si ferma. La equazione riferita di sopra può tuttavia essere utile qualora si stabiliscono le relazioni tra gli archi impulsivi ed i definitivi corrispondenti; il che si può fare con l'esperienza scegliendo dei giorni di estrema secchezza e dando molte cariche successive all'elettrometro registrando per ogni arco impulsivo il definitivo corrispondente; compilata così una tavola nella quale accanto ad ogni arco impulsivo vi sia notato il definitivo che gli corrisponderebbe se perdite non vi fossero, si potrà dati gli archi impulsivi avere i definitivi e quindi giovarsi della formola della quale di sopra è detto.

Del rimanente io credo che neppur questo sia necessario perocchè gli archi impulsivi sono direttamente proporzionali alle forze fino ad un certo limite che basta pe' bisogni della meteorologia elettrica cui questo elettrometro è particolarmente ordinato. Di tutto questo sonomi in varii modi assicurato, come feci già per l'elettrometro unifiliare, ma ne dirò solo uno che non avea tentato da prima.

Supponendo che gli archi impulsivi sieno proporzionali alle forze il

Professore Battaglini trova tra gli archi impulsivi ed i definitivi la relazione espressa dalla seguente equazione:

$$\frac{\alpha(\beta-\alpha)}{\beta}=tang\,\tfrac{1}{2}\alpha$$

nella quale β dinota l'arco impulsivo ed α il definitivo (1).

Da ciò si può intendere come ponendosi in un ambiente secco si possa verificare l'ipotesi assunta trovando vera la relazione espressa dalla equazione precedente (2).

(1) Infatti: indicando con δ e Δ le distanze, inferiore e superiore, dei due fili, con L la loro lunghezza, con P il peso dell'indice, con S il suo momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione, con φ la deviazione all'epoca t, e finalmente con M il momento di rotazione della forza motrice alla stessa epoca, si avrà

$$(1)\qquad S\frac{d^2\varphi}{dt^2}=M-\frac{P\delta\Delta}{L}sen\,\varphi\,,$$

onde

$$\tfrac{1}{2}S\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=\int_0^{\varphi}Md\varphi-\frac{P\delta\Delta}{L}(1-cos\,\varphi)\,,$$

$$\int_0^{\beta}Md\varphi=\frac{P\delta\Delta}{L}(1-cos\,\beta)\,.$$

Ora, indicando con f la tensione elettrica, e con k una costante, per l'ipotesi fatta si avrà

$$(2)\qquad kf=\frac{P\delta\Delta}{L}\beta\,,$$

quindi

$$(3)\qquad M=kf\frac{d\frac{1-cos\,\varphi}{\varphi}}{d\varphi}=kf\frac{\varphi\,sen\,\varphi+cos\,\varphi-1}{\varphi^2}\,.$$

Quando $\varphi=\alpha$, essendo $\frac{d^2\varphi}{dt^2}=0$, l'equazioni (1), (2) e (3) daranno

$$\frac{\alpha\,sen\,\alpha+cos\,\alpha-1}{\alpha^2}=\frac{sen\,\alpha}{\beta}\,;$$

da cui si trae immediatamente la formola proposta

$$\frac{\alpha(\beta-\alpha)}{\beta}=tan\,\tfrac{1}{2}\alpha\,.$$

G. Battaglini

(2) Il Professore Battaglini ha avuto anche la bontà di ridurre le riferite equazioni in una tavola in cui dati i valori di β si trovano quelli di α, e quindi ho potuto fare molte verifiche fino a 60°. In

Per le misure assolute poi si potrebbe ricorrere alla unità di peso avvalendosi della formola, seguendo il metodo del Gaus per la misura della intensità del magnetismo terrestre; potrebbe anche scegliersi l'unità proposta dal Weber, dal Hankel o altra quale si voglia, ma io non ho ragione di abbandonare quella che già da molti anni introdussi nelle mie osservazioni la quale può essere facilmente ritrovata da ognuno, e quindi è facile comparare i diversi elettrometri come si paragonano i termometri.

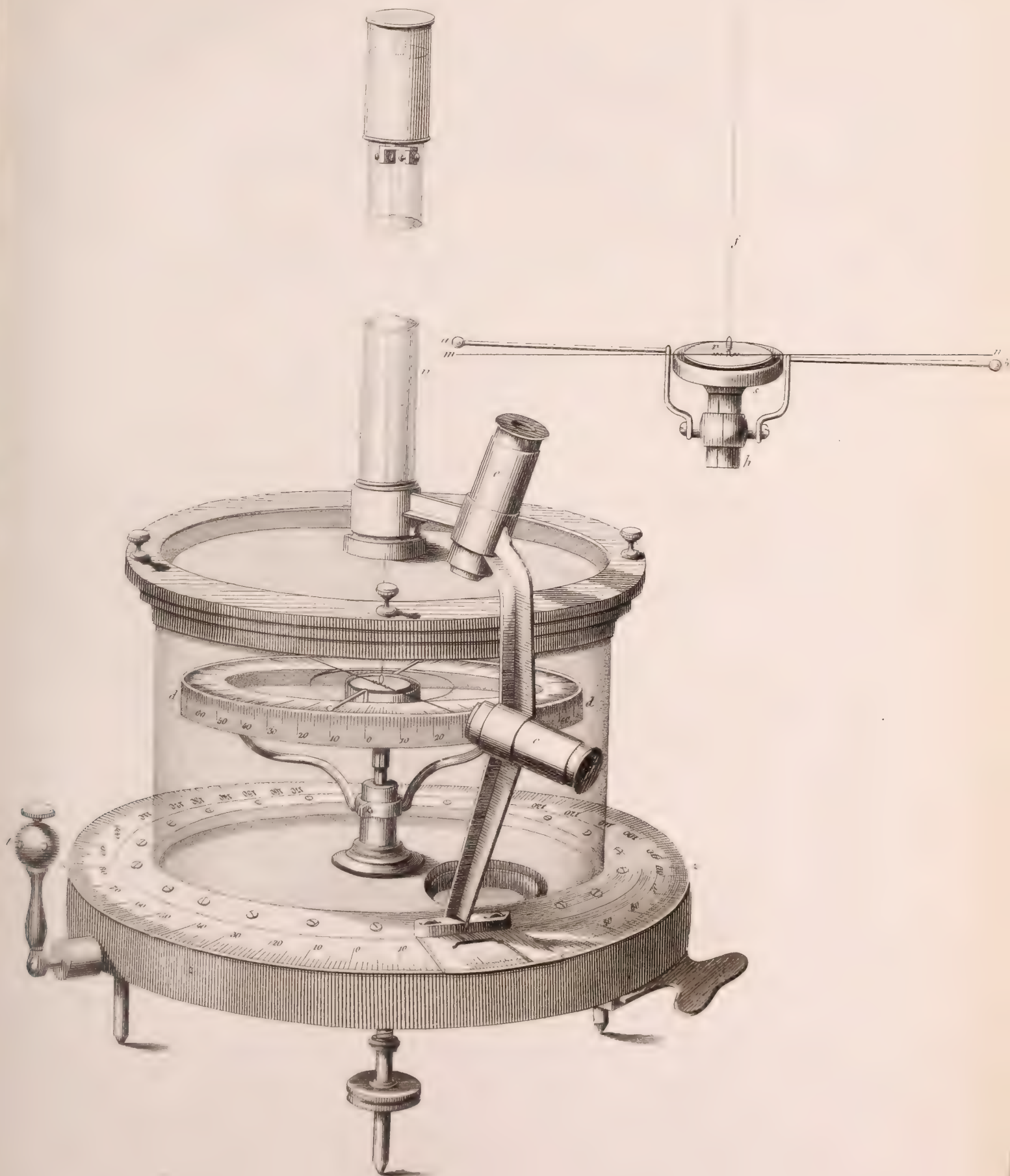
I fili nella parte inferiore sono distanti per un millimetro e per quattro millimetri nella parte superiore con meccanismo da poterla far variare volendo. L'indice è lungo 11 centimetri, il diametro del disco è di 25 millimetri e quello del piattello dalla parte interna è di 28 millimetri.

Nelle transazioni filosofiche della Società Reale di Londra per l'anno 1836 trovasi descritta la *bilancia* bifiliare di Harry, la quale è una modificazione della bilancia di torsione di Coulomb, ove l'elettricità non si eccita per influsso ma si comunica per contatto e si misura per l'angolo di torsione, e però non ha nulla di simile con l'elettrometro di sopra descritto, nè potrebbe servire agli usi della meteorologia elettrica.

Hankel in Germania (1) ha fatto un elettrometro atmosferico sensibile il quale ha perenne bisogno della pila, ma io non credo che siffatti strumenti possano mantenere così costante la loro sensibilità come l'elettrometro bifiliare di sopra descritto, nè che siano così comodi per essere trasportati.

---

questa occasione ho potuto verificare che ne'tempi secchi gli archi definitivi che si ottengono sono esattamente eguali a quelli dati dalla tavola, e ne'tempi umidi si hanno archi definitivi alquanto minori di quelli segnati nella tavola, e quindi si ha un modo di poter valutare le perdite con grandissima precisione.

(1) Electrische Untersuchungen. Erste Abhandlung über die Messung der atmosphärischen Electricität nach absoluten Maasse. Leipsig, 1856.

… Pisani dis.

Vol. II. N.° 7.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA
DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

OSSERVAZIONI SULLA ORIGINE DEL CALICE MONOSEPALO E DELLA COROLLA MONOPETALA IN ALCUNE PIANTE

MEMORIA

DEL SOCIO ORDINARIO G. GASPARRINI

letta nell' adunanza del dì 8 dicembre 1863.

L'origine e formazione delle parti costitutive i fiori han formato nel secolo presente l'occupazione quasi speciale di parecchi eminenti botanici. Le loro indagini, estese ad una moltitudine di piante appartenenti ad ordini diversi, danno a credere essere oramai l'argomento del tutto esaurito. Al quale, siccome un campo ben mietuto e spigolato, che nulla o pochissimo lascia all' altrui ricerca, non avremmo mai rivolto il pensiero se non ci avesse sforzato la necessità d'imprimere co' proprii occhi nella mente le cose già passate nel dominio della scienza. In questo essendo talvolta avvenuto che le proprie osservazioni, per qualche parte, non concordassero con quelle d' altrui, e tal altra sembrassero procedute più innanzi, se in ciò bene ci apponghiamo, esse, pubblicandole, non saranno forse del tutto inutili.

Le ragioni per le quali i botanici ritengono gl'invogli fiorali di un sol pezzo, calice monosepalo e corolla monopetala, come formati di parti congiunte insieme in tutta la lunghezza, o per una certa estensione, sono di due maniere, alcune dedotte dall' analogia, cioè dai rapporti vicendevoli dei differenti organi, non che dalle loro alterazioni accidentali, siccome in taluni casi di mostruosità; altre vengono dirittamente dalla osservazione fatta insin dal primordio degli organi. Tra le molte e svariate pruove della prima categoria le più rilevate son le seguenti. In un gran numero di piante il calice, ovvero la corolla di un sol pezzo, o l'uno

e l' altro, sono più o meno fenduti, leggiermente, o infino alla metà, o più in giù presso alla base. E dove non sieno fenduti in minima parte, il numero degli angoli longitudinali, quello dei nervi più prominenti, o dei solchi che sovente presentano, indicherebbe i punti di congiungimento di altrettanti parti che al loro primordio potevano essere distinte. Concetto che diviene più verisimile quando in un solo invoglio fiorale si considera il numero, la corrispondenza, e la situazione delle fenditure, o delle parti supposte congiunte, con quelle affatto distinte dell' altro invoglio fiorale contiguo. Onde in tante spezie, per addurne un esempio, dei generi *Convolvulus* ed *Ipomea*, in cui i cinque lobi della corolla, comechè non di raro punto o poco distinguibili, ovvero i cinque angoli, o strisce longitudinali sul tubo in corrispondenza dei lobi, essendo in numero eguali ai sepali e con essi alterni, tirano naturalmente ad ammettere sia quell'organo costituito di altrettante parti prima distinte, poscia saldate insieme lungo i margini: mentre l'inverso avrebbe luogo nel genere *Dianthus*, in cui i cinque denti del calice monosepalo alternano con cinque petali. E dappoichè occorre, quantunque assai di raro, che di una spezie naturalmente monopetala qualche individuo di quando a quando mostrasi polipetala, siccome si è visto nel *Convolvulus Cantabrica*, tal fatto sarebbe la ripruova di ciò che a tanti segni pareva solo verisimile. Inoltre, giusta l' osservazione di Augusto Saint-Hilaire (*morphologie vègètale 1841*) e di altri, in alcune famiglie naturali a corolla polipetala ci ha qualche genere con corolla monopetala, come la *Ticorea* fra le rutacee. Molti trifogli sono parimenti monopetali mentre appartengono alle leguminose, contraddistinte generalmente, tra gli altri caratteri, dalla corolla polipetala. E nelle cucurbitacee, quasi tutte monopetale, la *Momordica senegalensis*, la *Lagenaria vulgaris* sono polipetale. Questi fatti s' incontrano non di raro in qualche altra famiglia di piante fanerogame, e menano a conchiudere che i due invogli fiorali, calice e corolla, quando sieno di un sol pezzo, derivano piuttosto da più parti congiunte in tutta la loro lunghezza, o per un tratto più o meno esteso. Finalmente la pruova diretta irrecusabile di ciò starebbe nelle osservazioni di Schleiden e di altri botanici in molte piante, dove si vede ch'entrambi gl'invogli fiorali di un sol pezzo, al loro primordio son rappresentati ciascuno da parti distinte, isolate, disposte a cerchio; le quali poscia, crescendo, per esser contigue e di consimile struttura, si uniscono per i margini: onde all'epiteto di monosepalo pel calice si è so-

stituito quello di gamosepalo, e per la corolla monopetala l'altro di gamopetala. Ciò è ammesso nelle opere elementari di botanica, nelle istituta del Iussieu, del Richard, nella Morfologia vegetale del Saint-Hilaire, negli elementi di botanica del Payer, ed in altri compilati sulle stesse norme. Sarebbe in somma un principio accettato generalmente, come quello che deriva dall'analogia, siccome s'è detto, e credesi compruovato dall' osservazione diretta. Quando venne in campo questa teoria pochi vi si opposero con qualche particolare osservazione, e tra gli altri il Duchartre con un bel lavoro sulla organogenia del fiore nelle malvacee, inserito negli Annali delle Scienze Naturali per l'anno 1845.

Veramente è indicibile la varietà delle aderenze che taluni organi fiorali contraggono infin dalla loro nascenza, nè intendiamo negare che elementi consimili, prima isolati, non possano poi unirsi per formare un sol organo. Vogliamo soltanto allegare alcune osservazioni, accompagnate da poche figure, per mostrare che in certe piante gl'invogli fiorali essendo di un sol pezzo, a crescenza compiuta, il sono parimenti al loro primordio, senza pretesa di dedurne una massima per tutti i casi di calici monosepali e corolle monopetale. I pochi esempii in contrario servirebbero piuttosto a far rivolgere nuovamente l' attenzione degli osservatori ad un punto di organogenia, che, chiarito nei suoi particolari, porgerebbe per la parte sua qualche nozione più precisa concernente alle forme regolari o irregolari, secondo le espressioni in uso, di sì fatti organi, ed al valore intrinseco che a questi devesi attribuire, quando si vuole assegnare ai principali ordini delle piante fanerogame il rispettivo grado di struttura più o meno elevato, ed a grado a grado agli altri delle famiglie naturali da ciascun ordine dipendenti. Che se il pregio o valor distintivo seriale degli uni e delle altre hassi a riconoscere, giusta il buon senso e la opinione generale, nella struttura intrinseca più o meno complessa, nel numero, nella varietà delle parti, secondo la rispettiva importanza, ne' modi com' esse sovente si saldano insieme, o abortiscono, o altrimenti si modificano, ne seguita, applicando sì fatta regola agl'invogli fiorali, che quelli i cui elementi resterebbero sempre isolati e distinti, come primitivamente apparvero, infino a compiuto accrescimento, sarebbero di ordine più elevato; e però il calice polisepalo di magior valore del monosepalo, e similmente la corolla polipetala verso la monopetala. Dietro il quale principio Decandolle, disponendo gli ordini e famiglie naturali in serie di progressiva ascendente composizione, pone le

talamiflore in capo del regno vegetale, e tra esse concede il primo luogo alle ranunculacee, in cui tutti gli organi fiorali, e le loro parti sono distinte, tranne nei generi *Garidella* e *Nigella*, dove i soli carpelli si uniscono per gli ovaj.

Ma tornando all' assunto di voler recare qualche esempio d' invoglio fiorale sempre mai di un sol pezzo in tutta la sua vita, comincio dal ricordare il perigonio della lenticularia *(Lemna minor)* in altro lavoro (1) diffusamente esaminato. In tal pianta il fiore al suo primordio è una piccolissima massa rotonda di fino tessuto cellulare, uniforme, mancante di fibre e di vasi, siccome ogni altra parte. Massa cellulare che poscia dividesi in due, l'una interna centrale, di forma rotonda, l'altra esterna in sembianza di corteccia, o guscio chiuso da per tutto. Dalla prima, interna, in progresso di crescenza, modificandosi in modi adatti al fine, derivano il carpello e gli stami; dalla seconda, dilatandosi ed ugualmente assottigliandosi in vessichetta membranosa molto sottile, formasi il perigonio, debolmente unito, per un punto molto ristretto, al fondo di una cavità del caulifillo, ed al punto basale comune all'androceo ed al gineceo. Tal perigonio non ha appendici nella sommità, nè solchi o filetti longitudinali, nè deriva da più elementi congiuntisi insieme in seguito di crescenza. Il carpello indiviso ed i due stami provengono, da altrettante prominenze che spuntano dalla massa cellulare compresa nel perigonio siccome di sopra si è detto.

Nelle *Najas marina* L. *N. minor* All. e *N. alaganensis* Pollin, piante aquatiche monoiche o dioiche, che abbiamo esaminate nei contorni di Pavia, i fiori di entrambi i sessi, essendo monoiche, vengono gli uni accanto agli altri nell' ascella di piccole brattee. Un perigonio manca al fiore femineo; il quale in principio somiglia ad un granellino rotondo, o quasi bislungo, costituito solo di piccolissime celline. Questa massa cellulare dividesi poscia in due a poca distanza dalla sommità; l'esterna ed inferiore, a contorno alquanto sinuoso, col crescere nasconde in poco tempo la superiore, sporgente in principio a guisa di prominenza convessa, che a mano a mano diventerà uovicino anatropo; mentre l'altra procede alla formazione del carpello, indiviso, o bifido, o trifido nella parte superiore, secondo che uno, due o tre piccolissimi rilevamenti dell'orlo, si allungano per formare uno o più stili. Quest' orlo in seguito

(1) Gasparrini. Osservazioni morfologiche sopra taluni organi della *Lemna Minor* con tavole-1856.

conformasi a guisa di fissura bislunga a certa distanza dall' ovajo con cui liberamente comunica. La formazione del fiore maschio procede allo stesso modo. In principio una massa cellulare *(tav. 1. fig. 13. a)* rotonda, uniforme; questa poscia, allungatasi un poco, presso alla sommità dividesi *(fig. 13. c)* in due; l'esterna ed inferiore per effetto di crescenza nasconderà la superiore, e diverrà un invoglio, o piuttosto un *(fig. 13. x)* perigonio bislungo, aperto nella sommità, con orlo un po' obliquo, quadrilobato o guernito di grossi denti acuti, come prominenze inuguali per numero, forma e grandezza. L'altra parte intanto, in fondo al perigonio, forma l'antera ovale con apertura al vertice, circondata da quattro lobi corrispondenti a quattro cavità, per altrettanti processi derivanti dalla faccia interna o endoteca della stessa antera. In ciascuna cavità si contiene una massa pollinica.

La naturalissima famiglia delle graminacee direttamente non fornisce materia alla presente discussione intorno agl'invogli fiorali, che in essa, distinti col nome generico di glume, sono di più pezzi, disposti non a cerchio ma alternamente sopra due lati, e si posson ritenere in conto di brattee. Nelle graminacee però, il carpello, sebbene per modo indiretto, porgesi ancora alla spiegazione degli accidenti sull' orlo o lembo di taluni degl'invogli fiorali di un sol pezzo. La foglia in tali piante costa generalmente di picciuolo vaginante, di lembo o lamina, e di linguetta tra l' una e l'altra dalla faccia interna: tre parti più o meno sviluppate, o l'una di esse mancante, talora la lamina, quando il picciuolo, secondo l' età, il sito in cui si trova, la funzione cui serve; varietà che occorre talvolta sul medesimo individuo. Nel formento, nel grano turco ed altre della famiglia, le sole foglie primordiali e le glume mancano di lembo e di linguetta, essendo ridotte al solo picciuolo. La linguetta, a guisa di plica o laminetta trasversale, nelle foglie primordiali, quando comincia a formarsi, sembra piuttosto il termine della lamina interna del picciuolo vaginante, mentre la lamina esterna del medesimo picciuolo formerebbe il lembo lineare. Queste tre parti però ricompariscono sotto varie forme, più o meno sviluppate, nel carpello di molte graminacee. Il picciuolo dilatato costituisce sempre l'ovajo; le altre si modificano diversamente. Nel grano turco la linguetta non apparisce al primordio del carpello, ma poco appresso, quando il lembo smarginato comincia a ristringersi ed allungarsi per formare lo stilo, che si continua nello stimma. Essa allora somiglia ad una laminetta ovale che in se-

guito abortisce. Ma nel gioglio *(Lolium perenne)*, nella panicastrella *(Setaria viridis)*, nella cannarecchia *(Sorghum halepense)* alla medesima età del carpello che nel grano turco, le due prominenze del cortissimo lembo smarginato si allungano in due stili, siccome ha luogo ancora nel riso *(Oryza sativa)*, in cui un terzo stilo, che non sempre esiste, o è corto, deriva probabilmente dalla linguetta. Si vede adunque che delle tre parti costitutive la foglia lungo il fusto, altrove e pel carpello, il picciuolo diviene ovajo, il lembo allungasi in unico stilo nel formentone, come fa talvolta anche la linguetta nel riso formando un terzo stilo *(tav. 1 fig. 18)*; e che d'ordinario i due lati del lembo, disgiunti in principio solo mediante un leggiero seno nella sommità, assumendo una crescenza a sè, si allungano poscia a formar due stili, l'uno dall'altro indipendente, separati infin dalla base a crescenza finita.

Lasciamo stare le tante varietà e modificazioni delle glume, il loro nervo mediano longitudinale, che nella lamina della foglia caulinare vien rappresentato dalla rachide, ne unisce i due lati, e d'ordinario non si prolunga oltre la sommità. Intanto nelle glume della segale, per esempio, esso procede innanzi di là dai confini del parenchima, assottigliato in resta, ed in quelle interne dell'avena, assunto una crescenza in certo modo più indipendente, separasi di lungo tratto dalla sostanza dell'organo formando la così detta resta basale, ovvero la dorsale. Perfino le due lamine costitutive la foglia, corrispondenti alle due facce, affatto distinte in un gran numero di piante per tante particolarità dei rispettivi elementi organici onde son formate, in certe anche facilmente separabili, e che nel lembo delle foglie graminacee non si riconoscerebbero a nessun carattere certo; nel loro carpello per contrario, al tempo del fiorire, appariscono più o men chiaro, se non in tutte, almeno in talune, come ad esempio il riso *(Oryza sativa)* ed il gioglio *(tav. I. fig. 17)* *(Lolium perenne)* in quanto sappiamo. Nel primo le due lamine carpellari son debolmente unite nella parte inferiore dal tessuto fibroso vascolare; mentre nel gioglio differiscono sì fattamente per colore, grossezza ed altro, da parere ciascuna di esse poter assumere una certa indipendenza. L'esterna biancastra, continuantesi negli stili, *(tav. I. fig. 16-s)* è molto sviluppata rispetto alla interna sottile, di color verde, in contatto coll'uovicino come ne fosse la veste superficiale, quando invece rappresenterebbe piuttosto una sorta di endocarpo. Nelle graminacee quindi si ha una pruova senza esitazione della capacità modificativa delle

parti di una foglia ad assumere qualità organiche per differenti funzioni, solo che se ne esaminino i fiori infin da che spuntano, ed in seguito a misura che crescono. In queste piante intanto colla pretenzione di riconoscervi una corrispondenza numerica tra gli stami ed i carpelli, si ammette generalmente l' aborto di uno o due carpelli, dietro la regola ammessa che il numero degli stili indichi quello degli ovaj, e per conseguenza dei carpelli. Ciò è vero in molti casi, ma non in tutti, siccome vedesi nelle graminacee.

L' unico invoglio fiorale regolare, quasi affatto polisepalo, del fico *(Ficus Carica)* formasi nel seguente modo nel fiore femina. La prima apparizione di questo fiore somiglia a piccolissimo granello rotondo, celluloso, liscio non percettibile *(tav. 11. fig. 7, 8. 9)* alla vista naturale; il quale, crescendo, comincia dapprima a mostar due parti mediante un rilevamento circolare nel terzo superiore. La parte di sotto è il primordio del perigonio, e propriamente il tubo, il quale punto o poco cresce in seguito, mentre l' orlo, o termine suo in alto, poco stante divien sinuoso (*tav. 11 fig. 10 a 15*) con tre, quattro, o cinque punti più elevati; i quali poscia col crescere allungansi in sepali. Questi punti non sono elementi separati, ma prominenze di un organo basale rappresentante il tubo del perigonio, siccome i denti, le lacinie, i lobi nella lamina di una foglia semplice. La parte superiore, somigliante ad un mammellone, modificasi a poco a poco in foglia carpellare, di cui la lamina dilatata rappresenta l'ovajo, mentre un leggiero rilevamento sull'orlo della depressione al vertice concavo, è il primordio dello stilo, il quale in seguito si bifurca in due stimmi inuguali sprolungati. Comechè nel fico occorrano talvolta due ovaj, l'uno di rincontro all'altro, pure il caso ordinario di due stimmi, standovi un sol carpello, non indica esservi stato aborto di un carpello. Ed i sepali quantunque distinti, giunto il fiore a sua perfezione, non derivano altrimenti che da prominenze sull' orlo di un organo basale; e questo è il tubo perigoniale di un sol pezzo in principio, che in seguito punto nè poco crescendo in concorrenza con i denti formatisi sul suo orlo, riducesi infine quasi a niente, nè facile a riconoscersi nel fiore pervenuto all'ultimo accrescimento. Tanto dichiarano le osservazioni successive, dal primordio ed a misura che l'organo procede al suo termine. Con tal metodo si è veduto parimenti gl'invogli fiorali nel *Lamium purpureum*, ed in qualche *Salvia*, essere in principio di un sol pezzo, cioè apparir prima la parte tubulare, poscia sul-

l'orlo periferico loro le prominenze calicinali e corolline, la cui crescenza inuguale dà luogo al calice ed alla corolla irregolare.

Duchartre (2), venti anni fa, opponevasi alla teoria di Schleiden nel suo lavoro sulla formazione del fiore e dell' uovicino nelle primolacee, facendo vedere che i loro invogli fiorali sono in principio di un sol pezzo, e che sul loro orlo periferico nascono poi le lacinie calicinali e corolline. Nondimeno, dopo tanto tempo, prevale ancora generalmente l'idea contraria. Ma in un esame sulla *Primula sinensis*, non col fine di vedere la formazione degl' invogli fiorali, essendoci abbattuti nei fatti come furono annunziati da Duchartre, ed in qualche altro d'una certa importanza, ciò ha dato occasione al presente ragionamento. La detta *Primula* fiorisce per più mesi dell' anno, ed offre perciò la opportunità di poterne studiare successivamente lo sviluppo di ciascun organo. I fiori, alla base di piccolissime brattee, spuntano dapprima in guisa di granelli *(tav. 1. fig. 1. a)* rotondi, i quali, infino a che misurano due decimi di millimetro, lisci in tutto l'ambito, costituiti di solo tessuto cellulare, non mostrano prominenza ne fessura di sorta. Divenuti più grandi, uguali ad un sesto di millimetro, cominciano a dividersi in due parti, l'una *(tav. 1. fig. 2.)* esterna in sembianza di scodella, di un sol pezzo, il cui orlo periferico, leggiermente sinuoso, ha cinque seni ed altrettante piccolissime prominenze ottuse. Quest'essa è il calice al suo primordio, a tubo evidentemente monosepalo, ed in cui i cinque rilevamenti sull'orlo dinotano il lembo che in seguito si svilupperà. La seconda parte del primitivo tubercoletto fiorale, alquanto rilevata oltre l'orlo del calice, è il primordio della corolla, che allora si presenta come una massa cellulare omogenea un poco depressa nella sommità. Nel fioretto arrivato ad un quinto di millimetro, il calice più cresciuto, sì nel tubo e sì nel lembo, nasconde la corolla non visibile *(tav. 1. fig. 3.)* che guardandola di prospetto. Essa allora non è come prima, una massa cellulare uniforme depressa al vertice, ma ha già assunta la forma di un disco alquanto concavo con cinque angoli nel contorno, alterni con i denti del calice, col quale non ha veruna aderenza. Il disco concavo sarà il tubo e gli angoli formeranno il lembo. Alla base interna *(Tav. I. fig. 5.)* di ciascun angolo una piccola prominenza rotonda è il primordio di uno stame. Alla grandezza

(2) *Observations sur l'organogénie de la fleur et en particulier de l'ovaire chez les plantes a placenta centrale libre — Ann. des sciences natur. 1844.*

di un quarto di millimetro, il fioretto costituito *(Tav. I. fig. 6.)* di quattro parti, ne mostra tre di profilo, il calice, la corolla ed il nascente gineceo; l'altra parte, ossia l'androceo diviso in cinque produzioni bislunghe, come tanti raggi fin presso alla base, scorgesi di prospetto ed unito alla faccia interna della corolla, per modo da parere allora l'uno e l'altra un sol organo, anzichè due congiunti insieme, ma in atto di dividersi in parte esterna membranosa corollina, ed interna staminale. Nel fiore grande un terzo di millimetro il lembo del calice sorpassa e nasconde l'altro della corolla, e le antere in corrispondenza dei suoi lobi, sono già, essendo in via di formazione, divenute prominenze ovali divise, quasi, mediante una depressione *(tav. I. fig. 8 a-a')* longitudinale in due sacchetti; i quali poscia saranno le due cellette di ciascuna antera; di che allora appena si vede l'indizio. In questo mentre il gineceo, ingranditosi nell' ambito, ha cangiato forma, e si è diviso in due parti; l'esterna col vertice depresso, somigliante in certo modo ad una *(tav. I. fig. 8.-c)* coppettina, è il primordio del carpello, in fondo al quale giace nascosta l'interna, in guisa di bottoncino rotondo isolato, ch'è il trofospermo, in tutto simile allora alla prima apparizione degli altri organi fiorali. Il carpello poscia, nel fioretto grande mezzo millimetro, apparisce di forma quasi ovale con l'apertura *(tav. 1. fig. 9)* non sempre circolare, ma alquanto obbliqua.

Indi l'orlo di quest'apertura allungasi in stilo *(fig. 10)* cilindrico, la cui sommità cuoprendosi finalmente di papille cellulari, queste tutte insieme costituiscono lo stimma, ossia una massa cellulosa rotonda depressa nel centro, onde si va nel canale dello stilo, e d'ivi nella cavità dell'ovajo. Le altre parti non rimangono stazionarie; negl'invogli fiorali il tubo ed il lembo crescono quasi a paro, le antere divengono biloculari, ed il trofospermo si eleva infino alla metà dell'ovajo, ed anche oltre, senza aderirvi in verun punto. Esso, fuori alla sommità ed alla base, ne' fioretti misuranti un millimetro circa, è coperto di prominenze coniche, primordii di altrettanti uovicini, e manca non altrimenti che il carpello, di fibre e vasi. Ma questi elementi organici non tardano a manifestarsi, e più visibilmente, in principio, nello stilo. Otto fascetti fibrosi vascolari, costituiti di sottilissime cellule allungate, racchiudenti esilissimi tubi spirali, dallo stilo scendono a mano a mano all'ovajo. Il quale, divenuto pericarpio, aprendosi, lungo il cammino degli stessi fascetti, in altrettante parti dette valve, più o men regolarmente, sembra derivare non da

un sol carpello ma da più carpelli uniti in un corpo. Forse che ciò occorrendo in altre primulacee ha dato luogo a tale opinione. E siccome incontra talvolta, sebbene di raro, che il pericarpio apresi in cinque valve, questo potrebbe parerne una pruova, e che il numero quinario regolasse la costituzione simmetrica di tutti gli organi fiorali. Procedendo l'ovajo alla maturezza, e gli uovicini passando in semi, il trofospermo, quasi *(fig. 11)* a modo di campana con bottoncino nudo al vertice; nell'orlo inferiore divien libero, e porta circa otto denti più o men grandi e divergenti, nella superficie dei quali non vengono uovicini, siccome al vertice, secondo si è detto di sopra. Il rimanente della superficie trofospermica è coperto di uovicini disposti in serie spirali continue.

In tre carpelli si son noverati una volta sessantaquattro uovicini in ciascuno, tutti e tre aveano otto filetti vascolari per altrettante valve pericarpiche a suo tempo; i denti divergenti all'orlo inferiore del trofospermo erano ancora otto; onde il numero degli uovicini era il multiplo di otto. Non voglio con ciò dire che sì fatta corrispondenza numerica sia costante; in fatti tre altri ovaj a sette filetti vascolari e sette denti trofospermici, l'uno conteneva cinquantatre uovicini, il secondo cinquantasette, l'ultimo sessanta. Anche il numero delle valve, presumendole dal cammino dei vasi, pare talvolta potesse trovarsi, a maturezza compiuta, raddoppiato, standovi lungo la loro parte mediana una linea alquanto opaca, che sembra pure quasi rilevata, ed è un nuovo filetto fibroso vascolare che ivi comincia a mostrarsi. Oltre a ciò cresce la varietà per gli uovicini abortivi; nè apparisce nesso e dipendenza organica diretta tra i filetti vascolari del carpello con le appendici trofospermiche e gli uovicini. Forse che un esame più accurato troverà quella corrispondenza che ora non si vede. A noi pare variabile il numero dei filetti vascolari, e di conseguenza quello delle valve, che d'ordinario sono irregolari ed imperfette, da cinque a dieci, quantunque tra questi termini massimo e minimo i numeri intermedii occorrano più di frequente. Appariscono dapprima cinque fascetti vascolari ad uguale distanza nella periferia dell'ovajo; indi tra essi altrettanti fascetti secondarii; se non che questi d'ordinario sono in minor numero e poco sviluppati, secondo lo stato di vegetazione della intiera pianta e quello del pericarpio. Anche l'orlo inferiore del trofospermo seguita in certo modo lo stesso andamento; il numero delle prominenze o denti in quella parte varia da cinque a dieci; ma questi estremi sono rarissimi, più frequenti i numeri interme-

dii: e spesso tra sei o sette prominenze grandi uguali ce ne ha qualcuna piccola, qua e là, come fosse appendice della contigua più sviluppata. E la varietà numerica degli uovicini d'ordinario sta fra cinquanta e sessanta.

La varietà increspata della *Primula sinensis* consiste nella grandezza maggiore del fiore, nel calice con dieci denti, cioè con cinque denti secondarii, a contorno poco regolare, interposti tra' denti maggiori priminarii; e nel lembo della corolla sfrangiato, increspato, più sviluppato. In questa varietà il fiore formasi allo stesso modo di sopra descritto; e le particolarità testè menzionate si mostrano infin dal principio. Nel qual caso sull' orlo del tubo calicino i denti primarii spuntano poco prima dei secondarii.

Emerge delle cose esposte sulla genesi di talune parti del fiore in certe piante, e di tutti gli organi fiorali della *Primula sinensis*:

1° Che il fiore in essa, non altrimenti che in tante altre piante, spunta sotto forma di tubercoletto sferico senza veruna apertura o depressione in tutta la sua periferia, costituito di solo tessuto cellulare. Tubercoletto che viene nell' ascella di una foglia, e deriva dalla parte assile in continuazione con la midolla.

2° La massa cellulare sferica dividesi poscia in due parti, l' una esterna ed inferiore, l' altra interna superiore. La prima costituisce il primordio del calice, la seconda della corolla; ciascuna a contorno uguale, indi sinuoso: ed infin d' allora scorgesi, la loro parte inferiore, quella che in seguito sarà il tubo del calice e della corolla, essere continuata intiera, di un sol pezzo.

3° L' orlo circolare di questi due invogli fiorali dapprima è uguale, continuato, poscia sinuoso; allora i suoi cinque punti prominenti rappresentano il principio delle lacinie dei rispettivi lembi, del calice cioè e della corolla, alterne fra loro. Esse, nell' uno e nell' altro organo, nascono posteriormente al tubo; nel quale non si vede altrettanti elementi distinti, ma un tutto unito che precede le lacinie di diversa forma e grandezza per ciascuno, costitutive i loro lembi.

4° L' androceo nasce dopo la corolla, e sì forte a quella unito da parere in principio non ne fosse altrimenti che la lamina interna, e che entrambi allora costituissero un sol organo. Ciascuno poi assume forma e carattere a sè, rimanendo l' uno e l' altro mai sempre uniti alla base. Ad ogni modo tra le lacinie calicinali e le corolline ci ha corrispondenza

numerica e di alternanza rispettiva, mentre fra stami e lembo corollino solo corrispondenza numerica.

5° Il carpello unico fa dissimetria con le cinque fenditure calicine e corolline, e l'androceo di cinque stami. Ma il calice, la corolla, ed il gineceo, essendo in principio formati ciascuno di un sol pezzo, rappresentante allora siccome si è veduto, la parte inferiore; la quale nei due invogli fiorali sarà il così detto tubo, e nel gineceo l'ovajo, ne segue che il voler ammettere in ciascuno di essi, dietro un concetto di presunta necessità simmetrica, cinque elementi primitivi distinti, non regge punto alla osservazione. Gli è l'orlo circolare nella loro sommità che si modifica in seguito variamente, dando origine alla lacinie degl' invogli fiorali, e nel gineceo allo stilo.

6° Il carpello o gineceo mostrasi dapprima conforme al calice ed alla corolla, cioè una massa cellulosa rotonda, la quale indi a poco, crescendo, si abbassa nella sommità. Questa parte primordiale del carpello sarà l'ovajo, nel cui fondo allora un punto gibbuto indica il primordio del trofospermo. L'orlo del nascente ovajo si ristringe a poco a poco per indi allungarsi e formare lo stilo.

7° Come prima lo stilo, con lo stimma nella sommità, son prossimi alla loro perfezione, appariscono in quello cinque esili filamenti fibrosi vascolari, i quali si continuano appresso lungo la parete dell' ovajo; se non che ivi fra questi primarii fascetti se ne interpongono talvolta altrettanti, e più esili ancora. L'ovajo perciò aprendosi a maturezza compiuta in più parti, più o men perfettamente, secondo il cammino di quelli, induce a credere allora che sia il gineceo in origine costituito di più carpelli piani, disposti in cerchio, congiunti per i margini, giusto quante sono le parti in cui si apre l' ovajo.

8° Il trofospermo, isolato nella cavità dell' ovajo, conformasi, col crescere a mo' di campanetta con in cima un bottoncino, ch' è la continuazione dell' asse, e coll' orlo basale guernito di cinque a dieci denti; questi ed il bottoncino in cima sono i soli siti mancanti di uovicini che cuoprono il rimanente della superficie dell' organo.

Stando ai fatti notati nella *Primula sinensis*, alcuni de' quali han luogo parimenti in altre piante, si deduce essere le lacinie calicine e corolline, non che le valve dell' ovajo, formazioni posteriori alla comparsa dei rispettivi organi, nè potersi ritenere quali elementi primordiali simili dei medesimi congiuntisi in progresso di vegetazione. Non

presumiano tuttavolta affermare che tale sia sempre il caso degl' invogli fiorali di un sol pezzo. Che più elementi simili e distinti in origine si congiungano poscia in un organo complesso, gli esempii abbondano segnatamente negli organi sessuali; e per recarne un solo può citarsi il melarancio, dove gli elementi corollini, staminali e carpellari sono distinti al loro primordio. E così isolati crescono in seguito, quelli della corolla divenendo petali; mentre alcuni staminali si uniscono per breve tratto in più fascetti mediante i filamenti, e gli altri del gineceo congiuntisi strettamente pel dorso o lato esteriore, in tutta la lunghezza, formano insieme un pistillo a più compartimenti interni, noto ad ognuno.

E che tutti gli organi fiorali e le loro singole parti, come sono isolate e distinte a loro compiuto accrescimento, lo sieno parimente in principio, in tante piante è fatto irrecusabile. Nel *Ranunculus Ficaria*, per esempio, vedesi i sepali, molto avanti la fioritura, non disposti esattamente in cerchio, ma l'uno in seguela dell'altro a brevissima distanza, secondo una spirale, la quale dove si raccorciasse infino alla estinzione, gli stessi sepali si troverebbero sul medesimo piano; distanza che non esiste, o non è distinguibile con agevolezza, nelle altre spezie, o almeno nel maggior numero, dello stesso genere; e nelle quali sì fatta osservazione occorre, più o men chiaro, ancora negli elementi della corolla, in quelli dell'androceo e del gineceo. Abbiamo quindi due casi per certi rispetti contrarii, cioè tutti gli organi del fiore nella *Primula sinensis*, calice, corolla con l'androceo, ed il gineceo in origine ciascuno formato d'un sol pezzo; mentre nel ranuncolo citato ed in altri, sepali, petali, stami e carpelli sempremai distinti infin dalla nascenza.

Ci sarebbe un terzo caso partecipante nel medesimo tempo del primo e del secondo? A noi pare di sì, se l'apparenza esteriore nol nasconde. I sepali, i petali e gli stami nella *Capparis spinosa* nascono isolati distinti, come mostransi nel fiore; ma il gineceo in principio è la sommità dell'antogeno (*tav. 11. fig. 16 a 17 c*) o asse fiorale, convesso, emisferico, senza alcuno accidente in tutta la superficie, uniformemente costituito di solo tessuto cellulare. Massa cellulosa che comincia dapprima a mostrare una depressione nel vertice (*fig. 18 - 20 - 21*) circoscritta da orlo uguale, che poscia diviene sinuoso. Or le prominenze sull'orlo, in numero variabile, da cinque a dieci, indicano altrettanti trofospermi nascenti nella parte interna centrale della massa cellulare costitutiva il gineceo. Ivi essa dividendosi in più parti solide dà luogo alla formazione

di tante cavità, come nicchie, poste in giro; in cui non ancora esistono uovicini. I sepimenti trofospermici che dividono le nicchie in giro, sono allora solidi, di struttura uniforme, piuttosto compatta; essi poscia partonsi in due foglietti per effetto dello scioglimento di buon numero di cellule nella parte mediana centrale. Questo processo dissolutivo *(fig. 24)* comincia quando spuntano gli uovicini lateralmente alla base dei detti sepimenti, i quali perciò si hanno a ritenere per trofospermi procedenti da carpelli piani, in certo modo come avviene nel papavero. Se non che infino a questo punto di vegetazione i carpelli piani non si scorgono a verun segno sensibile, si formeranno, forse, appresso; nel qual caso i trofospermi precederebbero i carpelli. La varietà quindi è grande in ciò che concerne il cominciamento dei singoli organi fiorali e delle loro parti, varietà che occorre non di raro in quelli dello stesso fiore, siccome addietro si è dichiarato; e tra le specie del medesimo genere.

Inoltre può darsi in certe piante che il secondo invoglio fiorale funzioni in due modi, da corolla e da androceo. A chi non son note le strette relazioni che passano tra l'uno e l'altra? Basterebbe solo il passaggio graduato dei petali in stami, facilmente osservabile nella ninfea, o la trasformazione ovvia, in molte piante, degli stami in petali. Guardate l'androceo della *Capparis* al suo primordio; non differisce da quello della *Primula sinensis* a pari età, limitato in alto dal solito orlo circolare non sinuoso, e nel rimanente della superficie liscio. Spuntano da questa gli stami sotto forma di turbercoletti isolati, a mano a mano di su in giù verso la base, ove contemporaneamente, o poco prima, si affacciano i quattro petali poco allora dissimili dagli stami. Gli stami infine aderiscono quasi sempre alla corolla monopetala nelle altre piante.

Essendo così è egli possibile, domando, che nella *Primula sinensis* l'androceo e la corolla anzichè essere primitivamente isolati, per indi congiungersi, fossero parti o due lamine del medesimo organo corrispondenti alle due facce? Le foglie primordiali nel granone *(Zea mays)*, ed altre graminacee, son rappresentate dal solo picciuolo, in quelle che seguitano comparisce il lembo lineare in continuazione della lamina esterna ed inferiore dello stesso picciuolo, rimanendo nel mezzo la linguetta, quasi termine dell'altra. Similmente in parecchie boraginee un'appendice in direzione dei lobi corollini, sotto varia forma s'interpone fra il tubo ed il così detto lembo di quell'organo, e nel genere *Silene* tra l'unghia e la lamina di ciascun petalo. Nella *Primula* menzionata non ho veduto

l'androceo isolato, come le altre parti a misura che spuntano, precedere o seguitar la corolla in ordine di nascenza e rimanerci congiunto. Come prima sull' orlo della corolla rilevano appena i cinque denti, per divenir poscia lobi, alla base di ognuno di essi apparisce un piccol rigonfiamento sferico, primordio dell' antera, il quale poco appresso si allunga nella stessa direzione dei lobi. Formansi così cinque raggi, che si confondono in una base in fondo della giovine corolla. Questi cinque raggi costituiscono insieme il nascente androceo, organizzatosi nella faccia interna della corolla. In questo atto formativo, poichè i due organi non spuntano dapprima distinti, e la credenza che sieno primitivamente confusi o congiunti in una massa rimane ne' termini di probabilità; non è egli più naturale starsene alla vista, che scorge nell'androceo un processo vitale della lamina interna di un organo, mentre l'altra si allarga in membrana? La figura 19 nella tavola prima, ritraente il fiore dell'*Allium nigrum* in atto formativo, giustifica lo stesso concetto di potersi ritenere lo stame *a* ed il petalo *b* quali parti di un medesimo organo. Tale interpetrazione ormai potrebbesi appoggiare ad altri fatti di altro genere, concorrenti però a mostrare l'indipendenza, quasi, o la vegetazione a diverso grado, che le due lamine della foglia in dati punti possono assumere. Oltre le considerazioni esposte intorno alla significazione morfologica della linguetta nelle foglie delle graminacee, nei petali della *Silene;* le appendici svariate fra il tubo ed il lembo corollino in alcune apocinacee *(Vinca, Nerium)* non sono piuttosto produzioni e termine della lamina interna del tubo? Viene ancora a proposito ricordare il carpello del giglio, in cui si è visto le due lamine molto discoste, debolmente unite da un tessuto cellulare floscio in procinto di riseccarsi o disfarsi, e quelle prender caratteri di indipendenza, come se in principio non fossero state parti di un medesimo organo. Potrebbesi allegare ancora la partizione di tanti carpelli in mesocarpo ed endocarpo; e sopratutto la corolla del visco *(Viscum album)*, la cui lamina superiore o interna, sempremai incarnata coll'altra, produce il polline col suo stesso parenchima. Forse che il connettivo dilatato, quasi fogliaceo, del *Potamogeton perfoliatum* rientra nella stessa categoria, come quello che dalla faccia interna concava *(tav. 1, fig. 14 - 15 - a)* dà origine alle antere.

Non è a tacere, infine, che alla significazione morfologica data intorno la origine degli stami nella *Primula sinensis* si oppone la teoria generalmente accetta sul numero e la disposizione simmetrica delle parti co-

stitutive il fiore delle primolacee. Richard, Payer ed altri notano che nel *Samolus Valerandi*, nella *Lysimachia nemorum* cinque appendici filiformi inserite sull'orlo del tubo corollino, alternanti con i cinque stami, indicano già un altro verticillo stamineo più esterno imperfetto; e che questo, in esse, mentre stabilisce l'alternanza visibile fra due verticilli di stami, nelle altre piante del medesimo ordine naturale l'alternanza vien turbata apparentemente dall'aborto di detto verticillo. A noi sembra più naturale che la regola, in questo caso, si avesse a desumere piuttosto dal maggior numero dei fatti che da poche eccezioni. Si è visto che lacinie calicinali e corolline hanno origine da altrettanti punti vegetativi, disposti a cerchio, sull'orlo de' loro rispettivi organi, e gli stami dalla base dei lobi corollini. Ora il numero di questi punti vegetativi talvolta varia; nel fico, per esempio, da tre a cinque derivandone ugual numero di lacinie calicinali; nel pomidoro coltivato i lobi della corolla sovente sono più di cinque; la figura 12 nella tavola prima ritrae un calice in crescenza della *Primula sinensis* a fior grande increspato, nel quale calice veggonsi tra le cinque primarie lacinie, altrettante più piccole nate posteriormente. Essendo così, appena esito a riconoscere la origine delle appendici fiorali nel *Samolus* da punti vegetativi sull'orlo del tubo corollino che si sta formando. Appendici che, nella boccia molto giovine di tal pianta, sono bislunghe, il loro tessuto è conforme affatto a quello del tubo anzidetto con cui si continua, senza la minima traccia di una provenienza più lontana.

Spiegazione delle Figure

Tav. I.

Fig. 1 a 12 Primula sinensis.

1. Sommità di un piccol ramuscello fiorifero ingrandito, con fiori a diversa età, alla base interna di una brattea *b* più o meno sviluppata, guernita di peli multicellulari, ghiandolosi nella sommità. Il fiore *c* col calice cinquefido, contenente la corolla non per anco sviluppata; i tre tubercoli sottoposti rappresentano il primordio di altrettanti fiori formati di solo tessuto cellulare: quello di prospetto *a* misurava due decimi di millimetro.

2. Lo stesso tubercolo fiorale *a* fig. 1. cresciuto oltre il doppio e modificatosi. Esso si è diviso in due parti; la inferiore con orlo circolare sinuoso è il primordio del calice, la superiore, depressa nella sommità, è il primordio della corolla.

3. Fiore poco più sviluppato del precedente veduto di prospetto; i cinque lobi esterni alquanto rivolti nella parte superiore sono i lobi del calice, dentro al quale vedesi il disco della corolla con cinque angoli nel contorno; nel centro ci ha la sommità sferica dell'asse, la quale costituisce il primordio del carpello.

4. Calice del fioretto precedente veduto di profilo.

5. Altro fioretto poco più sviluppato veduto di prospetto, nel quale, oltre le parti indicate nella fig. 3, alla base di ciascun angolo del disco corollino apparisce una piccolissima prominenza in sembianza di tubercoletto, ch'è il cominciamento di uno stame.

6. Fioretto di profilo in via di formazione appartenente ad una varietà o fior piccolo della stessa *Primula sinensis*. Esso è costituito di tre parti, il calice a cinque denti nella parte inferiore, indi la corolla, dal mezzo della quale sporge la sommità del carpello.

7. Fioretto in via di formazione, appena più grande di quello della fi-

gura 5, veduto di prospetto con le stesse parti indicate in quella figura, ma più sviluppate; i lobi della corolla e le prominenze staminee alla loro base si sono allungate.

8. Fiore più cresciuto reciso lungo la metà. In questa figura si è soppresso il calice onde mostrare le antere che si vanno formando alla base interna dei lobi della corolla, come fossero tanti rami o prominenze de' medesimi lobi; *à* antera in fondo veduta dalla faccia rivolta al nascente carpello *c*.

9. Carpello più sviluppato che nella figura precedente con parte della corolla e le rispettive antere più perfette.

10. Carpello divenuto più grande ma non per anco perfetto, del cui ovajo si è portato via il lato di prospetto con parte del trofospermo libero carnoso, sopra cui rilevano gli uovicini.

11. Trofospermo di un carpello giunto a perfezione, isolato in fondo dell' ovajo, di cui la figura ne porta un avanzo. Esso trofospermo, in forma di campanetta, presenta nella superficie le impressioni ov' erano attaccati i semi quasi maturi, alcuni denti più o meno distinti nell' orlo inferiore, e la parte assile, che nel fondo dell' ovajo per brevissimo tratto libera, sporge finalmente a guisa di piccolo rilevamento rotondo nella sommità del medesimo trofospermo. La forma esattamente accampanata di questo, e la uniformità dei denti nell' orlo, giusta la figura, s' incontrano di raro.

12. Calice della *Primula sinensis* a fiore grande increspato; tra le cinque lacinie normali se ne sono formate altrettante più piccole.

N. B. Queste osservazioni si son fatte nel corso dell' inverno sulla varieta a fiori grandi increspati della *Primula sinensis* coltivata, tranne quella espressa con la figura sesta.

13. *Najas marina*. Gruppo di fioretti maschi in via di formazione accompagnati da brattee *bb*; esso in tutta la lunghezza misurava quasi un millimetro: *a* primordio del fioretto maschio in guisa di bottoncino liscio rotondo, *c-c* due fioretti maschi più sviluppati, mostranti due parti mediante un orlo circolare, la superiore primordio dell' antera, la inferiore di un invoglio *x*, che rappresenta un perigonio aperto nella sommità quatrilobata, con dentro l' antera a quattro cellette.

14. *Potamogeton perfoliatum;* connettivo *c*, ed antere *a a*, nello spadice lungo $^1/_3$ di millimetro, veduti dalla faccia interna. Le antere allora sono due piccolissime prominenze rotonde alla base del connettivo.

15. *Potamogeton perfoliatum;* le stesse parti più sviluppate nello spadice lungo un millimetro; le antere son divenute quasi bilobate nella sommità mercè una depressione longitudinale.

16. Ovajo del *Lolium perenne* alto quasi un millimetro, al tempo della fioritura, veduto dalla faccia interna, ove in *r* ha una piccola depressione, come fosse una rima rimasta tra' margini del carpello, *ss* gli stili recisi formati dai lati della foglia carpellare. Essi sono canalicolati nel lato corrispondente alla faccia superiore o interna della foglia carpellare, e dal quale, infin dalla base, escono i peli stimmatici; *a* prominenza della parte vaginale della foglia carpellare in corrispondenza della costola.

17. *Lolium perenne.* Sezione di un carpello lungo un millimetro, nel quale la lamina interna in contatto coll'uovicino, e che poscia corrisponderà all'endocarpo, indicata nella figura con una zona di puntini, contiene, al tempo della fioritura, materia verde nelle sue cellule, e si separerà poscia dal mesocarpo.

18. Carpello dell'*Orzyza sativa* lungo un millimetro, compresi gli stimmi, prima della fecondazione, quando gli organi sessuali stanno dentro le glume, e la pannocchia nella guajna della foglia terminale. L'ovajo in corrispondenza di *a* presenta una rima o solco, indicante quasi due margini carpellari alquanto introflessi. Nella sommità si trifurca; due rami divengono stili e stimmi perfetti, il terzo abortisce o cresce pur esso a paro degli altri: per questo gli stili nel riso sono talvolta in numero di tre.

19. *Allium nigrum.* Sezione di un fiore lungo un millimetro in via di formazione; *c* gineceo depresso nella sommità, *a* antera, *b* petalo, come due rami d'un medesimo organo, senza veruna diversità di struttura in quel tempo, essendo l'una e l'altra parte formate di solo tessuto cellulare senza fibre e senza vasi.

20. Lo stesso fiore veduto di prospetto, il gineceo nel mezzo con intorno sei prominenze, ciascuna divisa in due siccome si è detto.

Nella figura che precede appariscono i rapporti con figura ottava rispetto alla origine degli stami.

*

Tav. II.

Fig. 1 a 6—Zea Mays; alcune particolarità del carpello al primordio ed in via di crescenza.

1. *a* primordio del carpello in forma di massa cellulare rotonda; *c* lo stesso poco più progredito leggiermente abbassato nella sommità. Entrambi sono guerniti di brattee presso alla base.

2. Fioretto lungo un quarto di millimetro; il carpello *c* in via di formazione con intorno alla base, glume o brattee nascenti *a*-*a'*-*b* in crescenza, più o meno sviluppate, di varia apparenza e grandezza.

3. Carpello *c* più sviluppato.

4. Carpello ancora più cresciuto, nel cui fondo traspare in ombra l'uovicino.

5. Carpello *c* che comincia ad allungarsi da un lato per la formazione dello stilo; l'uovicino *o* in questo fioretto sporgeva un poco fuori la cavità basale del carpello.

6. Carpello più sviluppato, in cui il prolungamento *s* formerà lo stilo. Queste osservazioni sulla crescenza successiva del carpello della *Zea Mays*, infino a certo punto, si son fatte sopra una spica alta dieci millimetri, in cui i fioretti dalla parte inferiore verso la sommità erano successivamente più giovani. Nelle figure sono indicate solo alcune brattee nascenti alla base del carpello.

Le fig. 7 a 15 risguardano l' origine e cominciamento del fiore femineo nel fico.

7-8. Lamine longitudinali prese nel mezzo di due ricettacoli lunghi due millimetri circa; *b* brattee, *s* squame che dall'orlo del ricettacolo si abbassano nella concavità in corrispondenza di *o*, ove rilevano appena i primordii dei fioretti sotto forma di tubercoletti sferici, uguali a 0^{m},036 circa. Tutto ciò si può osservare alla lente semplice.

9. Gli stessi tubercoletti recisi per lungo, con parte del sottoposto parenchima cellulare, osservati all'ingrandimento lineare di 180. Essi son costituiti solo di cellule.

10-11. Tubercoli fiorali più cresciuti, la cui massa cellulare si è divisa in due mediante un orlo annulare divenuto leggiermente sinuoso; la parte inferiore *a* corrisponde al tubo del nascente perigonio, allora evidentemente monosepalo; la superiore *c* diverrà carpello.

12 a 15. (Le stesse lettere indicano le stesse parti che nelle due figure precedenti). Alcune modificazioni successive del carpello incipiente a misura che comincia ad ingrandirsi; esso divien cavo a poco a poco, mostrando la sommità aperta, o come fosse abbassata. La cavità sarà l'ovajo, ed il punto più prominente del suo orlo, figura 14-15, sarà lo stilo.

Le rimanenti figure, cioè da 16 a 24 appartengono alla *Capparis spinosa*.

16. Primordio del fiore della *Capparis spinosa* ingrandito. Esso è formato dalla sommità dell'asse *a*, ossia dall'antogeno, che non si allunga, costituito di solo tessuto cellulare, e circondato alla base da quattro foglioline o sepali, una delle quali è stata recisa per scuoprire l'antogeno *a*.

17. Lo stesso antogeno più cresciuto alla cui base spuntano quattro petali *x*, più in su gli stami *s*, rimanendo nella sommità la prominenza emisferica *c*, primordio del gineceo.

18. Androceo *s* da cui spuntano gli stami, e gineceo *c* più sviluppati. Il gineceo si è abbassato nella sommità, e l' orlo circolare è divenuto sinuoso.

19. Sezione trasversale alla base dell'androceo *s* fig. precedente; nella quale sezione appariscono le celline assili o midollari nel centro, con intorno molto tessuto cellulare più fino, circondato da una serie di stami nascenti, dalle sezioni de' quattro petali *x* e di altrettanti sepali *s*.

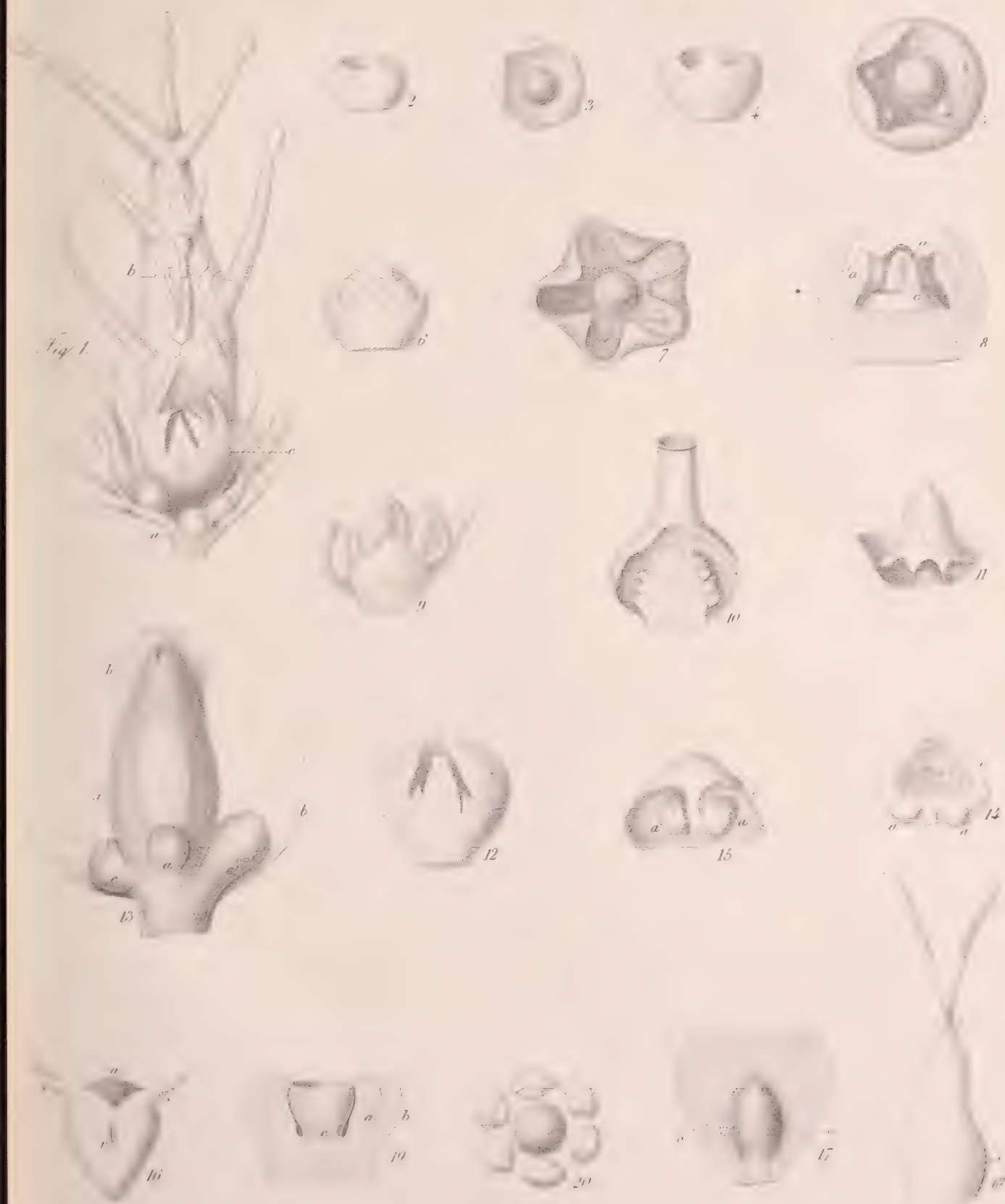
20. Gineceo più cresciuto di quello della fig. 18; i seni son divenuti più profondi, e le otto preminenze in serie circolare nella sommità dinotano il cominciamento di altrettanti trofospermi.

21. Lo stesso gineceo veduto di prospetto; le otto prominenze sono triangolari solide, come spigoli inclinati e diretti verso il centro dell'organo.

22. Sezione trasversale nella metà dello stesso gineceo fig. 20-21, per mostrare che lo spazio tra due spigoli, prima lineare, poscia largo alla base ed in seguito anche nel mezzo, è la parete fra due trofospermi contigui; dalla quale spunteranno, verso la base, gli uovicini. Gli spigoli quindi non sarebbero altra cosa che masse trofospermiche parietali di altrettanti carpelli piani posti in cerchio, siccome viene generalmente ammesso. Ma allora non si scorge traccia di questi carpelli piani.

23. Frammento di sezione trasversale di un gineceo molto più cresciuto di quello della fig. precedente, quando spuntano gli uovicini,

come si vede in *o*. Le cavità, allora, che dividono l'un trofospermo dall'altro sono ampie.

24. Frammento di sezione trasversale di un gineceo poco più cresciuto di quello della fig. 23. L'uovicino *o* a dritta mostra il nucleo, ed il sepimento trofospermico onde procede comincia già a dividersi in due foglietti mediante lo scioglimento delle cellule centrali di esso.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA
DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SULLA DETERMINAZIONE DELLE COSTANTI ARBITRARIE NEGL' INTEGRALI DELLE EQUAZIONI LINEARI, COSÌ DIFFERENZIALI CHE A DIFFERENZE FINITE

MEMORIA

DEL SOCIO ORDINARIO N. TRUDI

letta nella tornata del dì 7 giugno 1864

Notizie intorno al soggetto della memoria

Si sa che la risoluzione di quistioni importanti dipende da una opportuna determinazione delle costanti arbitrarie, le quali completano gli integrali delle equazioni differenziali lineari. Supposta un' equazione di tal natura dell' ordine n^{mo}, ordinariamente la determinazione di quelle costanti vuol'essere regolata in guisa che, per un particolare valore assegnato alla variabile, la funzione e le sue successive $n-1$ derivate prendano valori anche assegnati; ed è nota la bellissima soluzione di questa quistione data dall' illustre Lagrange; soluzione da cui risulta che i valori delle costanti, i quali soddisfano alle condizioni prescritte, si hanno ne' numeratori delle frazioni parziali in cui può decomporsi una certa funzione fratta razionale, che ha per denominatore il primo membro della equazione algebrica di grado n da cui dipendono gl'integrali particolari su' quali è fondata la integrazione completa. Ma si sa del pari che questa soluzione è limitata esclusivamente al caso in cui le radici della detta equazione sono tra loro tutte disuguali.

Dobbiamo tuttavolta osservare che lo stesso Lagrange avea cercato di estendere la sua soluzione anche al caso delle radici uguali: soluzione venuta a nostra contezza per la circostanza singolare di possedere un volume degli Atti dell'Accademia di Berlino, ov'essa è pubblicata; ch'è quello per l'anno 1775. Ma condotti per talune ricerche ad applicar le

formole date a quest'uopo da quel gran geometra, disaccordi visibili nei risultamenti del calcolo ci fecero concepire il sospetto che potessero non essere esatte; ed il sospetto fu mutato in certezza dopochè, cercando a dimostrare quelle formole, che LAGRANGE si limita soltanto ad accennare, trovammo di aver raggiunto una soluzione diversa, ma interamente uniforme a quella data dal medesimo geometra pel caso delle radici disuguali.

Aggiungiamo che una quistione del tutto analoga a quella, della quale è parola, si trova nella teoria delle equazioni lineari a differenze finite; ed è propriamente a riguardo di queste ultime equazioni che fu data da LAGRANGE la risoluzione della quistione di cui si tratta.

Ignorando allora se fossero già fatte da altri le osservazioni che abbiamo presentate intorno a queste ricerche di LAGRANGE, non avevamo omesso di assicurarcene per ogni via; ma le nostre indagini furono per buona pezza infruttuose. Però, non ha guari, volendo riscontrare una memoria del PAOLI, tanto conosciuta da'geometri, relativa alle equazioni a differenze finite ed alla partizione de' numeri, che trovasi nel secondo volume delle memorie della Società Italiana, ci venne a caso sott'occhio nel seguente volume terzo una memoria del MALFATTI dal titolo—*Delle serie ricorrenti*—e non fu lieve la nostra sorpresa scorgendo che in essa quel distinto geòmetra Italiano comincia appunto dallo esaminare le formole già dette di LAGRANGE, e le riconosce inesatte. Nè solo egli mette in vista il difetto, ma si è studiato a correggerlo ed a dare le formole convenienti per la risoluzione della quistione. Ora un lavoro così interessante del MALFATTI sembra interamente ignorato da'geometri; ed è inconcepibile come ciò potesse verificarsi; tanto più che questa memoria, di presso a cento pagine, è quasi una continuazione di quella del PAOLI, ed ha per oggetto principale i medesimi problemi sulla partizione dei numeri dal PAOLI considerati.

Se fosse lecito di pronunciare un motivo che abbia potuto influire a tener nell'oblio questo lavoro dottissimo del MALFATTI, noi dovremmo unicamente trovarlo nella esposizione alquanto pesante delle sue ricerche, le quali per una parte fondano sopra induzioni, anzichè sopra dimostrazioni generali, essendo guidate dallo esame di molti casi particolari, il che impegna a calcoli prolissi, cui non è così agevole di seguire attentamente; e per altra parte sopra una specie particolare di algoritmo di derivazione, da lui espressamente immaginato. Ma tutto ciò nulla toglie alla importanza delle sue deduzioni.

Intanto il pensiero che le osservazioni di MALFATTI avessero dovuto ben giungere a cognizione di LAGRANGE, ci spinse ad esaminare diligentemente i volumi delle memorie dell' Accademia di Berlino, posteriori a quello del 1775; e mal non ci apponemmo: chè nel volume pel 1792 ci venne fatto di ritrovare una nota che si rapporta all' argomento del quale è parola, e che ha per titolo: *Sur l'exspression du terme général des séries récurrentes, lorsque l' équation génératrice a des racines égales* — In questa nota, appunto provocata dalle osservazioni del MALFATTI, LAGRANGE dichiara la cagione della inesattezza incorsa nelle antiche sue formole, facendo vedere essere ciò dipeso dall' aver Egli riguardato indipendenti quantità variabili che nol sono, e mostra come la soluzione debba rettificarsi.

Ma quella nota, che pure sembra poco conosciuta dai geometri, offre una particolarità memorabile intorno alla vita scientifica del Grande Analista, il quale in quel rincontro sembrò come punto che un altro avesse dovuto prevenirlo nel porre in rilievo la inesattezza delle antiche sue formole. E di fatti la nota suddetta conchiude con un' altra bellissima soluzione della stessa quistione; ma, cosa singolare per LAGRANGE, mentre Egli non fa che annunciare la nuova soluzione, senza darne alcuna pruova, come avea fatto nelle prime ricerche, questa volta invita formalmente i geometri a dimostrarla, il che non era certamente nelle sue abitudini. Ma crediamo questo tratto troppo importante per non doverci dispensare dal riportare qui testualmente le sue proprie parole... « Ces « formules sont un peu differentes de celles que j'avois données sans dé- « monstration dans le mémoire cité pour le cas de l'égalité des racines.

« Je m' étois apercu de leur inexactitude après l' impression du mé- « moire, mais entrainé par d' autres objets, j'avois toujours différé a re- « venir sur celui-ci que je regardois comme moins important; et j'ai été « prèvenu à cet ègard par un membre de la Societé Italienne, JEAN FRAN- « COIS MALFATTI, qui a donné sur ce sujet un savant mémoire dans le troi- « sieme tome du recueil de cette Societé. Comme l' analyse de cet' au- « teur est fort longue et conduit à des resultats un peu compliqués, j'ai « cru devoir chercher a resoudre cette question d' une maniere plus di- « recte et plus conforme à la simplicité de la méthode générale exposée « dans mon mémoire de 1775; c' est ce qui a occasioné les recherches « précédentes; mais quoique les formules auxquelles je suis parvenu « ne paroissent rien laisser a desirer pour la simplicité et la généralité; « néammoins, comme ces formules sont différentes pour les différentes

*

« cas de l'égalité de deux racines, de trois, de quatre, etc., on pour-
« roit désirer encor une formule qui renfermât tous les cas; et voici celle
« que j'ai trouvée, et que je présente aux géomètres, *en les invitant à*
« *la démontrer directement* ».

Nel corso di queste ricerche avremo occasione da far conoscere e dimostrare il teorema di LAGRANGE; ma ci sia lecito di aggiungere che, mancando una storia di queste teorie, nè offrendo all' uopo alcuna notizia i libri in cui si trattano siffatti argomenti, ignorammo per buona pezza se qualche geometra avesse corrisposto all'invito di LAGRANGE; nè ciò può sorprendere nello stato attuale della scienza. Però non ha guari, leggendo un cenno biografico di JACOBI, scritto da DIRICHLET, ed inserito nel volume VII degli Annali di Matematica del TORTOLINI (*), abbiamo appreso che il gran geometra di Könisberga esordiva la sua luminosa carriera scientifica appunto con la dimostrazione di quel teorema in una memoria pubblicata nel 1825, vale a dire 34 anni dopo la proposta di LAGRANGE, e che ha per titolo: *Disquisitiones analyticae de fractionibus simplicibus*. Ma tutte le ricerche furono vane per aver sott'occhio questa memoria di JACOBI, forse la sola non pubblicata nel Giornale di CRELLE, e della quale non si ha notizia nelle nostre Biblioteche.

(*) Tradotto dal tedesco in italiano dal chiarissimo professor GIOVANNI NOVI.

§ I

Le ricerche di cui ci occuperemo esigono che siano dichiarate alcune proprietà di un sistema di funzioni dedotte con una certa legge da una funzione intera di una variabile: funzione che indicheremo con $F(z)$, e supporremo:

$$F(z)=p_0 z^n+p_1 z^{n-1}+\ldots+p_{n-1}z+p_n\,.$$

Se da questa funzione si sopprima l'ultimo termine, poscia i due ultimi, indi i tre ultimi, e così di seguito, finchè rimanga il solo primo termine, ed i resti si dividano ordinatamente per le potenze $z, z^2, z^3, \ldots, z^n$, i quozienti formeranno un sistema di funzioni di gradi decrescenti $n-1$, $n-2, \ldots, 1, 0$, l'ultima delle quali si riduce a p_0, coefficiente del primo termine di $F(z)$. Noi dinoteremo queste funzioni con la stessa caratteristica F adottata per la funzione da cui derivano, variandola però con indici, che ne esprimano i gradi, di modo che sarà:

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
F_0(z)&=p_0\\
F_1(z)&=p_0 z+p_1\\
F_2(z)&=p_0 z^2+p_1 z+p_2\\
&\cdot\\
F_{n-1}(z)&=p_0 z^{n-1}+p_1 z^{n-2}+p_2 z^{n-3}+\ldots+p_{n-1}
\end{aligned}
$$

Una prima proprietà di queste funzioni consiste in ciò che, se la funzione primitiva $F(z)$ si divida per una potenza qualunque del binomio $x-a$, essendo a una quantità arbitraria, il quoziente intero di questa divisione si può immediatamente esprimere per mezzo de' valori che prendono per $x=a$ le derivate delle funzioni (1) di un ordine inferiore di un' unità al grado della potenza del divisore. Per dimostrarlo supporremo che Q_1, Q_2, Q_3, etc: siano i quozienti interi provvenienti rispettivamente dalla divisione di $F(z)$ per le potenze $z-a$, $(z-a)^2$, $(z-a)^3$, etc:; e siccome il resto della prima di queste divisioni è espresso da $F(a)$, avremo identicamente:

$$\frac{F(z)}{z-a}=Q_1+\frac{F(a)}{z-a}\,.$$

Ora questa equazione identica può con sole derivazioni rispetto ad a dar subito le espressioni degli altri quozienti Q_2, Q_3, etc: In fatti, riflettendo

che il quoziente Q_1 è funzione di a, se di quella equazione si prenda la derivata di un ordine qualunque i, e quindi si dividano i due membri pel prodotto $1.2.3\ldots i$, indicando questo prodotto col simbolo $\Pi(i)$ (notazione la quale importa $\Pi(o)=1$), si avrà quest' altra equazione identica:

$$(2) \qquad \frac{F(z)}{(z-a)^{i+1}}=\frac{1}{\Pi(i)}\left[\frac{1}{\Pi(i)}D_a^i Q_1+D_a^i\frac{F(a)}{z-a}\right].$$

È manifesto intanto che l'ultimo termine del fattore binomio del secondo membro, a derivazioni eseguite, diviene un fratto il quale ha per denominatore lo stesso divisore del primo membro, e per numeratore una funzione di z di grado inferiore a quello del denominatore. In conseguenza questo numeratore esprimerà il resto della divisione indicata nel primo membro; e da ciò risulta che il quoziente intero di siffatta divisione dee coincidere col primo termine del secondo membro; e siccome questo quoziente è rappresentato da Q_{i+1} si avrà:

$$(3) \qquad Q_{i+1}=\frac{1}{\Pi(i)}D_a^i Q_1 .$$

Da un'altra parte bisogna osservare che il primo quoziente Q_1 è una funzione intera di z di grado $n-1$, ed è perciò della forma:

$$Q_1=q_0 z^{n-1}+q_1 z^{n-2}+q_2 z^{n-3}+\ldots+q_{n-1} ;$$

ma essendo per la natura della divisione:

$$\begin{aligned}
q_0 &= p_0\\
q_1 &= p_0 a + p_1\\
q_2 &= p_0 a^2 + p_1 a + p_2\\
&\cdot\\
q_{n-1} &= p_0 a^{n-1}+p_1 a^{n-2}+p_2 a^{n-3}+\ldots+p_{n-1} ,
\end{aligned}$$

a causa delle funzioni (1) sarà:

$$q_0=F(a) \quad , \quad q_1=F_1(a) \quad , \ldots , \quad q_{n-1}=F_{n-1}(a) ;$$

e quindi si ottiene:

$$Q_1=F_0(a)z^{n-1}+F_1(a)z^{n-2}+F_2(a)z^{n-3}+\ldots+F_{n-1}(a) .$$

Prendendo ora la derivata i^{ma} di Q_1 rispetto ad a, e tenendo presente che

il valore di $F^s_r(a)$ è nullo se $s > r$, in virtù della (3) si avrà la formola seguente:

$$Q_{i+1} = \frac{1}{\Pi(i)} \left[F^i_i(a) z^{n-i-1} + F^i_{i+1}(a) z^{n-i-2} + \ldots + F^i_{n-2}(a) z + F^i_{n-1}(a) \right],$$

la quale, ponendovi $i = 0, 1, 2$, etc: dà i valori di tutti i quozienti Q_1, Q_2, Q_3, etc.

Quando $F(z)$ è divisibile per $(z-a)^{i+1}$ si ha la formola:

$$\frac{F(z)}{(z-a)^{i+1}} = \frac{1}{\Pi(i)} \left[F^i_i(a) z^{n-i-1} + F^i_{i+1}(a) z^{n-i-2} + \ldots + F^i_{n-2}(a) z + F^i_{n-1}(a) \right],$$

vera pe' valori di i compresi nella serie $0, 1, 2, \ldots, i$. Perciò, se $z-a$ è fattore semplice di $F(z)$, sarà:

$$\frac{F(z)}{z-a} = F_0(a) z^{n-1} + F_1(a) z^{n-2} + \ldots + F_{n-2}(a) z + F_{n-1}(a);$$

se quel fattore è doppio:

$$\frac{F(z)}{(z-a)^2} = F'_1(a) z^{n-2} + F'_2(a) z^{n-3} + \ldots + F'_{n-2}(a) z + F'_{n-1}(a);$$

se triplo si avrà:

$$\frac{F(z)}{(z-a)^3} = \frac{1}{1.2} \left[F''_2(a) z^{n-3} + F''_3(a) z^{n-4} + \ldots + F''_{n-1}(a) z + F''_{n-1}(a) \right];$$

e così di seguito.

Un'altra proprietà delle funzioni (1) è un fatto semplicissimo dipendente dalla natura della derivazione. Adoprando, come è costume, il simbolo $(i)_r$ per dinotare il coefficiente binomiale:

$$\frac{i(i-1)(i-2)\ldots(i-r+1)}{1.2.3\ldots r},$$

notazione la quale importa $(i)_0 = 1$, $(i)_i = 1$, osserveremo che la serie $(i)_i$, $(i+1)_i$, $(i+2)_i$, etc: coincide con quella dei numeri figurati dell'ordine i, computando di 1° ordine i numeri naturali $1, 2, 3, \ldots$. Ciò premesso scriviamo in ordine inverso una qualunque delle funzioni (1), per esempio $F_r(z)$, che è di grado r, ed avremo:

$$F_r(z) = p_r + p_{r-1} z + p_{r-2} z^2 + \ldots + p_0 z^r.$$

Moltiplicando uno ad uno i termini di questa funzione pe' primi $r+1$

termini della serie de' numeri figurati di un ordine qualunque i, vale a dire per:

$$(i)_i \ , \ (i+1)_i \ , \ (i+2)_i \ , \ldots , \ (i+r)_i \ ,$$

si ha quest'altra funzione di grado r:

$$(i)_i p_r + (i+1)_i p_{r-1} z + (i+2)_i p_{r-2} z^2 + \ldots + (i+r)_i p_0 z^r \ ;$$

e la proprietà che intendiamo di porre in rilievo consiste in ciò che questa funzione così formata equivale alla derivata i^{ma} di quella tra le funzioni (1) che è del grado $i+r$, cioè della funzione $F_{i+r}(z)$, divisa pel prodotto $1.2.3\ldots i$; in guisa che si avrà:

$$(i)_i p_r + (i+1)_i p_{r-1} z + (i+2)_i p_{r-2} z^2 + \ldots + (i+r)_i p_0 z^r = \frac{F^i_{i+r}(z)}{1.2.3\ldots i} \ .$$

§ II

Data l'equazione differenziale dell'ordine n a coefficienti costanti:

$$(4) \qquad p_0 \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1} \frac{dy}{dx} + p_n y = 0 \ ,$$

si sa che il suo integrale completo dipende dalle radici dell'equazione:

$$F(z) = p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \ldots + p_{n-1} z + p_n = 0 \ .$$

Sia a una di queste radici che potrà essere o semplice o multipla. Se la radice è semplice la medesima darà all'integrale un termine della forma:

$$A e^{a(x-\omega)} \ ,$$

dove A figura una costante arbitraria ed ω un valore qualunque particolare di x. Ma se la radice a è multipla, e pongasi di grado α, allora rappresentata con X_α una funzione indeterminata di x di grado $\alpha-1$, e perciò affetta da α costanti arbitrarie, quella radice introdurrà nell' integrale un termine della forma:

$$X_\alpha e^{a(x-\omega)} \ ,$$

ω indicando come prima qualunque particolare valore di x. Noi daremo alla funzione X_α la forma seguente:

$$X_\alpha = A_{\alpha-1} + A_{\alpha-2}(x-\omega) + A_{\alpha-3}\frac{(x-\omega)^2}{1.2} + \ldots + A_0 \frac{(x-\omega)^{\alpha-1}}{1.2.3\ldots(\alpha-1)}$$

in cui $A_0, A_1, \ldots, A_{\alpha-1}$ dinotano le α costanti arbitrarie. Quando $\alpha=1$

questa formola si riduce ad $X_a = 1$, e si ritorna al caso delle radici semplici.

Se si considera un' altra radice, b per esempio, che sia multipla di grado β, scriveremo uniformemente X_b per rappresentare la funzione di x di grado $\beta - 1$, formata nella stessa maniera di X_a; ed allora bisogna ritenere che le β costanti siano figurate con la lettera majuscola latina dello stesso nome della radice, variata con indici, e quindi con $B_0, B_1, \ldots, B_{\beta-1}$. Questo sistema di notazione dovrà per tanto supporsi esteso ad ogni altra radice.

Ciò premesso, chiamando $a, b, c, \ldots, l$ le radici dell'equazione $F(z) = 0$, per considerare il caso più generale, le supporremo multiple rispettivamente di gradi $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$, essendo:

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda = n \; ;$$

ed allora l' integrale generale dell' equazione (4) sarà:

$$y = X_a e^{a(x-\omega)} + X_b e^{b(x-\omega)} + \ldots + X_l e^{l(x-\omega)},$$

contenendosi nel secondo membro le n costanti arbitrarie:

$$\left\{ \begin{array}{llll} A_0 , & A_1 , & \ldots , & A_{\alpha-1} \\ B_0 , & B_1 , & \ldots & B_{\beta-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ L_0 , & L_1 , & \ldots , & L_{\lambda-1} \end{array} \right.$$

Ma sotto forma più concisa potremo anche scrivere:

$$(5) \qquad y = \sum X_a e^{a(x-\omega)} \; ;$$

la sommatoria dovendo intendersi estesa a tutte le radici della equazione $F(z) = 0$.

La quistione intanto che ci proponiamo di risolvere si è quella di determinare le suddette n costanti a condizione che, pel dato valore ω di x, la funzione y e le sue successive $n-1$ derivate prendano valori anche dati: valori che per ordine dinoteremo con $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$, in guisa che sarà:

$$(y)_{x=\omega} = y_0 \quad , \quad D_x(y)_{x=\omega} = y_1 \quad , \quad D_x^2(y)_{x=\omega} = y_2 \quad , \quad \text{etc: etc:}$$

ed in generale:

$$(6) \qquad D_x^r(y)_{x=\omega} = y_r \, .$$

Ora la soluzione di siffatta quistione si può comprendere nel seguente teorema, del quale daremo due diverse dimostrazioni.

« Dalla funzione $F(z)$ si deducano le n funzioni $F_{n-1}(z), F_{n-2}(z), \ldots, F_0(z)$, « le quali si moltiplichino ordinatamente pe' dati n valori $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$, « e pongasi:

$$(7) \qquad \psi(z) = y_0 F_{n-1}(z) + y_1 F_{n-2}(z) + \ldots + y_{n-2} F_1(z) + y_{n-1} F_0(z) .$$

« Posto ciò, se si decomponga in frazioni parziali la funzione fratta « $\psi(z) : F(z)$, i numeratori di queste frazioni esprimeranno appunto i va- « lori delle costanti, i quali soddisfano alle condizioni prescritte; do- « vendo perciò quelle costanti verificare la relazione:

$$\begin{aligned} \frac{\psi(z)}{F(z)} = & \frac{A_0}{(z-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(z-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{z-a} \\ & + \frac{B_0}{(z-b)^\beta} + \frac{B_1}{(z-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{z-b} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{L_0}{(z-l)^\lambda} + \frac{L_1}{(z-l)^{\lambda-1}} + \ldots + \frac{L_{\lambda-1}}{z-l} . \end{aligned}$$

Prima dimostrazione

Per dimostrare il teorema enunciato dobbiamo innanzi tutto cercare le equazioni da cui dipendono i valori delle costanti; ed a tale effetto prenderemo la derivata dell'equazione (5) di un ordine qualunque r, per poterne dedurre il valore che prende la derivata r^{ma} di y nella ipotesi di $x = \omega$; e così tenendo presente la relazione (6) si avrà dapprima:

$$(8) \qquad y_r = D_x^r \left(\sum X_a e^{a(x-\omega)} \right)_{x=\omega} .$$

Da un'altra parte considerando le derivate i^{me} delle due funzioni X_a ed $e^{a(x-\omega)}$ si vedrà subito che i loro valori per $x = \omega$ equivalgono rispettivamente ad $A_{\alpha-i-1}$ ed a^i; e quindi, posto mente al notissimo teorema di

Leibnitz relativo alle derivate di ordine superiore del prodotto di due funzioni, si troverà facilmente:

$$D^r_x(X_a e^{a(x-\omega)})_{x=\omega}=$$
$$=A_{\alpha-1}a^r+A_{\alpha-2}a^{r-1}+\frac{r(r-1)}{1.2}A_{\alpha-3}a^{r-2}+\ldots+\frac{r(r-1)\ldots(r-\alpha+2)}{1.2\ldots(\alpha-1)}A_0 a^{r-(\alpha-1)}.$$

Essendo ora necessario di rappresentare di una maniera concisa questa funzione di a ed r, la quale contiene linearmente le α costanti A, converremo di indicarla con $V_{a,r}$; di modo che usando il solito simbolo pe' coefficienti binomiali, sarà:

$$(9)\quad V_{a,r}=A_{\alpha-1}a^r+(r)_1A_{\alpha-2}a^{r-1}+(r)_2A_{\alpha-3}a^{r-2}+\ldots+(r)_{\alpha-1}A_0a^{r-\alpha+1}.$$

Adunque, posto uniformemente:

$$V_{b,r}=B_{\beta-1}b^r+(r)_1B_{\beta-2}b^{r-1}+(r)_2B_{\beta-3}b^{r-2}+\ldots+(r)_{\beta-1}B_0b^{r-\beta+1}$$
$$V_{c,r}=C_{\gamma-1}a^r+(r)_1C_{\gamma-2}c^{r-1}+(r)_2C_{\gamma-3}c^{r-2}+\ldots+(r)_{\gamma-1}C_0c^{r-\gamma+1}$$
etc: etc: etc: etc:

risulterà:

$$D^r_x(X_a e^{a(x-\omega)})_{x=\omega}=V_{a,r},\ D^r_x(X_b e^{b(x-\omega)})_{x=\omega}=V_{b,r},\ D^r_x(X_c e^{c(x-\omega)})_{x=\omega}=V_{c,r},\ \text{etc: etc:}$$

quindi per l'equazione (8) si ha:

$$(10)\qquad y_r=V_{a,r}+V_{b,r}+\ldots+V_{l,r};$$

e questa formola ponendovi successivamente $r=0, 1, 2, \ldots, n-1$, dà le seguenti n equazioni:

$$(11)\qquad \begin{aligned} y_0 &= V_{a,0}+V_{b,0}+\ldots+V_{l,0}\\ y_1 &= V_{a,1}+V_{b,1}+\ldots+V_{l,1}\\ y_2 &= V_{a,2}+V_{b,2}+\ldots+V_{l,2}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_{n-1} &= V_{a,n-1}+V_{b,n-1}+\ldots+V_{l,n-1} \end{aligned}$$

equazioni le quali determinano linearmente le n costanti, e la quistione è ridotta alla loro risoluzione.

A tale effetto cominceremo dal moltiplicare ordinatamente queste equazioni per le funzioni $F_{n-1}(z)$, $F_{n-2}(z)$, ..., $F_0(z)$, e faremo la somma

de' prodotti. È chiaro che nel primo membro della somma si riproduce la funzione $\psi(z)$, definita nella formola (7). Inoltre se si ponga:

$$(12)\qquad M_a = V_{a,0} F_{n-1}(z) + V_{a,1} F_{n-2}(z) + \ldots + V_{a,i} F_{n-i-1}(z) + \ldots + V_{a,n-1} F_0(z),$$

e si ritenga che M_b, M_c, ... rappresentino espressioni somiglianti in $b, c, \ldots$, il secondo membro sarà la somma di $M_a, M_b, \ldots$; e si avrà in conseguenza:

$$(13)\qquad \psi(z) = M_a + M_b + \ldots + M_l ;$$

ma importa di porre in evidenza la composizione de' termini di questa formola.

Fermandoci adunque a considerare l'espressione di M_a data nella (12), dovremo cercare i valori delle quantità $V_{a,0}$, $V_{a,1}$, etc., i quali si ottengono dalla (9) dando ad r i valori successivi $0, 1, 2, \ldots, n-1$; e si ha in tal guisa:

$$V_{a,0} = A_{\alpha-1}$$

$$V_{a,1} = A_{\alpha-1} a + (1)_1 A_{\alpha-2}$$

$$V_{a,2} = A_{\alpha-1} a^2 + (2)_1 A_{\alpha-2} a + (2)_2 A_{\alpha-3}$$

. . . .

$$V_{a,i} = A_{\alpha-1} a^i + (i)_1 + A_{\alpha-2} a^{i-1} + (i)_2 + A_{\alpha-3} a^{i-2} + \ldots + (i)_i A_{\alpha-i-1}$$

. . . .

$$V_{a,n-1} = A_{\alpha-1} a^{n-1} + (n-1)_1 A_{\alpha-2} a^{n-2} + \ldots + (n-1)_i A_{\alpha-i-1} a^{n-i-1} + \ldots + (n-1)_{n-1} A_0 a^{n-\alpha}.$$

Se queste equazioni si moltiplichino ordinatamente per le funzioni $F_{n-1}(z), F_{n-2}(z), \ldots, F_0(z)$, e si faccia la somma de' prodotti, nel primo membro della somma si riprodurrà l'espressione di M_a come si ha nella (12); e però, se il secondo membro si supponga ordinato rispetto alle costanti $A_{\alpha-1}, A_{\alpha-2}, \ldots, A_0$, la detta somma avrà la forma:

$$(14)\qquad M_a = \mu_0 A_{\alpha-1} + \mu_1 A_{\alpha-2} + \ldots + \mu_i A_{\alpha-i-1} + \ldots + \mu_{\alpha-1} A_0 .$$

Per determinare l'espressione di μ_i osserveremo che nella serie delle pre-

(*) Si può osservare che nella serie di queste espressioni la prima ha un termine solo, la seconda due, la terza tre, e così di seguito fino a quella che darebbe il valore di $V_{a,\alpha-1}$, la quale conterrebbe perciò tutte le α costanti $A_{\alpha-1}, A_{\alpha-2}, \ldots, A_1, A_0$, e l'esponente di a ne' loro ultimi termini è sempre *zero*. Egli è poi chiaro che ciascuna delle altre espressioni costerà sempre di α termini, e conterrà tutte le costanti; e da ciò poi segue che nella serie delle seguenti espressioni di $V_{a,\alpha}, V_{a,\alpha+1}, \ldots, V_{a,n-1}$ gli ultimi termini debbono sempre contenere la costante A_0, ed essere rispettivamente affetti dalle potenze $a, a^2, a^3, \ldots, a^{n-\alpha}$.

cedenti eguaglianze la prima a contenere la costante $A_{\alpha-i-1}$ è quella che dà il valore di $V_{\alpha,i}$; e perciò dovendo questa eguaglianza moltiplicarsi per $F_{n-i-1}(z)$, messo per compendio:

$$n-i-1=\varepsilon\,,$$

risulterà:

$$\mu_i=(i)_i F_\varepsilon(z)+(i+1)_i F_{\varepsilon-1}(z)a+(i+2)_i F_{\varepsilon-2}(z)a^2+\ldots+(i+s)_i F_{\varepsilon-s}(z)a^s+\ldots+(n-1)_i F_0(z)a^\varepsilon\,.$$

Siccome questa espressione di μ_i è una funzione intera di z di grado ε, si può supporre:

$$(15)\qquad \mu_i=k_0 z^\varepsilon+k_1 z^{\varepsilon-1}+\ldots+k_s z^{\varepsilon-s}+\ldots+k_\varepsilon\,;$$

e per determinare in generale il coefficiente k_s si osserverà che nella detta espressione la potenza $z^{\varepsilon-s}$ deve trovarsi solamente ne' termini che sono moltiplicati per le funzioni $F_\varepsilon(z)$, $F_{\varepsilon-1}(z),\ldots, F_{\varepsilon-s}(z)$, perchè le rimanenti $F_{\varepsilon-s-1}(z),\ldots, F_0(z)$ sono tutte di grado inferiore ad $\varepsilon-s$. Ma i coefficienti di quella potenza nelle dette funzioni sono rispettivamente $p_s, p_{s-1}, p_{s-2},\ldots, p_0$; dunque si ottiene:

$$k_s=(i)_i p_s+(i+1)_i p_{s-1}a+(i+2)_i p_{s-2}a^2+\ldots+(i+s)_i p_0 a^s\,.$$

È manifesto intanto che si riproduce questa stessa espressione se i termini della funzione:

$$F_s(a)=p_s+p_{s-1}a+p_{s-2}a^2+\ldots+p_0 a^s$$

si moltiplichino uno ad uno pe' termini della serie numerica:

$$(i)_i\ ,\ (i+1)_i\ ,\ (i+2)_i\ ,\ \ldots\ ,\ (i+s)_i\,,$$

che sono i primi termini della serie de' numeri figurati dell'ordine i; dunque, per la seconda delle proprietà dichiarate nel § I, il valore trovato di k_s sarà equivalente alla derivata i^{ma} di $i+s$, $F_{i+s}(a)$, divisa pel prodotto $1.2.3\ldots i$; e si ha in conseguenza:

$$k_s=\frac{F^{i}_{i+s}(a)}{1.2.3\ldots i}\,.$$

Questa formola, facendovi successivamente $s=0, 1, 2, \ldots, \varepsilon$, porge i

valori di tutti i coefficienti della espressione di μ_i data dalla (15); e però essendo $\varepsilon = n - i - 1$, si avrà:

$$\mu_i = \frac{F_i(a)}{1.2\ldots i} z^{n-i-1} + \frac{F_{i+1}(a)}{1.2\ldots i} z^{n-i-2} + \ldots + \frac{F_{n-1}(a)}{1.2\ldots i}.$$

Ora, ricordando la prima delle proprietà dichiarate nel § I, si riconoscerà che il secondo membro dell'ultima equazione esprime il quoziente intero della divisione di $F(z)$ per $(z-a)^{i+1}$; ma siccome questa divisione non dà resto finchè $i < \alpha$, perchè per ipotesi $(z-a)^\alpha$ è fattore di $F(z)$, ne segue che per tutti i valori di i compresi nella serie $0, 1, 2, .., \alpha - 1$ sussisterà la formola:

$$\mu_i = \frac{F(z)}{(z-a)^{i+1}},$$

la quale a sua volta definisce i valori de' coefficienti della espressione di M_a data nella equazione (14); di modo che si ha in fine:

$$M_a = F(z)\left[\frac{A_{\alpha-1}}{z-a} + \frac{A_{\alpha-2}}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{A_0}{(z-a)^\alpha}\right].$$

Espressioni somiglianti si otterrebbero evidentemente per M_b, M_c, etc: ; e quindi in virtù della formola (13) si avrà:

$$\psi(z) = F(z)\left[\frac{A_{\alpha-1}}{z-a} + \frac{A_{\alpha-2}}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{A_0}{(z-a)^\alpha}\right]$$

$$+ F(z)\left[\frac{B_{\beta-1}}{z-b} + \frac{B_{\beta-2}}{(z-b)^2} + \ldots + \frac{B_0}{(z-b)^\beta}\right]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ F(z)\left[\frac{L_{\lambda-1}}{z-l} + \frac{L_{\lambda-2}}{(z-l)^2} + \ldots + \frac{L_0}{(z-l)^\lambda}\right].$$

Dividendo i due membri di questa equazione per $F(z)$ si riproduce la relazione annunciata nel teorema, il quale resta in tal guisa completamente dimostrato.

Segue per tanto da questo teorema che la determinazione effettiva delle costanti $A_0, A_1, \ldots, A_{\alpha-1}$ va interamente rimessa alla teorica della

decomposizione delle funzioni fratte; e con ciò la quistione è perfettamente risoluta. Così, messo per compendio:

$$F(z) = (z-a)^\alpha f(z)$$

si potrà far capo dalla formola conosciuta:

$$A_i = \frac{1}{\Pi(i)} D^i_z \frac{\psi(a)}{f(a)},$$

la quale dà i valori di tutte le α costanti, non esclusa A_0, perchè $\Pi(0)=1$. Ma pel calcolo numerico sarà forse più opportuno di far dipendere questi valori gli uni dagli altri, ricorrendo alle formole ben conosciute:

$$\psi(a) = f(a)\, A_0$$

$$\psi'(a) = f'(a)\, A_0 + f(a)\, A_1$$

$$\frac{\psi''(a)}{1.2} = \frac{f''(a)}{1.2} A_0 + f'(a)\, A_1 + f(a)\, A_2$$

$$\frac{\psi'''(a)}{1.2.3} = \frac{f'''(a)}{1.2.3} A_0 + \frac{f''(a)}{1.2} A_1 + f'(a)\, A_2 + f(a)\, A_3$$

etc: etc: etc: etc:

La ricerca della quale ci siamo occupati perde ogni difficoltà quando l'equazione $F(z)=0$ non ha radici uguali. In questa ipotesi l'integrale completo della equazione (4) si riduce ad:

$$y = Ae^{a(x-\omega)} + Be^{b(x-\omega)} + \ldots + Le^{l(x-\omega)}:$$

quindi invece della formola (10), dalla quale dipendono in generale le equazioni che determinano le costanti, nel caso attuale si ha l'altra assai più semplice:

$$y_r = Aa^r + Bb^r + \ldots + Ll^r;$$

e questa, dando ad r i valori successivi 0, 1, 2, ..., $n-1$, porge subito il conosciuto sistema di equazioni:

$$y_0 = A + B + \ldots + L$$

$$y_1 = Aa + Bb + \ldots + Ll$$

$$y_2 = Aa^2 + Bb^2 + \ldots + Ll^2$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{n-1} = Aa^{n-1} + Bb^{n-1} + \ldots + Ll^{n-1}:$$

Per risolvere queste equazioni si possono tenere diverse vie; ma lo stesso

metodo che abbiamo seguito pel caso generale diviene ora semplicissimo. In fatti, moltiplicandole ordinatamente per le funzioni $F_{n-1}(z)$, $F_{n-2}(z), \ldots, F_0(z)$, e facendo la somma de' prodotti, nel primo membro della somma si riproduce la funzione $\psi(z)$; e quindi, posto:

$$N_a = F_{n-1}(z) + F_{n-2}(z)a + F_{n-3}(z)a^2 + \ldots + F_0(z)a^{n-1}$$

$$N_b = F_{n-1}(z) + F_{n-2}(z)b + F_{n-3}(z)b^2 + \ldots + F_0(z)b^{n-1}$$

etc: etc: etc: etc:

si avrà:

$$\psi(z) = AN_a + BN_b + \ldots + LN_l$$

Ora l'espressione superiore di N_a equivale al quoziente di $F(a)$ divisa per $a - z$; ma questo quoziente è identico a quello di $F(z)$ divisa per $z - a$; dunque risulta:

$$N_a = \frac{F(z)}{z-a} \quad , \quad N_b = \frac{F(z)}{z-b} \quad , \quad \ldots \quad , \quad N_l = \frac{F(z)}{z-l} \; ;$$

e si ha perciò:

$$\psi(z) = F(z)\left(\frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b} + \ldots + \frac{L}{z-l}\right) \; ;$$

ovvero:

$$\frac{\psi(z)}{F(z)} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b} + \ldots + \frac{L}{x-l} \; .$$

In questa formola è riprodotto il teorema precedente, limitato al caso delle radici disuguali; ma quindi vedesi che la determinazione delle costanti procede sempre nella stessa maniera, qualunque sia la natura delle radici dell'equazione $F(z) = 0$. Quando tutte le radici sono disuguali per le teoriche della decomposizione delle frazioni i valori delle costanti A, B, etc: sono definiti dalle formole:

$$(16) \qquad A = \frac{\psi(a)}{F'(a)} \quad , \quad B = \frac{\psi(b)}{F'(b)} \quad , \quad \ldots \quad , \quad L = \frac{\psi(l)}{F'(l)} \; ;$$

ed è appunto in queste formole che consiste la soluzione data da LAGRANGE del precedente sistema particolare di equazioni lineari.

Seconda dimostrazione

Supporremo qui ritenuta la parte iniziale della precedente dimostrazione diretta a stabilire la formola:

$$(17)\qquad y_r = V_{a,r} + V_{b,r} + \ldots + V_{l,r}$$

da cui dipendono le equazioni (11) che determinano le n costanti, ed osserveremo che le espressioni di $V_{a,r}$, $V_{b,r}$, etc. si possono mettere sotto la forma:

$$(18)\ V_{a,r} = \sum_{1}^{\alpha}{}_{i} \frac{r(r-1)\ldots(r-i+2)}{1.2\ldots(i-1)} a^{r-i+1} A_{\alpha-i}, V_{b,r} = \sum_{i}^{\beta}{}_{i} \frac{r(r-1)\ldots(r-i+2)}{1.2\ldots(i-1)} b^{r-i+1} B_{\beta-i}, \text{ etc:}$$

Posto ciò, derivando r volte di seguito la (4), si ha l'altra equazione:

$$p_0 \frac{d^{n-r}y}{dx^{n-r}} + p_1 \frac{d^{n-r-1}y}{dx^{n-r-1}} + \ldots + p_{n-1} \frac{d^{r-1}y}{dx^{r-1}} + p_n \frac{d^r y}{dx^r} = 0$$

la quale, ponendovi $x = \infty$, per le notazioni convenute diverrà:

$$(19)\qquad p_0 y_{n-r} + p_1 y_{n-r-1} + p_n y_r = 0 .$$

Questa equazione, che ha luogo per tutti i valori interi e positivi di r, compreso il zero, fa sì che le quantità $y_0, y_1, y_2, \ldots$ formino una serie ricorrente dell'ordine n. In questa serie, a causa delle n costanti arbitrarie contenute nella espressione di y_r data dalla (17), i primi n termini $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ possono essere dati arbitrariamente; ma ora andremo a dimostrare che, se i loro valori sono qnelli che si suppongono dati per la determinazione delle costanti, allora sviluppando la funzione fratta $\frac{\psi(z)}{F(z)}$ in potenze decrescenti di z, la detta serie sarà riprodotta ne' coefficienti di questo sviluppo, di modo che dovrà essere in tale ipotesi:

$$(20)\qquad \frac{\psi(z)}{F(z)} = \frac{y_0}{z} + \frac{y_1}{z^2} + \frac{y_2}{z^3} + \ldots + \frac{y_r}{z^{r+1}} + \ldots$$

Per dimostrarlo osserveremo innanzi tutto che la funzione $\psi(z)$ definita nella (7) si può scrivere come segue:

$$\psi(z) = p_0 y_0 z^{n-1} + (p_0 y_1 + p_1 y_0) z^{n-2} + (p_0 y_2 + p_1 y_1 + p_2 y_0) z^{n-3} + \ldots + \\ + (p_0 y_{n-1} + p_1 y_{n-2} + \ldots + p_{n-1} y_0)$$

ma posto per compendio:

$$21)\quad \begin{cases} q_0 = p_0 y_0 \\ q_1 = p_0 y_1 + p_1 y_0 \\ q_2 = p_0 y_2 + p_1 q_1 + p_2 y_0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;, \\ q_{n-1} = p_0 y_{n-1} + p_1 y_{n-2} + \cdots p_{n-1} y_0 \end{cases}$$

si avrà più concisamente:

$$\psi(z) = q_0 z^{n-1} + q_1 z^{n-2} + q_2 z^{n-3} + \ldots + q_{n-1}\,.$$

Ora siccome il grado di $\psi(z)$ è inferiore di uno al grado di $F(z)$, lo sviluppo di $\frac{\psi(z)}{F(z)}$ in potenze decrescenti di z comincerà col termine affetto da $\frac{1}{z}$, e quindi si può supporre:

$$\frac{\psi(z)}{F(z)} = \frac{q_0 z^{n-1} + q_1 z^{n-2} + \ldots + q_{n-1}}{p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \ldots + p_n} = \frac{u_0}{z} + \frac{u_1}{z^2} + \ldots + \frac{u_r}{z^{r+1}} + \ldots$$

Per determinare i coefficienti osserveremo che si ha identicamente:

$$q_0 z^{n-1} + q_1 z^{n-2} + \ldots + q_{n-1} = (p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \ldots + p_n)(u_0 z^{-1} + u_1 z^{-2} + u_2 z^{-3} + \ldots)\,;$$

laonde sviluppando il prodotto, ed uguagliando i coefficienti delle potenze simili di x ne' due membri, si ottengono le relazioni:

$$22)\quad \begin{cases} q_0 = p_0 u_0 \\ q_1 = p_0 u_1 + p_1 u_0 \\ q_2 = p_0 u_3 + p_1 u_1 + p_3 u_0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ q_{n-1} = p_0 u_{n-1} + p_1 u_{n-2} + \ldots + p_{n-1} u_0 \\ 0 = p_0 u_n + p_1 u_{n-1} + \ldots + p_{n-1} u_1 \\ 0 = p_0 u_{n+1} + p_1 u_n + \ldots + p_{n-1} u_2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{cases}$$

e generalmente per qualunque valore intero e positivo di r maggiore di $n-1$ si avrà:

$$0 = p_0 u_{n+r} + p_1 u_{n+r-1} + \ldots + p_n u_r\,.$$

Si rileva da questa equazione che le quantità $u_0, u_1, u_2, \ldots$ formano, al

pari delle altre $y_0, y_1, y_2, \ldots$, una serie ricorrente dell'ordine n, la quale dipende dalla stessa equazione generatrice $F(z)$; ma affinchè le due serie possano essere coincidenti è necessario che i primi n termini dell'una siano uguali a' primi n termini dell'altra. Ora ciò segue appunto dal confronto delle equazioni (21) con le (22), le quali danno evidentemente $y_0=u_0, y_1=u_1, \ldots, y_{n-1}=u_{n-1}$; e con ciò resta dimostrato lo sviluppo della frazione $\frac{\psi(z)}{F(z)}$, come si è supposto nella (20).

Bisogna intanto osservare che lo sviluppo della stessa frazione si può ancora ottenere decomponendola in frazioni parziali, e cercando i loro particolari sviluppi. Essendo $a, b, \ldots, l$ le radici dell'equazione $F(z)=0$, multiple rispettivamente di gradi $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, la decomposizione condurrà ad un risultamento cui può darsi la forma:

$$\frac{\psi(z)}{F(z)}=\sum_{1}^{\alpha}{}_i\frac{A'_{\alpha-i}}{(z-a)^i}+\sum_{1}^{\beta}{}_i\frac{B'_{\beta-i}}{(z-b)^i}+\ldots+\sum_{1}^{\lambda}{}_i\frac{L'_{\lambda-i}}{(z-l)^i};$$

e quindi y_r, coefficiente della potenza $z^{-(r+1)}$ nello sviluppo discendente del primo membro, sarà uguale alla somma de' coefficienti della stessa potenza ne' sviluppi somiglianti di tutte le frazioni che compongono il secondo membro; laonde, se si dinota con $V'_{a,r}$ il coefficiente della detta potenza nello sviluppo della prima sommatoria, con $V'_{b,r}$ quello della medesima potenza nello sviluppo della seconda, e così di seguito, si avrà:

$$y_r=V'_{a,r}+V'_{b,r}+\ldots+V'_{l,r}. \tag{23}$$

Siccome la frazione sottoposta al primo $\sum$ equivale ad $A'_{\alpha-i}(z-a)^{-i}$, si troverà facilmente per la formola del binomio che la potenza $z^{-(r+1)}$ ha per coefficiente:

$$\frac{r(r-1)\ldots(r-i+2)}{1.2\ldots(i-1)}a^{r-i+1}A'_{\alpha-i};$$

e quindi risulta:

$$V'_{a,r}=\sum_{1}^{\alpha}{}_i\frac{r(r-1)\ldots(r-i+2)}{1.2\ldots(i-1)}a^{r-i+1}A'_{\alpha-i}.$$

Questa espressione $V'_{a,r}$ è ciò che diviene quella di $V_{a,r}$ data nella prima delle (18) mutandovi solo $A_{\alpha-i}$ in $A'_{\alpha-i}$; ed è evidente che analoghi risultamenti si otterrebbero per gli altri termini del secondo membro della equazione (23). Ora dovendo questa equazione sussistere per qualsivoglia

valore intero e positivo di r, avrà luogo in particolare per $r=0, 1, 2, \ldots, n-1$; e da ciò segue che i numeratori A', B', etc. delle n frazioni parziali, nelle quali è decomposta la frazione $\frac{\psi(z)}{F(z)}$, verificano le n le equazioni lineari:

$$\begin{aligned} y_0 &= V'_{a,0} + V'_{b,0} + \ldots + V'_{l,0} \\ y_1 &= V'_{a,1} + V'_{b,1} + \ldots + V'_{l,1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-1} &= V'_{a,n-1} + V'_{b,n-1} + \ldots + V'_{l,n-1} \,. \end{aligned}$$

Ma queste equazioni sono ciò che divengono le (11) mutandovi rispettivamente le A, B, etc. in A', B', etc.; dunque i detti numeratori verificheranno ancora le equazioni (11); o in altri termini si avrà generalmente $A'_i = A'_i$; $B'_i = B_i$, etc.; e con ciò resta riconfermato il teorema che trattavasi di dimostrare.

§ III

Nella teoria delle equazioni lineari a differenze finite si ritrova una quistione interamente analoga alla precedente; ed è questa propriamente quella che ha formato il soggetto delle ricerche di LAGRANGE nelle due memorie del 1775 e 1792 citate tra le notizie premesse al presente lavoro. Sia l'equazione lineare dell'ordine n:

$$p_0 y_{r+n} + p_1 y_{r+n-1} + \ldots + p_{n-1} y_{r+1} + p_n y_r = 0 \,, \tag{24}$$

dove r figura la variabile, e $p_0, p_1, \ldots, p_n$ quantità costanti. È noto che il suo integrale completo dipende ancora dalle radici dell'equazione:

$$F(z) = p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \ldots + p_{n-1} z + p_n = 0 \,.$$

Ora, dinotata con a una di queste radici, la medesima, se semplice, darà all'integrale un termine della forma Aa^r, indicando A una costante arbitraria; ma se multipla di grado α, essa introdurrà nell'integrale un'espressione della forma:

$$A_{\alpha-1} a^r + \frac{r}{1} A_{\alpha-2} a^{r-1} + \frac{r(r-1)}{1.2} A_{\alpha-3} a^{r-2} + \ldots + \frac{r(r-1)\ldots(r-\alpha+2)}{1.2\ldots(\alpha-1)} A_0 a^{r-\alpha+1} \,,$$

nella quale $A_0, A_1, \ldots, A_{\alpha-1}$ figurano α costanti arbitrarie. Questa es-

pressione non è diversa da quella precedentemente indicata da $V_{a,r}$; e però ammettendo che le radici $a, b, \ldots, l$ dell'equazione $F(z)=0$ siano multiple di gradi $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, l'integrale generale della (24) sarà espresso da:

$$y_r = V_{a,r} + V_{b,r} + \ldots + V_{l,r}, \tag{25}$$

coincidendo così esattamente con la formola (10).

Ciò premesso, siccome questa espressione di y_r contiene n costanti arbitrarie, possiamo proporci di determinarle in guisa che la medesima debba assumere n valori assegnati $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$, quando la variabile r si fa rispettivamente uguale a $0, 1, \ldots, n-1$. Ora queste condizioni ci riconducono di nuovo al sistema delle equazioni (11), e per conseguenza alla medesima soluzione; di modo che anche nella quistione attuale i valori delle n costanti:

$$A_0, A_1, \ldots, A_{\alpha-1}, B_0, B_1, \ldots, B_{\beta-1}, \ldots, L_0, L_1, \ldots, L_{\lambda-1}$$

si avranno ne' numeratori delle frazioni parziali in cui si decompone la funzione fratta $\frac{\psi(z)}{F(z)}$, nella quale il numeratore $\psi(z)$ è sempre la funzione istessa definita dalla formola (7).

Quando le radici di $F(z)=0$ sono tutte disuguali la formola (25) si riduce ad:

$$y_r = Aa^r + Bb^r + \ldots + Ll^r;$$

in tal caso i valori delle costanti sono quelli già dati nelle (16), e l'integrale diverrà:

$$y_r = \frac{\psi(a)}{F'(a)} a^r + \frac{\psi(b)}{F'(b)} b^r + \ldots + \frac{\psi(l)}{F'(l)} l^r.$$

Riflettendo che le quantità $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$, da cui dipendono i valori come sopra determinati delle n costanti arbitrarie, sono esse stesse interamente arbitrarie, si comprende che in ogni caso è lecito di supporre che nella formola (25) le dette costanti abbiano precisamente i valori che risultano da siffatta determinazione, senza che perciò quella formola perda la qualità di integrale generale della equazione (24), a patto però che si ritengano come costanti arbitrarie le stesse quantità $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$. Ma, ciò supposto, è chiaro che il valore di y_r diviene il termine generale di una serie ricorrente che ha per generatrice l'equazione $F(z)=0$, ed i cui primi n termini sono appunto $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$; ed andremo a vedere che in tal caso l'espressione di y_r, o meglio le espressioni delle sue

parti $V_{a,r}$, $V_{b,r}$, ..., $V_{l,r}$ sono suscettibili di una rimarchevole trasformazione, limitandoci a considerare la prima di esse $V_{a,r}$, imperciocchè le conchiusioni si estendono uniformemente a tutte le altre.

Si è già veduto che l'espressione di $V_{a,r}$ si può mettere nella forma:

(26) $$V_{a,r}=\sum_{1}^{\alpha}{}_i \frac{r(r-1)\ldots(r-i+2)}{1.2\ldots(i-1)} a^{r-i+1} A_{\alpha-i}.$$

Posto ciò, siccome $F(z)$ è divisibile per $(z-a)^\alpha$, chiamando $f(z)$ il quoziente, sarà:

(27) $$F(z)=(z-a)^\alpha f(z);$$

quindi la frazione, che va decomposta in frazioni parziali, diviene:

$$\frac{\psi(z)}{F(z)}=\frac{\psi(z)}{(z-a)^\alpha f(z)};$$

ed i valori di $A_0, A_1, \ldots, A_{\alpha-1}$ si avranno dalla formola:

$$A_m=\frac{1}{1.2\ldots m} D^m \frac{\psi(a)}{f(a)},$$

dando ad m i valori $0, 1, 2, \ldots, \alpha-1$. Così si ottiene:

$$A_{\alpha-i}=\frac{1}{1.2\ldots(\alpha-i)} D^{\alpha-i} \frac{\psi(a)}{f(a)};$$

ed in conseguenza la formola (26) si traduce facilmente nell'altra:

$$V_{a,r}=\frac{1}{1.2\ldots(\alpha-1)}\sum_{1}^{\alpha}{}_i \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-i+1)}{1.2\ldots(i-1)}\left[r(r-1)\ldots(r-i+2)a^{r-i+1}\right] D^{\alpha-i}\frac{\psi(a)}{f(a)}.$$

De' tre fattori che sono in vista sotto il segno $\sum$ il primo è il coefficiente binomiale di rango i relativo all'esponente $\alpha-1$; il secondo è la derivata di ordine $i-1$ della potenza a^r, ed il terzo è la derivata di ordine $\alpha-i$ del fratto $\frac{\psi(a)}{f(a)}$; quindi, richiamandosi al teorema già ricordato sulle derivate di ordine superiore del prodotto di due funzioni, si riconosce che la sommatoria equivale alla derivata di ordine $\alpha-1$ del prodotto $\frac{\psi(a)}{f(a)}a^r$; e con ciò il valore di $V_{a,r}$ verrà trasformato in:

(28) $$V_{a,r}=\frac{1}{1.2\ldots(\alpha-1)} D^{\alpha-1}\frac{\psi(a)}{f(a)}a^r.$$

In luogo della funzione f si può nel secondo membro introdurre la

funzione originaria F. In fatti, se s'indica con t una novella variabile, e nella (27) si ponga $z=a+t$, si ha:

$$F(a+t)=t^{\alpha}f(a+t)\ . \tag{29}$$

Ed essendo a una radice multipla di grado α dell'equazione $F(z)=\alpha$, per $z=a$ si annulla la funzione $F(z)$ e le sue prime $\alpha-1$ derivate; di modo che, se i due membri dell'eguaglianza precedente si sviluppano col teorema di Taylor, il secondo sarà al pari del primo divisibile per t^{α}; quindi soppreso questo fattore, ed eguagliando in seguito i termini che nei due membri sono indipendenti da z, verrà:

$$\frac{F^{\alpha}(a)}{1.2\ldots\alpha}=f(a)\ ,$$

ed in virtù di questo valore di $f(a)$ la formola (28) diverrà:

$$V_{a,r}=\frac{1}{1.2\ldots(\alpha-1)}D^{\alpha-1}\frac{\psi(a)}{\frac{1}{1.2\ldots\alpha}F^{\alpha}(a)}a^{r}.$$

Ora questa formola riassume quelle date da Lagrange per esprimere la parte del termine generale di una serie ricorrente dovuta ad una radice multipla dell'equazione generatrice. Egli infatti sviluppa successivamente i casi in cui la radice a è o doppia, o tripla, o quadrupla, etc., vale a dire i casi in cui si ha α eguale o a 2, o a 3, o a 4, etc., e trova:

per $\alpha=2$, $\quad V_{a,r}=D\dfrac{\psi(a)}{\frac{1}{1.2}F''(a)}a^{r}$

per $\alpha=3$, $\quad V_{a,r}=\dfrac{1}{1.2}D^{2}\dfrac{\psi(a)}{\frac{1}{1.2.3}F'''(a)}a^{r}$

per $\alpha=4$, $\quad V_{a,r}=\dfrac{1}{1.2.3}D^{3}\dfrac{\psi(a)}{\frac{1}{1.2.3.4}F^{IV}(a)}a^{r}$

etc: etc: etc:

e queste formole coincidono appunto con quelle dell'illustre Analista.

Intanto, dopo aver dato queste formole, Lagrange soggiunge le parole riportate nelle notizie da noi premesse alle presenti ricerche; e quindi

annuncia ne' seguenti termini il teorema che propone a dimostrare, e del quale ivi è menzione.

« Je fais pour abréger $\psi(a).a^r=\theta(a)$, $\theta(a)$ dénotant, comme l'on voit, « une fonction donnée de a. Je considere ensuite la formule:

$$(30)\qquad \frac{\theta(a)+t\theta'(a)+\frac{t^2}{1.2}\theta''(a)+\frac{t^3}{1.2.3}\theta'''(a)+\ldots}{F'(a)+\frac{t}{1.2}F''(a)+\frac{t^2}{1.2.3}F'''(a)+\frac{t^3}{1.2.3.4}F^{IV}(a)+\ldots}$$

« et après l'avoir développée en serie suivant les puissances ascendantes « de t, je ne retiens que les termes ou t ne se trouve point, en rejetant « ceux qui se trouveront divisés ou multipliés par des puissances de t; « je dis que ces termes seront ceux de l'expression du terme général y_r, « qui proviendront de la racine a, soit que cette racine soit una racine « simple, ou double, ou triple, etc. ».

Ora questo teorema discende ancora immediatamente dalla formola (28); ma prima di dimostrarlo sarà opportuno di modificare alquanto l'enunciato di Lagrange. È evidente in primo luogo che il numeratore della formola (30) non è che lo sviluppo in potenze ascendenti di t di $\theta(a+t)$, e però anche del prodotto $\psi(a+t)(a+t)^r$. Inoltre è chiaro che, se il denominatore della formola istessa si moltiplica per t, allora il termine indipendente da t nello sviluppo di quella formola, in virtù della introduzione del fattore t nel suo denominatore, diverrà il coefficiente della potenza $\frac{1}{t}$; ma frattanto per la introduzione di un tal fattore il denominatore diverrà lo sviluppo di $F(a+t)-F(a)$ o semplicemente di $F(a+t)$, perchè a essendo per ipotesi radice dell'equazione $F(z)=0$, si ha $F(a)=0$. Segue da queste osservazioni che il termine indipendente da t nello sviluppo della formola (30) in potenze ascendenti di t coincide col coefficiente di $\frac{1}{t}$ nello sviluppo somigliante di

$$(31)\qquad \frac{\psi(a+t)}{F(a+t)}(a+t)^r .$$

Dunque, siccome secondo le nostre notazioni la parte del termine generale y_r, dovuta alla radice a, è figurata da $V_{a,r}$, il teorema di Lagrange equivale in altri termini a dire, che: *il valore di* $V_{a,r}$ *dev'essere uguale al coefficiente di* $\frac{1}{t}$ *nello sviluppo in potenze ascendenti di* t *della formola* (31); ed eccone la dimostrazione.

Posto per compendio:

$$\varphi(a)=\frac{\psi(a)}{f(a)}a^r \tag{32}$$

si avrà per la (28)

$$V_{\alpha,r}=\frac{\varphi^{\alpha-1}(a)}{1.2...(\alpha-1)} . \tag{33}$$

Ora se nella (32) si ponga $a+t$ in luogo di a, verrà:

$$\varphi(a+t)=\frac{\psi(a+t)}{f(a+t)}(a+t)^r ;$$

e se i due membri si dividano per t^α, si avrà in virtù della (29):

$$\frac{1}{t^\alpha}\varphi(a+t)=\frac{\psi(a+t)}{F(a+t)}(a+t)^r . \tag{34}$$

Sviluppando i due membri secondo le potenze ascendenti di t saranno eguali ne' due sviluppi i coefficienti delle stesse potenze di x; ed è poi chiaro che il secondo conterrà necessariamente, al pari del primo, delle potenze negative di t. Intanto posto mente alla (33) si vede che il valore di $V_{\alpha,r}$ coincide col coefficiente della potenza $t^{\alpha-1}$ nello sviluppo di $\varphi(a+t)$; esso dunque nello sviluppo di $\frac{\varphi(a+t)}{t}$, ossia del primo membro della (34), coinciderà col coefficiente della potenza $\frac{1}{t}$; e per conseguenza dovrà pure coincidere col coefficiente della stessa potenza nello sviluppo del secondo membro, vale a dire della formola (31); e con ciò resta dimostrato il teorema di LAGRANGE.

Questo teorema importante è il fondamento delle ricerche da noi esposte nella Memoria *sullo sviluppo delle funzioni fratte razionali.*

ATTI DELLA R. ACCADEMIA
DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

DELLA POLISIMMETRIA E DEL POLIMORFISMO DEI CRISTALLI

MEMORIA SECONDA

DEL SOCIO ORDINARIO A. SCACCHI

letta nell' adunanza del dì 12 luglio 1864.

Dai fatti esposti nella precedente memoria sulla *polisimmetria dei cristalli* son venuto alla conclusione che col nome di dimorfismo si comprendevano due diversi fenomeni l' uno più semplice, l' altro più complicato. Nel primo di essi i cristalli di tipo diverso della medesima sostanza hanno essenzialmente i medesimi caratteri geometrici, e si differenziano soltanto perchè i cristalli di un tipo paragonati con quelli dell'altro tipo, non avendo in tutte le loro parti geometricamente simili i medesimi caratteri fisici e quindi le medesime qualità apparenti, ne nasce tra gli uni e gli altri una differenza di simmetria. Nel fenomeno più complicato poi le forme dei cristalli di tipo diverso sono essenzialmente differenti per i loro caratteri geometrici. Quindi ho proposto di dare al fenomeno più semplice il nome di polisimmetria e conservare pel fenomeno più complicato quello di dimorfismo o polimmorfismo che meglio gli conviene. La distinzione tra i cristalli polisimetrici ed i polimorfi si rende manifesta per l'analogia facile a riconoscere tra le facce dei cristalli di tipo diverso nelle specie polisimmetriche, la quale analogia non si rinviene tra i cristalli di diverso tipo delle sostanze polimorfe. Ed il fatto che riferma la medesima distinzione sta nella maniera come si dispongono i cristalli di un tipo quando nascono per metamorfismo dei cristalli di tipo diverso. Dappoichè per i cristalli polisimmetrici la loro posizione è determinata dalla legge che le facce dei novelli cristalli riescono sempre parallele con le facce analoghe del cristallo primitivo. Ed al contrario per i cristalli polimorfi, non essendovi analogia di facce tra quelli

di tipo diverso, non ci ha alcuna posizione determinata tra i novelli cristallini ed il cristallo primitivo.

Nella medesima memoria ho pure esposto molti esperimenti eseguiti con l' intendimento di conoscere la cagione sia della polisimmetria che del polimorfismo, e da questi esperimenti si deduce, almeno per i casi esaminati, non essere il diverso grado di calore cagione di tali fenomeni, come volgarmente si è fin ora creduto; esservi invece cagioni diverse che danno origine alla polisimmetria, ed alcune di queste medesime cagioni contribuire ancora a produrre il polimorfismo.

A tal punto giunte le mie ricerche sulla polisimmetrica e sul polimorfismo, ho reputato l'argomento lontano dal suo completo svolgimento; ed anche adesso che vengo a dar notizia all' Accademia di novelli fatti che servono ad illustrarlo, son di avviso che molto rimanga a conoscere per formarci una completa idea di tal sorta di fenomeni.

Intanto fra le cose che mi nasceva giusto desiderio di esaminare con accurati esperimenti era il fatto dei levo tartrati ragguagliati ai destro tartrati d' identica composizione chimica, nei quali per la identità del carattere geometrico nelle forme cristalline congiunta alla differenza della emiedria e dell' azione sulla luce polarizzata, sembrava che la polisimmetria e l'emiedria andassero mirabilmente insieme e quasi si confondessero in un solo fenomeno. Quindi appena ho potuto avere a mia disposizione sufficiente quantità di acido paratartico mi sono affrettato di eseguire quella serie di esperienze che esporrò nella prima parte di questa memoria. Nell' altra parte poi esporrò quale sia al presente la mia opinione sul polimorfismo.

PARTE I.

Polisimmetria tra i paratartrati, levo tartrati e destro tartrati.

Conoscenze generali dei tartrati e dei paratartrati. Stimo opportuno ricordare esservi due acidi tartarici del tutto identici per la loro chimica composizione $C^4H^2O^5,HO$, per le loro qualità chimiche, e per i caratteri geometri delle loro forme cristalline; e diversi in questo che i loro cristalli essendo emiedrici, uno di essi ha le facce emiedriche in un senso, l'altro le ha nel senso opposto; e di più la soluzione di uno di essi fa deviare il piano di polarizzazione della luce a destra, la

soluzione dell'altro fa deviare il medesimo piano a sinistra, e son detti per questo acido destro tartarico e levo tartarico. Questi acidi combinati alle basi danno i corrispontenti destro tartrati e levo tartrati, ancor essi cristallizzabili con forme emiedriche le une in senso inverso delle altre, e che hanno le medesime somiglianze nelle qualità chimiche e le medesime differenze nei caratteri fisici degli acidi rispettivi. I due acidi tartarici, prendendone egual parte per ciascuno, si uniscono in chimica combinazione, formando un composto detto acido paratartarico, assai meno solubile degli acidi tartarici, i cui cristalli contengono due proporzionali di acqua, $C^4H^2O^5,2HO$; val quanto dire un equivalente di acqua più di quella contenuta nei cristalli di acido tartarico; e però sono di forma affatto diversa, e la loro soluzione non fa deviare il piano di polarizzazione della luce. Lo stesso acido paratartarico si combina alle basi formando i paratartrati, i quali talora hanno in tutto la stessa composizione chimica dei tartrati delle medesime basi, altre volte è diversa la proporzione dell'acqua. In tutti i casi poi i cristalli dei paratartrati hanno forme diverse da quelle dei cristalli dei corrispondenti tartrati, non sono mai emiedrici, e le loro soluzioni non fanno diviare il piano di polarizzazione della luce.

Dietro queste conoscenze che già si avevano sulla natura dei tartrati e paratartrati, due principali cose è stato mio proponimento d'investigare; se cioè i destro tartrati ed i levo tartrati costituissero un particolare esempio di polisimmetria, e mi veniva in mente di sperimentare che cosa avviene immergendo i cristalli dei levo tartrati nelle soluzioni cristallizzanti dei destro tartrati d'identica composizione chimica, e per converso immergendo i cristalli dei destro tartrati nelle soluzioni dei levo tartrati. Quando agli acidi levo e destro tartarico è facile intendere come essi non siano altro che particolari specie dei destro e levo tartrati le quali hanno per base un equivalente di acqua invece degli ossidi metallici, siccome apparisce paragonando la formola dei cristalli degli acidi tartarici, $C^4H^3O^6=C^4H^2O^5,HO$ con la formola dei cristalli dei tartrati potassici $C^4H^2KaO^6=C^4H^2O^5,KaO$.

L'altra cosa che mi sembrava dover essere investigata riguarda le relazioni tra le forme cristalline dei paratartrati e le forme cristalline dei levo e destro tartrati che hanno in tutto la medesima composizione chimica. Nelle ricerche di tal genere alcune specie di composti per essere pochissimo solubili nell'acqua, altri per essere molto solubili mi han presentato tali difficoltà che fin ora non ho potuto superare. Per altre

specie al contrario, ed in particolare per i tartrati acidi e per i paratartrati acidi di potassa e di ammonio, $C^8H^5KaO^{12}$ e $C^8H^5(AzH^4)O^{12}$ ho trovato i più importanti fatti che verrò esponendo in questa memoria, sì perchè i medesimi erano i meno prevedibili, e sì perchè mi sembrano contribuire non poco ad approfondire l' argomento del quale ci occupiamo.

Levo e destro tartrato ammonico-sodico. Dalle soluzioni di paratartrato ammonico-sodico è già risaputo che si depositano quantità eguali di cristalli di levo tartrato e di destro tartrato ammonico-sodico facili a distinguere per le loro diverse emiedrie. Questo almeno è ciò che succede d'ordinario; ma in particolari condizioni si generano pure cristalli di paratartrato ammonico-sodico, siccome farò conoscere in altro rincontro. Le soluzioni di paratartrato potassico-sodico danno similmente cristalli di levo e destro tartrato potassico-sodico nei quali la differenza per il carattere dell'emiedria non suol essere distinta. E però i sali ammonici assai meglio che i sali potassici mi si offrivano idonei pel primo saggio che ho fatto della immersione dei cristalli dei tartrati nelle soluzioni di altri cristalli della medesima composizione chimica e con emiedria inversa. Questi esperimenti han dato esito ben diverso da quello che mi attendeva. Nella soluzione di scelti cristalli di destro tartrato ammonico-sodico portata al punto da dover cristallizzare con lieve abbassamento di temperatura, avendo immerso alquanti grossi cristalli di levo tartrato ammonico-sodico, alcuni dei quali pesavano circa cinque grammi, in poco d'ora li ho veduto disciogliersi completamente. La medesima soluzione che avrebbe dovuto cristallizzare fra poche ore se non vi avessi immerso i cristalli di levo tartrato, è stata per circa due giorni esposta all'evaporazione spontanea senza dare cristalli; ed i primi cristalli che scorso questo tempo si sono depositati, siccome era da attendersi, sono stati della specie destrorsa. Mi era facile prevedere tra i risultamenti possibili di questa esperienza che i cristalli immersi sarebbero rimasti senza ingrandirsi e che si sarebbero depositati a parte i cristalli di destro tartrato disciolti nel liquore. Intanto per l'inopinato discioglimento dei cristalli immersi son giunto ad intendere che la mescolanza delle due specie dei tartrati, ovvero il paratartrato ammonico-sodico, sia più solubile di ciascuno dei corrispondenti tartrati separatamente. E di più che per questa sua maggiore solubilità avviene che nelle soluzioni di paratartrato ammonico-sodico l' acido paratartrico si scinde depositandosi i cristalli di levo e destro tartrato delle medesime basi che sono meno solubili.

Negli altri casi essendo i paratartrati meno solubili dei corrispondenti tartrati, non avviene la separazione degli acidi che costituiscono l' acido paratartarico.

Caratteri dei cristalli del levo e destro tartrato acido di potassa. I cristalli di destro tartrato acido potassico, cremore di tartaro delle farmacie, fig. 1, 2, come quelli di levo tartrato acido della medesima base, fig. 3, nei casi ordinarii presentano ben distinta l' emiedria del rombottaedro *n*, che nella maniera rappresentata dalle figure costituisce il carattere cristallografico che serve a distinguere facilmente la prima dalla seconda specie. Non dimeno le condizioni nelle quali essi si producono o s' ingrandiscono apportano talvolta alcune differenze più o meno profonde nelle loro forme che importa di esaminare per meglio giudicare della importanza delle loro differenti emiedrie.

Dal cremore di tartaro del commercio ho avuto assai spesso cristalli rozzamente terminati, e con certe irregolarità variabili non molto diverse da quelle osservate nei cristalli ottenuti dalle soluzioni nelle quali al puro destro tartrato acido di potassa, aveva mescolato un pò di levo tartrato. Per la qual cosa mi sembra probabile ch' esso non sia del tutto scevro di acido levo tartarico ovvero di paratartrato acido di potassa. Essendo molto difficile distinguere per il carattere dell' emiedria e separare i cristalli di destro tartrato potassico-sodico da quello di levo tartrato delle medesime basi; per procurarmi sufficiente quantità del levo e destro tartrato acido di potassa puri, ho cominciato dal preparare il levo ed il destro tartrato di ammonio e soda che assai più facilmente pel carattere dell' emiedria si possono riconoscere e separare. E così separati si possono avere abbastanza puri prendendo i primi cristalli di una seconda cristallizzazione. Quindi ho fatto bollire le soluzioni dei sali ammoniacali col carbonato di potassa sino a che aggiungendo novello carbonato potassico e prolungando l'ebollizione, non si è più avvertito odore ammoniacale. Convertito così il levo ed il destro tartrato di ammonio e soda in levo e destro tartrato di potassa e soda, aggiungendo alle loro soluzioni dell' acido nitrico, ho ottenuto depositati i tartrati acidi di potassa dei quali ho fatto uso nella maggior parte degli esperimenti di cui farò parola.

I cristalli che si depositano dalle soluzioni dei tartrati acidi di potassa puri sono bislunghi nella direzione dell' asse *b* ch'è l' asse della zona delle facce *A*, *C*, fig. 1 a 3, e sono impiantati per una delle estremità del medesimo asse. Nei cristalli lentamente ingranditi l' accresci-

mento è maggiore nel verso dell'asse c; talchè facendo ingrandire per evaporazione spontanea del liquore i cristalli bislunghi avuti per raffreddamento delle soluzioni calde e sature, in essi va man mano decrescendo la differenza tra la lunghezza nel senso dell'asse b e la larghezza nel senso dell'asse c. In qualunque modo prodotti o ingranditi, le facce A sono striate parallelamente agli spigoli AC, le facce e sono d'ordinario irregolarmente convesse, e le altre facce sogliono essere nitide e piane. Nei cristalli del destro tartrato essendo più estese le facce del tetraedro n', n'' di quelle dell'altro tetraedro n, n''', e nei cristalli di levo tartrato essendo al contrario più grande il tetraedro n, n''', questa differenza è più manifesta quando il loro ingrandimento procede con lentezza. La solubilità nell'acqua dei bitartrati potassici è di molto aumentata quando vi si aggiunge qualche acido minerale; e nei cristalli ottenuti dalle soluzioni con acido cloroidrico ho osservato per il destro tartrato che le facce del tetraedro maggiore n', n'', fig. 1, e le facce l, l' sono striate parallelamente agli spigoli $n'l', n''l$ mentre le facce n, n''' del tetraedro minore sono levigate. Nei cristalli poi del levo tartrato in conseguenza dell'inverso carattere di emiedria sono striate le facce del tetraedro n, n''', fig. 3, che in questo caso sono le maggiori.

Una differenza molto notevole si osserva per i cristalli prodotti nelle soluzioni che contengono del citrato sodico; dappoichè essi invece di trovarsi impiantati per uno degli spigoli ove si congiungono le facce g anteriori con le facce g posteriori, ovvero per una delle estremità corrispondenti all'asse b, si congiungono gli uni agli altri, o si attaccano alle pareti del cristallizzatoio per una delle facce C, C', e la loro maggiore lunghezza è nel verso dell'asse c. In essi poi interviene d'ordinario che le facce g sono rampollanti, attaccandosi nel mezzo di esse altri minori cristalli sempre per un punto prossimo alle faccette C e divergenti dal cristallo maggiore in un piano paralello all'asse c. La presenza del citrato sodico nelle soluzioni dei tartrati acidi potassici, produce in oltre ne' cristalli che se ne ottengono una faccetta irregolarmente ondata nella parte superiore della faccia u', fig. 2, che nei cristalli di destro tartrato si estende più verso n' ed in quelli di levo tartrato è più estesa verso n. Quanto poi al rombottaedro n, negli esperimenti fatti col levo tartrato acido potassico ho avuto il tetraedro n, n''' assai più grande dell'altro n', n'', conforme alla sua specie di emiedria; ma per i cristalli di destro tartrato, avendo più volte su di essi ripetuti i saggi, le facce del rombottaedro non le ho trovate che di raro ed assai piccole. Non

dimeno son sempre le faccette n', n'' le sole che si presentano o almeno le più appariscenti.

Dalle cose fin quì dichiarate si deduce che nei cristalli dei tartrati acidi di potassa, siano destrorsi ovvero sinistrorsi, il carattere della loro emiedria è costante, al contrario di ciò che vedremo per i tartrati acidi ammonici. Probabilmente per la presenza del levo tartrato nelle soluzioni di destro tartrato, o pel caso inverso, questo carattere talvolta può mancare, siccome è avvenuto per i cristalli rappresentati nella figura 41 dei quali dovrò tener parola in prosieguo; nondimeno per la natura istessa di questo caso, esso non potrebbe addursi come eccezione alla regola generale.

Metamorfismo scambievole tra i cristalli di levo e destro tartrato acido potassico. Quando nelle soluzioni di levo tartrato acido potassico s'immergono i cristalli di destro tartrato, e per converso quando i cristalli di levo tartrato s'immergono nelle soluzioni di destro tartrato, ben presto essi veggonsi superficialmente appannati. Questo appannamento deriva da due contrarie cagioni, dallo sciogliersi cioè nel liquore la parte superficiale dei cristalli immersi e dal depositarsi sulle facce dei medesimi cristalli, già cominciati a corrodersi, novelli cristalli microscopici con emiedria inversa. Osservando con lente d'ingrandimento i cristalli immersi qualche ora dopo la loro immersione si scorgerà ben distinto non solo la corrosione delle loro facce e la produzione dei novelli cristallini, ma l'ordine preciso col quale questi vanno su quelli ad allogarsi. Più tardi progredendo il metamorfismo, tutti i suoi particolari saranno più facili ad osservarsi.

Nella figura 36 ho rappresentato molto ingrandito un cristallo di levo tartrato acido potassico ventiquattr'ore dopo che era stato immerso nella soluzione di destro tartrato acido della medesima base. Il cristallo essendo rappresentato con le facce A perpendicolari al piano di proiezione, come il cristallo della figura 2, sono situate di rimpetto all' osservatore le sue facce n', u', k', l', C'. Intanto le facce n', u', n, come pure le facce g perpendicolari al piano di proiezione, sono profondamente corrose, e su di esse di tratto in tratto s'impiantano i novelli cristallini nei quali si scorgono le faccette l, n', n ed altre specie di faccette omesse per non offendere la chiarezza della figura, tutte esattamente parallele alle facce della medesima specie del cristallo primitivo. Delle facce A, K', l', C' del cristallo primitivo non apparisce più nulla, essendo esse del tutto ricoverte dai nuovi cristalli bislunghi le cui estremità spor-

gono prominenti ove raggiungono le facce g, n', u', n dello stesso cristallo primitivo. Continuando per lungo tempo l'ingrandimento dei novelli cristallini essi finiscono col congiungersi insieme, fondendosi in un sol piano le loro faccette prima separate e tra loro parallele. Quindi è che tal fiata giungono a comporre così riuniti un cristallo intero nel quale non resta più alcun segno della sua origine per metamorfismo. Meglio si riesce a questo risultamento sciogliendo di tempo in tempo nei liquori cristallizzanti novelle quantità dei rispettivi tartrati acidi potassici.

Fa duopo nondimeno considerare che la composizione della soluzione nella quale avviene il metamorfismo va continuamente variando; dappoichè, togliendo ad esempio la soluzione di destro tertrato acido potassico, in essa, come progredisce l'esterna trasformazione dei cristalli di levo tartrato, che in parte almeno si sciolgono, avviene che da una parte di continuo si scema nel liquore la quantità del destro tartrato disciolto, e da un'altra va crescendo la quantità del levo tartrato somministrato dai cristalli immersi. Ne deriva dunque che trascorsi molti giorni la soluzione contiene gran copia di paratartrato acido potassico tanto più abbondante per quanto maggiore è stata la parte dei cristalli immersi ch'è rimasta disciolta. Avvengono allora particolari condizioni nella forma dei cristalli metamorfizzati che saranno esaminate quando si tratterà dello scambievole metamorfismo tra i tartrati acidi di potassa ed il paratartrato acido potassico.

L'andamento col quale procede la descritta trasformazione varia alquanto secondo il grado di concentrazione e la temperatura delle soluzioni. Per avere una regola nel fare le soluzioni con diverso grado di concentrazione, ho cominciato dal disciogliere a caldo i tartrati acidi potassici, e dopo un giorno da che le soluzioni per raffreddamento avevano depositato l'eccesso del sale disciolto col calore, le ho decantate e riscaldate sino alla diminuzione di circa un decimo o di un ventesimo secondo che voleva soluzioni più o meno concentrate. Finalmente abbassatasi la temperatura del liquore a circa 45°, ho in esso immerso i cristalli preparati pel metamorfismo dei quali era stato determinato il peso. Dopo ventiquattr' ore ho trovato il metamorfismo progredito come nel cristallo rappresentato nella figura 36, e ripesati i cristalli ben prosciugati, il loro peso si è rinvenuto scemato, e maggiormente scemato nei cristalli immersi in soluzione meno concentrata. Rimessi i cristalli nelle soluzioni nuovamente concentrate come la prima volta, e trascorsi

due giorni ho trovato tutti i cristalli di peso maggiore del primitivo, e col maggiore aumento nei cristalli ingranditi nel liquore più concentrato. A temperature più basse si scioglie meno dei cristalli immersi; ed avendo fatto l'esperimento con soluzioni tenute da due giorni alla temperatura dell'ambiente, ho trovato dopo cinque ore che i cristalli in esse tuffati, mentre manifestavano ben distinto il principiato metamorfismo, il loro peso era quasi eguale o alquanto superiore al peso primitivo. Con altri saggi nei quali alle soluzioni dei tartrati acidi di potassa aveva aggiunto un po'di acido nitrico, ho pure ottenuto assai debole lo scioglimento dei cristalli esposti al metamorfismo.

Ho fatto questi esperimenti per conoscere nei diversi casi qual differenza vi sia tra la quantità dei cristalli immersi che si solve nel liquore e la quantità del sale disciolto nel liquore che si deposita sopra i medesimi cristalli immersi; essendo chiaro che l'aumento del peso primitivo dimostra la quantità dei cristallini depositati superare la quantità disciolta dei cristalli immersi, e la diminuzione in peso dimostrare il caso inverso.

Quando poi i cristallini depositati dal metamorfismo giungono a congiungersi completamente gli uni con gli altri, la soluzione non può esercitare più alcuna azione dissolvente sopra i cristalli primitivi. Egli è però che, secondo la maniera come ha proceduto il metamorfismo, nel centro del cristallo giunto a completa trasformazione vi è quasi sempre una parte più o meno grande del cristallo primitivo di specie diversa.

Levo e destro tartrato acido ammonico; emiedria variabile dei loro cristalli. I tartrati acidi di ammonio presentano forme cristalline variabilissime, anche pel carattere dell'emiedria che nei tartrati suol essere costante. Il bitartrato ammonico ordinario, che corrisponde al destro tartrato acido, con moltissimi saggi sperimentato, l'ho trovato in tante guise mutare la forma dei suoi cristalli, che sarebbe oltre modo fastidioso, e forse di nessuna utilità, il riferirne tutti i particolari. Son rimasto poi maggiormente scoraggiato nel cercare la cagione di tante differenze, dal perchè assai spesso da due o più esperimenti, ripetuti per quanto mi è stato possibile con le medesime condizioni, d'ordinario ho avuto forme cristalline le une dalle altre diverse; ed anche dissimiglianze non lievi ho trovato talvolta nei cristalli che si sono contemporaneamente prodotti nella medesima soluzione. Il levo tartrato acido ammonico sul quale ho pure eseguito non pochi saggi, mi ha presentato quasi le medesime variazioni del destro tartrato; talchè tra l'uno e

l'altro non parmi vi sia alcuna differenza per questo riguardo. Riferirò intanto per la parte che può servire all'argomento di questa memoria i fatti che, quantunque variabili, reputo importanti ad essere conosciuti.

Due principali condizioni trovo meritare la nostra attenzione nei cristalli di bitartrato ammonico. In prima essi spesso non presentano alcun segno di emiedria nella estensione delle facce n, n', fig. 1, 2; ed in secondo luogo quando avviene che sono distintamente emiedrici, talvolta nel medesimo destro tartrato si appalesa l'emiedria destrorsa, fig. 1, 2, come nel bitartrato ordinario di potassa, altre volte al contrario si manifesta l'emiedria sinistrorsa, fig. 3, come nel levo tartrato acido di potassa. La prima di queste condizioni non ha nulla di straordinario, essendo comune in quasi tutte le sostanze che cristallizzano con forme emiedriche il trovare non di raro i loro cristalli col carattere della emiedria poco distinto o per nulla riconoscibile. La seconda condizione di presentare la medesima sostanza le due emiedrie contrarie è al certo straordinaria, e tanto più maravigliosa che non sempre si può regolare la produzione dei cristalli in modo da avere con certezza l'una o l'altra specie di emiedria.

I cristalli depositati da soluzioni assai sature e calde, prima che queste raggiungessero la temperatura dell'ambiente, sogliono essere lunghissimi nel verso dell'asse b e con le facce n', fig. 1, maggiori delle n, val quanto dire con la emiedria destrorsa. Se la soluzione, essendo meno satura, la cristallizzazione avviene meno rapidamente, ed anche prima che il liquore raggiunga la temperatura dell'ambiente, il rombottaedro n, n' non suole offrire distinta emiedria. In tal caso essendo i cristalli impiantati per un punto prossimo ad uno degli estremi dell'asse b, delle quattro facce n che dovrebbero terminare l'estremità libera se ne rinviene una soltanto, fig. 20, ovvero due che s'incontrano con la medesima faccia g, come le faccette n, n' della figura 1; e sia l'unica faccetta o le due facce apparenti della piramide terminale son quelle che più esattamente si trovano di rincontro al punto di attacco del cristallo.

Quasi nelle medesime condizioni ho spesso avuto cristalli terminati in due punte, ed allora sono molto estese le facce n che s'incontrano con angolo rientrante nel mezzo della biforcatura, essendo al contrario piccolissime o del tutto mancanti quelle che sono all'esterno. Un esempio di tal maniera di configurazione, essa stessa molto variabile, vedesi disegnata nella figura 19. Nei cristalli poi anche generati in soluzioni discretamente sature, ma poggiati sul fondo del cristallizzatoio per una delle

A, fig. 21, ho trovato d'ordinario più estese le quattro facce n inferiori, quelle cioè che toccano il fondo del cristallizzatoio. Il cristallo che ha servito di modello alla figura 21 offriva la faccia A superiore poliedrica, formata da quattro faccette a, a', a'', a''' che s' incontrano con angoli ottusissimi; la qual cosa è piuttosto rara, essendo abbitualmente le facce A striate nel verso degli spigoli AC. Da questi esempii nei quali le faccette del rombottaedro n non ubbidiscono ad alcuna legge di emiedria, si scorge pure come la loro maggiore estensione dipende altresì dal punto di attacco del cristallo, o dal trovarsi esse di rincontro ad altre facce della medesima specie con le quali formano angoli diedri rientranti.

Nei cristalli solitarii che si depositano lentamente nelle soluzioni di puro bitartrato ammonico, o di bitartrato ammonico con eccesso di acido tartarico, ho avuto nitidissimi cristalli talora senza alcun segno di emiedria, altre volte distintamente emiedrici, ma in alcuni casi con emiedria destrorsa ed in altri casi con emiedria sinistrorsa. Spesso ho pure osservato in queste lente cristallizzazioni che insieme ai nitidi cristalli e trasparenti con emiedria sinistrorsa se ne sono generati alcuni più grossi alquanto appannati e senza alcun segno di emiedria. Concentrate alquanto senza nulla aggiungere le diverse soluzioni nelle quali si era prodotta ciascuna di queste maniere di cristalli, e tramutati in esse i cristalli da prima depositati , questi han continuato ad ingrandirsi per più giorni senza che fosse punto cambiata la loro forma. Ma se nelle soluzioni che avevano dato cristalli con emiedria sinistrorsa ho immerso altri cristalli destrorsi, questi ingrandendosi si sono mutati in cristalli sinistrorsi.

Talvolta oltre il rombottaedro n, n' ho pure rinvenuto il tetraedro m', m'', fig. 4, 5, stando sempre nel bitartrato ammonico ordinario soltanto le facce m', m'' dalla parte delle n', n''. Ho osservato le facce m' in alcuni grossi cristalli generati lentamente in una soluzione di cloruro ammonico con grande eccesso di acido tartarico, il quale era stato precedentemente adoperato a preparare il tetratartrato di stronziana, e per conseguenza conteneva un pò di stronziana. Nei medesimi cristalli era pure notevole che mentre le facce n', n'' non differivano per grandezza dalle n, n''', se ne distinguevano per essere curvate presso gli spigoli $n'k$, $n'l$, $n'C'$, quasi su questi spigoli vi fossero tre particolari specie di faccette.

Ho altresì osservato le faccette m', senza che vi fossero nè le n, nè le n' nei cristalli generati in soluzioni che contenevano gran copia di tartrato neutro di soda. In queste stesse soluzioni avendo immerso alquanti cristalli che avevano le faccette n maggiori delle n', ho trovato dopo due

giorni che le facce n erano scomparse, restando nel luogo da esse occupato una cavità dal fondo della quale sporgevano molti angoli triedri formati dalle facce g, l, A, talchè queste faccette più volte si ripetevano con angoli diedri ora prominenti ed ora rientranti. Erano pure scomparse o divenute piccolissime le facce n' per dar luogo alle nuove facce m'. Nella figura 23 vedesi disegnata metà di un cristallo in tal guisa mutato, e nella figura 24 ho rappresentato molto ingrandita la cavità prodottasi nel luogo occupato dalla faccia n.

Tutti i particolari finquì esposti servono a dimostrare quanto sia variabile il carattere della emiedria nei cristalli dei tartrati acidi ammonici; e siccome ho innanzi accennato, gli esperimenti dai quali ho avuto un particolare risultamento, spesso ripetuti con le medesime condizioni han sortito effetto diverso. Intanto vi è stato un caso che reputo più degli altri importante offertomi dai cristalli depositati nelle soluzioni con citrato sodico che sono sempre con emiedria sinistorsa se appartengono al destro tartrato e con emiedria destrorsa se appartengono al levo tartrato.

Ho due volte ripetuto i saggi col destro tartrato e due col levo tartrato, mescolando nei primi esperimenti grm. 60 di destro o levo tartrato ammonico-sodico con grm. 24 di acido citrico; e nel ripetere gli esperimenti, alla medesima quantità dei tartrati doppii ho aggiunto grm. 48 di acido citrico. Con queste proporzioni si ha per i primi esperimenti che i tartrati acidi ammonici si trovano mescolati col citrato sodico della formola $C^6H^4NaO^7$ (a) e nei secondi esperimenti sono uniti con l'altro citrato della formola $C^{12}H^9NaO^{16}$ (b). Nei cristalli ottenuti con queste mescolanze si è pure verificata la loro particolare maniera d'impiantarsi con una delle estremità corrispondenti alle facce C, C', fig. 18, essendo essi bislunghi nel verso dell' asse c, siccome ho fatto innanzi avvertire per i tartrati acidi di potassa avuti nelle medesime condizioni. Intanto, come scorgesi nella figura 18 che rappresenta un cristallo di levo tartrato acido ammonico generato e lasciato per più giorni ingrandire nella soluzione con citrato di soda, le facce del tetraedro n', n'' sono maggiori delle altre n, n''', val quanto dire che ci ha la medesima specie di emiedria che contradistingue i cristalli di destro tartrato acido potassico. Nei cristalli di destro tartrato acido ammonico ho sempre osservato l' emiedria inversa.

(a) Sale acido bimetallico, $C^{12}H^6Na^2O^{14} + 2$ aq. Gerhardt.
(b) Sale acido monomettalico, $C^{12}H^7NaO^{12} + 2$ aq. Gerhardt.

Di più avendo immerso nelle soluzioni di ciascuna delle due specie di tartrati contenenti citrato sodico i cristalli delle corrispondenti specie di tartrato acido ammonico depositati da soluzioni pure, nei quali era distinta la maggiore estensione delle facce n', n'' per il destro tartrato, e delle facce n, n''' per il levo tartrato, in meno di tre giorni ho trovato questo carattere invertito, essendo divenuto nel destro tartrato maggiori le facce n, n''' e nel levo tartrato maggiori le facce n', n''.

Nei medesimi cristalli ottenuti dalle soluzioni dei tartrati acidi ammonici col citrato di soda, tra gli spigoli formati dalle n, n' anteriori con le facce che ad esse corrispondono posteriormente, e lo spigolo formato da g anteriore con g posteriore vi sono alcune faccette x, x' in vario modo ondate e rugose, e per queste faccette si verifica pure, che esse si estendono maggiormente dalla parte di n', n'' che di n, n''' nei cristalli di levo tartrato, e si estendono in senso inverso nei cristalli di destro tartrato. Le facce x, x' che sono certamente della medesima specie delle x, fig. 41, che in seguito dovrò menzionare in una particolare varietà di tartrato acido potassico, talvolta sono assai grandi, in guisa da fare scomparire le facce n, n' con le quali sembrano confondersi, ed allora apparisce manifesto che sono uscite dalla zona C', u', due di esse x', x'' piegando verso A e le altre due x, x''' piegando dalla parte opposta verso A posteriore. Per i cristalli di destro tartrato acido ammonico avviene il caso inverso che piegano verso A anteriore le facce x, x'''.

Per l'azione manifestata sulle forme cristalline dei tartrati acidi ammonici dal citrato sodico disciolto nelle loro soluzioni, ho ricercato se altri citrati producessero il medesimo effetto, ed ho eseguito diversi saggi col citrato ammonico. Quindi ho mescolato in diverse proporzioni le soluzioni del tartrato neutro ordinario di ammonio con la soluzione di acido citrico, e nei cristalli di bitartrato ammonico così ottenuti ho pure verificato il loro particolar modo d'impiantarsi con una delle facce C, C' e la presenza delle facce ondate x, x', fig. 25, molto estese; ma non ho più ravvisato in essi l'emiedria invertita. Ho intanto rinvenuto altre qualità che reputo meritevoli di distinta menzione. D'ordinario i cristalli che si hanno dalle soluzioni discretamente concentrate sono riuniti in gruppi raggiati congiungendosi per le estremità C, C', ed in ciascun gruppo si distingue un cristallo più grande degli altri, ed al quale gli altri si attaccano, impiantandosi nel mezzo delle facce g, fig. 25. Questa disposizione non sempre distinta per l'affollarsi dei cristallini, l'ho rinvenuta spesso talmente ben definita da farmi credere che non avvenga diversamente nei

gruppi ove i cristalli sono con qualche confusione disposti. E mi conforta in questa opinione l'altro fatto che, avendo immerso nelle soluzioni calde discretamente concentrate alquanti cristalli isolati della forma rappresentata dalla figura 25, dopo qualche tempo, mentre i cristalli immersi si sono ingranditi, nel mezzo delle facce g si sono generati altri minori cristalli divergenti in tanto maggior numero per quanto più la soluzione era concentrata.

Le soluzioni che han cominciato dal dare cristalli riuniti in gruppi, spesso continuando a produrre nuovi cristalli, ve ne sono stati alcuni solitarii che han continuato ad ingrandirsi senza divenire rampollanti; ed oltre la forma più frequente, ch'è quella rappresentata dalla figura 25 con le facce x, x' più estese e terminanti in punte acute nelle estremità opposte C, C', ho pure avuto altre forme del tutto diverse. In una cristallizzazione nella quale mi è riuscito di avere molti cristalli isolati erano gli uni dagli altri diversi secondo le forme che si veggono disegnate nelle figure 22, 25 e 26. L'ultima di queste forme, fig. 26, è più notevole delle altre per la grande differenza tra la metà corrispondente alla faccia C e l'altra metà opposta di più rapido ingrandimento corrispondente a C'. In essa si manifesta chiaramente una emiedria indeterminata; e quando la si mette a riscontro delle forme figurate nei numeri 22 e 25, sembra per lo meno molto probabile che il cristallo della figura 22 derivi dall'unione di due cristalli come quelli della figura 26 congiunti per le facce C', ed al contrario i cristalli come quello che ha servito di modello alla figura 25 nascano dall' unione di due cristalli della medesima figura 26, ma congiunti per le facce C. E questa maniera di considerare i cristalli rappresentati dalle figure 22 e 25 sembrami confermata dal particolar carattere delle facce g le quali, essendo poliedriche, nei cristalli della figura 22 si manifesta la loro poliedria per essere nel mezzo depresse, ed in quelli della figura 25 sono nel mezzo prominenti.

Metamorfismo scambievole tra i cristalli di levo e destro tartrato acido ammonico. Il metamorfismo tra i cristalli di specie diverse dei tartrati acidi ammonici presenta qualche differenza paragonandolo allo stesso fenomeno tra gli analoghi sali di potassa. Dappoichè immergendo i cristalli di destro tartrato acido ammonico nella soluzione di puro levo tartrato, o nel caso inverso, non ho mai potuto riconoscere in essi alcuna diminuzione di peso per effetto della già cominciata strasformazione. La qual cosa dimostra che o niente affatto dei cristalli immersi si discioglie nel liquore di specie diversa, o se pure qualche par-

te se ne solve, essa è al certo piccolissima. Usando negli esperimenti cristalli nitidissimi e trasparenti, nell'atto della immersione essi si appannano superficialmente, ed il loro appannarsi succede con tanta rapidità che in meno di due secondi ho veduto affatto dileguarsi la loro trasparenza, sia facendo l'esperimento con soluzioni alquanto concentrate alla temperatura di qualche grado superiore a 40°, sia immergendoli in soluzioni che da più di ventiquattr'ore avevano depositato cristalli alla temperatura dell' ambiente di poco superiore a 20°. Il deposito poi dei cristallini di specie diversa per i sali ammonici avviene assai più rapido che per le corrispondenti specie a base di potassa. Tre grossi cristalli di destro tartrato acido ammonico del peso grm. 1,502 cinque ore dopo essere stati tuffati in soluzione di levo tartrato discretamente satura a 42° pesarono grm. 1,687 (aumento 12, 32 per cento); sette cristalli del peso grm. 0, 729 tuffati in altra soluzione somigliante alla precedente, dopo venti ore li ho trovato pesare grm. 2, 036 (aumento 179, 29 per cento); tre cristalli del peso grm. 0,474 tuffati in soluzione che da circa venti ore depositava cristalli alla temperatura variabile tra 21°,2 e 22°,1 dopo due ore pesarono grm. 0, 551 (aumento 8 , 93 per cento). Quantunque assai breve il tempo del metamorfismo in quest' ultimo saggio, pure i cristallini prominenti sulle facce dei cristalli primitivi erano ben distinti, tranne sulle facce che poggiavano sul fondo del cristallizzatoio. Queste facce bagnate da pochissimo liquore in tutti i cristalli dei riferiti esperimenti non mi han presentato alcun segno di corrosione che avesse potuto farmi supporre l' azione dissolvente del liquore su di esse ; e mi è sembrato, guardandole con lente d' ingrandimento, che fossero quasi inverniciate di tenuissima patina cristallina.

L'ingrandimento dei cristalli dei tartrati acidi ammonici nelle soluzioni di specie diversa mi si è presentato in parità di circostanze manifestamente eguale o anche più rapido del loro ingrandimento nelle soluzioni della medesima specie. Nondimeno per avere maggior certezza di questo fatto ho immerso nella medesima soluzione di levo tartrato acido ammonico quattro cristalli di destro tartrato del peso grm. 0,382 e quattro cristalli di levo tartrato del peso grm. 0,319. Trascorse quattr'ore ho estratto i cristalli, li ho prosciugati e pesati. I primi pesavano grm. 0,402 (aumento 5,23 per cento) ed i secondi pesavano grm. 0,335 (aumento 5,02). In un secondo esperimento fatto con soluzione alquanto più concentrata ho adoperato quattro cristalli di destro tartrato del peso grm. 0,380, ed i medesimi quattro cristalli di levo tartrato del saggio pre-

cedente di grm. 0, 335. Dopo cinque ore i primi pesavano grm. 0, 405 (aumento 6, 58 per cento) ed i secondi pesavano grm. 0, 354 (aumento 5, 67 per cento).

Il metamorfismo poi tra i cristalli dei sali ammonici avviene essenzialmente come per quelli di potassa. Allo stesso modo i nuovi cristallini bislunghi ricuoprono le facce A, k, l, C, fig. 1, parallele all'asse b, e vengon fuori prominenti sulle facce g, n', u' convergenti verso il medesimo asse b. Ma sulle facce g, n', u' non si mostrano isolati, siccome li dimostra la figura 36 che rappresenta un cristallo di levo tartrato acido potassico. Essi sono invece strettamente congiunti insieme sin dal principio del metamorfismo, formando uno strato continuo con superficie interrotta da minutissime e frequenti cavità prodotte dal rinvenirsi sulla faccia n' del cristallo primitivo non solo le faccette n' dei novelli cristallini, ma anche le loro faccette g, u', n che si ripetono con angoli rientranti; e la medesima cosa interviene sulle facce n del cristallo primitivo.

Comparazione tra i cristalli dei tartrati acidi di potassa e di ammonio con quelli dei paratartrati acidi delle medesime basi. Nelle figure 1 a 5 ho rappresentato le forme dei cristalli dei tartrati acidi di potassa e di ammonio che si riferiscono al sistema trimetrico ortogonale, nè in essi ho osservato altre specie di facce all'infuori di quelle indicate nelle medesime figure e le facce x della figura 18. I cristalli del paratartrato acido ammonico o potassico sono monoclini, e sogliono variare per la presenza o mancanza di alcune specie di facce. Nelle figure 6 e 7 ho rappresentato una delle forme più frequenti del paratartrato acido ammonico, nella figura 6 con la faccia A parallela al piano di proiezione e nella figura 7 con la medesima faccia perpendicolare al piano di proiezione. Le figure 8 e 9, situate come le due precedenti, rappresentano una varietà dei cristalli di paratartrato acido potassico, e le figure 10 ed 11 un' altra varietà della medesima specie con le facce β perpendicolari o parallele al piano di proiezione. Nella figura 12 è disegnato un cristallo gemino con l'asse di rivoluzione perpendicolare ad A; ed i casi di geminazione sono alquanto rari sì nel sale di potassa che in quello di ammonio.

Nel tutto insieme delle loro forme non si scorge alcuna relazione tra i cristalli monoclini dei paratartrati con i cristalli ortogonali dei tartrati; ma sì negli uni che negli altri vi è clivaggio nitidissimo parallelo alle facce C, ed una seconda direzione di clivaggio ad angolo retto col primo e di esso meno nitido si scuopre parallelo alle facce A. Di più

le faccette i, k, l, o comprese nella zona AC fanno con A quasi gli stessi angoli sì nei cristalli dei tartrati che in quelli dei paratartrati. Quando poi si viene a paragonare le inclinazioni su di A delle facce comprese nella zona Aeg dei tartrati con le inclinazioni delle facce comprese nell'analoga zona $Adf\beta h$ dei paratartrati non si scorge più alcuna relazione; come pure non sono comparabili le inclinazioni delle facce delle altre zone $Am'n'u'$ dei tartrati ed $Apqrs$ dei paratartrati. Ciò apparirà manifesto volgendo lo sguardo alle seguenti misure goniometriche.

	Paratartrato acido	
	potassico	*ammonico*
A sopra d =	148° 18′	*147° 31′
A » f =	440 10	138 35
A » β =	116 18	114 33
A » h =	101 52	*102 21
A » i =	155 11	154 12
A » k =	145 16	144 6
A » l =	125 48	124 34
A » o =	109 50	109 1
A » p =	130 37	129 22
A » q =	*123 12	122 36
A » r =	*109 28	108 41
A » s =	98 33	98 53
p » p' =	115 55	114 28
q » q' =	108 26	107 42
r » r' =	* 97 34	96 32
s » s' =	92 34	* 92 28
(Ap) » (Ap') =	91 20	91 8

	Tartrato acido	
	potassico	*ammonico*
A sopra e =	145° 6′	144° 15′
A » g =	125 38	124 47
A » i =	155 40	154 48
A » k =	145 51	144 47
A » l =	126 24	125 19
A » m' =		134 46
A » n =	*117 12	*116 23
A » u =	90 0	90 0
m » m' =		120 22
n » n' =	*103 22	*102 18
(An) » (An') =	91 36	91 6

Paratartrato acido potassico
$a : b : c = 1 : 0{,}6316 : 0{,}6455$

Paratartrato acido ammonico
$a : b : c = 1 : 0{,}6156 : 0{,}6267$

Simboli delle facce; A 100; C 001; β 010; d $3\bar{1}0$; f 110; h $1\bar{1}0$ i 301; k 201; l 101; o 102; p 111; q $2\bar{1}1$; r 011; s $1\bar{1}1$.

Tartrato acido potassico
$a : b : c = 1 : 0{,}7168 : 0{,}7373$

Tartrato acido ammonico
$a : b : c = 1 : 0{,}6946 : 0{,}7085$

Simboli delle facce; A 100; C 001; e 210; g 110; i 301; k 201; l 101; u 011; m 211; n 111.

Malgrado queste differenze, si troverà una relazione più intima tra i cristalli ortogonali ed i monoclini calcolando le inclinazioni dello spigolo *Ap* sopra *Ap'* nei paratartrati, e di *An* sopra, *An'* nei tartrati, le quali inclinazioni riportate nel precedente quadro sono assai prossimamente eguali. Egli è però che i piani delle quattro zone *AikloC*, *Adfβh*, *Apq'rs'*, *Ap'qr's*, in cui si comprendono tutte le facce dei cristalli monoclini dei paratartrati, hanno tra loro le medesime inclinazioni che si rinvengono tra i piani delle quattro zone *AiklC*, *Aeg*, *Amnu*, *Am'n'u'* che abbracciano tutte le facce dei cristalli ortogonali dei tartrati.

Confrontando dunque l'uno con l'altro i due tipi di forme, si deduce che nel tipo monoclino dei paratartrati, conservandosi tra gli assi *c* ed *a* e tra gli assi *c* e *b* le medesime condizioni del tipo ortogonale dei tartrati, si sono mutate soltanto le condizioni tra gli assi *a* e *b*. Di questo mutamento non è facile definire il carattere fisico che per ora sfugge alle nostre ricerche. Osserviamo soltanto nella forma dei cristalli la differenza del carattere geometrico che deriva dalla differenza del carattere fisico, e che potrà guidarci a conoscere la vera natura di tal differenza; ma per ora non veggo chiaro come vi si possa pervenire.

Le riferite considerazioni sulle zone dei due tipi di forme mi han portato a ricercare se i cristalli monoclini dei paratartrati potessero considerarsi come ortogonali emiedrici, dotati cioè della stessa specie di emiedria che osserviamo nei cristalli di datolite o in quelli del secondo e terzo tipo della Humite. Ed ho voluto in pari tempo ricercare quale relazione si rinvenga tra i cristalli dei paratartrati riferiti al sistema ortogonale ed i cristalli ortogonali dei tartrati. Avendo quindi eseguito il calcolo sopra i cristalli di paratartrato acido potassico, ritenendo l'inclinazione di *A* sopra $\beta = 116°18'$, sono giunto a questi risultamenti.

Cristalli di paratartrato acido potassico

Angoli calcolati riportando i cristalli al sistema ortogonale	Angoli calcolati riportando i cristalli al sistema monoclino
—*A* sopra *d* = ... = 148° 22′	—148° 18′
+*A* » *f* = *A* sopra (*pp'*) = 140 12	—140 10
— . . . . . = *A* » (*qq'*) = 132 33	—132 27
+*A* » *β* = *A* » (*rr'*) = 116 18	—116 18
—*A* » *h* = *A* » (*ss'*) = 101 57	—101 52

Cristalli dei tartrati acidi di potassa

Angoli calcolati con A sopra $\beta = 116° 18'$	Angoli del quadro precedente
A sopra $e = A$ sopra $(mm') = 144° 42'$	—145° 6′
A » $g = A$ » $(nn') = 125\ 14$	—125 38

Come si scorge ragguagliando i valori angolari dei cristalli di paratartrato calcolati secondo il sistema ortogonale con quelli calcolati secondo il sistema monoclino, la differenza è piccolissima, non maggiore di sei minuti e molto minore di quella che risulta dalle misure dirette sopra cristalli le cui faccette sono sempre più o meno poliedriche. Per il tartrato la differenza tra gli angoli calcolati secondo le misure dirette prese sopra i suoi cristalli e gli angoli calcolati sulle misure prese sopra i cristalli di paratartrato giunge a ventiquattro minuti; la qual differenza non è gran cosa ove si consideri che nei due tipi di forma la diversa poliedria delle facce derivante dalla diversa simmetria delle forme basta a dar ragione di questa o di maggiori differenze. Non dimeno quando si tien conto dei rapporti di lunghezza tra gli assi a e b che sono stati adottati per ciascuna specie di faccia nel riferito calcolo, fa d'uopo convenire esservi qualche cosa di complicato e di strano. Dappoichè ritenendo l'asse a invariabile per tutte le faccette, sì dei cristalli del tartrato che del paratartrato, l' asse b si trova variare nelle seguenti proporzioni secondo le facce alle quali si riferisce:

h o s	— b = 3	nei cristalli di paratartrato acido potassico
β o r	— » = 7	
q	— » = 13	
f o p	— » = 17	
d	— » = 23	
g o n	— » = 10	nei cristalli dei tartrati acidi potassici
e o m	— » = 20	

Lasciando altre considerazioni che potrei aggiungere sulle forme cristalline dei tartrati acidi e dei paratartrati acidi di ammonio e di potassa, passerò ad esaminare il diverso grado di solubilità di questi sali che fa

d' uopo conoscere per quel che più tardi dovrò esporre sul loro metamorfismo scambievole. In molti esperimenti eseguiti su di essi, importandomi conoscere la quantità dei sali contenuta nelle soluzioni, ho determinato il peso del sale disciolto in acqua bollente, e dopo qualche giorno che le soluzioni erano state esposte alla temperatura dell' aria ambiente, ho pesato i cristalli depositati e determinato altresì il volume del liquore; talchè mi è stato facile conoscere la quantità del sale disciolto in un centimetro cubo dello stesso liquore. Intanto i risultamenti di questi saggi, per ragioni facili ad intendersi, spesso mi han presentato notevoli differenze. Soltanto ho potuto conchiudere che il paratartrato acido ed i tartrati acidi di potassa, essendo pochissimo solubili, il primo è di poco meno solubile degli altri; che il paratartrato acido ammonico è più solubile del sale potassico, e che in fine i tartrati acidi ammonici sono assai più solubili del paratartrato acido della medesima base. Per determinare con maggior precisione il loro grado di solubilità ho polverizzato i cristalli puri, e tenuta in digestione la loro polvere in acqua stillata per circa sei ore, agitando spesso la mescolanza. Quindi ho preso una quantità determinata della soluzione limpida che ho fatto evaporare a circa 60°, e poi ho pesato il residuo ben secco nello stesso bicchiere in cui ho fatto l'evaporazione. Essendo la temperatura delle soluzioni eguale a 28°,4 ho avuto da grm. 18,200 della soluzione di paratartrato acido potassico grm. 0,127 di residuo; da grm. 20,3755 della soluzione di levo tartrato acido potassico grm. 0,149 di residuo; da grm. 21,454 della soluzione di destro tartrato acido potassico grm. 0,156 di residuo; da grm. 21,873 della soluzione del paratartrato acido ammonico grm. 0,234 di residuo; e da grm. 18,656 di levo tartrato acido ammonico grm. 0,617 di residuo. Quindi si deduce per la riferita temperatura

Il paratartrato acido potassico	solubile in	142	parti di acqua
Il levo tartrato acido potassico	—	136	—
Il destro tartrato acido potassico	—	136,5	—
Il paratartrato acido ammonico	—	92,5	—
Il levo tartrato acido ammonico	—	29,2	—

Ripetuta la pruova alla temperatura di 15°,3 ho avuto per i residui delle diverse soluzioni grm. 0,078 da grm. 18,437 della soluzione di paratartrato acido potassico; grm. 0,099 da grm. 22,080 della soluzione di destro tartrato acido potassico; grm. 0,148 da grm. 22,758 della solu-

zione di paratartrato acido ammonico, e grm. 0,423 da grm. 19,004 della soluzione di destro tartrato acido ammonico. Quindi alla temperatura di circa 15°

Il paratartrato acido potassico	è solubile in	236,37	parti di acqua
Il destro tartrato acido potassico	—	223,03	—
Il paratartrato acido ammonico	—	153,77	—
Il destro tartrato acido ammonico	—	44,93	—

Cristalli di paratartrato acido potassico metamorfizzato in levo e destro tartrato acido potassico. La trasformazione dei cristalli di paratartrato acido potassico in levo e destro tartrato acido della medesima base succede con ammirevole precisione e chiarezza; e con tutti i particolari allo stesso modo, sia che i ciristalli di paratartrato siano tuffati nelle soluzioni di levo tartrato, ovvero di destro tartrato acido potassico; se non che i cristallini che sulle loro superficie s'impiantano offrono distinta l'una o l'altra specie di emiedria secondo la natura diversa della soluzione. Nella figura 31 vedesi disegnato un cristallo di paratartrato acido potassico diciassette ore dopo essere stato immerso in soluzione di destro tartrato. Il cristallo primitivo presentava le facce A, β, r, fig. 11, assai grandi e molto piccole le facce p, q, h; e tutte queste facce sono scomparse, perchè la soluzione mentre deposita i nuovi cristallini, come in molti altri casi, discioglie i cristalli di specie diversa in essa immersi. Quanto poi ai nuovi cristallini, essi s'impiantano su qualunque specie di faccia del cristallo primitivo, tutte le loro facce A, C si dispongono esattamente parallele alle facce A, C di questo, e sono più o meno bislunghi nel verso dell'asse c. Nei diversi saggi fatti sulla trasformazione del paratartrato acido potassico, quando i cristalli co' quali ho fatto l'esperimento sono stati piccoli, ho talvolta osservato che prima di saldarsi insieme i nuovi cristallini del tartrato, essendosi del tutto disciolto il cristallo di paratartrato sul quale essi aderivano, sono rimasti gli uni dagli altri separati. D'ordinario poi essi han finito per congiungersi tutti insieme sino a formare, prolungato l'ingrandimento, un solo cristallo con facce continue, che racchiude nel mezzo come nocciolo, la parte non disciolta del cristallo primitivo.

Per avere un saggio del come procede lo sciogliersi dei cristalli di paratartrato ed il depositarsi dei nuovi cristallini dei tartrati, basta fare attenzione ai seguenti risultamenti ottenuti con cristalli di diversa grandezza.

			dopo 17 ore	diminuzione
soluzione di levo tartrato	1°, 14 piccoli cristalli	grm. 0,249 —	grm. 0,211 —	15,26 per 100
	2°, 10 cristalli più grossi	» 1,215 —	» 1,127 —	7,24 »
soluzione di destro tartrato	1°, 14 piccoli cristalli	» 0,253 —	» 0,221 —	22,65 »
	2°, 10 cristalli più grossi	» 0,924 —	» 0,834 —	9,74 »

Concentrate alquanto le soluzioni, ho in esse immerso i medesimi cristalli nei quali era cominciato il metamorfismo, e vi ho aggiunto altri cristalli novelli di paratartrato.

			dopo 13 ore	aumento
soluzione di levo tartrato	1°, 14 cristallini precedenti	grm. 0,211 —	grm. 0,223 —	5,69 per 100
	2°, 10 cristalli precedenti	» 1,127 —	» 1,202 —	6,65 »
	3°, 15 nuovi cristallini	» 0,263 —	» 0,262 —	
soluzione di destro tartrato	1°, 14 cristallini precedenti	» 0,221 —	» 0,234 —	5,88 »
	2°, 10 cristalli precedenti	» 0,834 —	» 0,880 —	5,50 »
	3°, 15 nuovi cristallini	» 0,262 —	» 0,259 —	

Per i risultamenti di questi saggi apparisce chiaro che il paratartrato acido potassico si solve nelle soluzioni, quantunque sature, dei tartrati acidi della medesima base; o ciò che vale lo stesso, che una determinata quantità di acqua che a temperatura stabilita non potrebbe disciogliere maggiore quantità di ciascuna specie di tartrato, può disciogliere il paratartrato. Se così non fosse, non avrebbesi potuto avere diminuzione di peso nei cristalli diciassette ore dopo essere stati esposti a trasformarsi. E tale diminuzione è da reputarsi ancora di maggiore importanza di quel che a prima giunta sembrano dimostrare le cifre. Dappoichè le soluzioni adoperate in queste esperienze erano in origine cristallizzanti, e però sature alla temperatura dell'ambiente; e prima di rimettervi i cristalli di paratartrato sono state riscaldate sino all'ebolizione, e la immersione dei cristalli si è fatta quando la loro temperatura si è abbassata a circa 40°. Quindi per la evaporaziene sofferta esse si trovavano avere maggior copia dei tartrati di quanta alle basse temperature dell'ambiente potevano contener disciolta.

Quanto alla proporzione con la quale si scema il peso dei cristalli immersi, essa si scorge maggiore nei cristalli più piccoli, dappoichè questi a peso eguale hanno superficie molto più estesa dei cristalli di maggior grandezza. Nei cristalli poi n. 3 immersi per la prima volta nella seconda esperienza, la diminuzione in peso è piccolissima e quasi nulla, perchè le soluzioni contenendo già disciolto il paratartrato dei cri-

stalli della prima immersione, hanno disciolto meno dei cristalli della seconda immersione; talchè la parte disciolta ed i cristallini depositati si sono trovati quasi ragguagliati in peso. Per la medesima ragione quando ho tuffato novelli cristalli di paratartrato nelle soluzioni da più giorni adoperate al metamorfismo di altri cristalli, mentre su di essi sono venuti a depositarsi con la solita regolarità i cristalli dei tartrati, essi stessi sono rimasti intatti o quasi intatti avviluppati nel mezzzo del nuovo deposito. Ho pure osservato, prolungando l'ingrandimento dei cristalli metamorfizzati, che si giunge ad un punto nel quale, scemata di molto la specie di tartrato acido da prima disciolta nel liquore, comincia una nuova fase di metamorfismo per il paratartrato che si trova disciolto nello stesso liquore, e che a sua vece trasforma i cristallini dei tartrati in paratartrati.

In tutti gli esperimenti fatti con i tartrati o paratartrati di qualunque specie ho incontrato non lieve difficoltà a condurli innanzi, perchè dopo pochi giorni si generano nelle loro soluzioni le muffe che le intorbidano e le guastano. Questo inconveniente è molto maggiore per le specie poco solubili, come il paratartrato acido ed i tartrati acidi di potassa, essendo assai lento l'ingrandimento dei loro cristalli. Per rimediare a tale incommoda condizione, ho decantato e fatto bollire le soluzioni ogni due o tre giorni, rimettendo in esse, qnando son giunte a circa 40°, i medesimi cristalli che prima vi erano. In tal guisa, mentre da una parte s'impedisce la produzione delle muffe, si ottiene pure che l'esperienza si porta più presto a compimento.

Cristalli di levo e destro tartrato acido potassico metamorfizzati in paratartrato acido potassico. I cristalli di levo e destro tartrato acido potassico immersi nella soluzine di paratartrato acido potassico restano superficialmente corrosi come nel caso inverso or ora esaminato; e nel medesimo tempo su di essi s'impiantano i nuovi cristallini. Quanto alla disposizione dei nuovi cristallini sul cristallo primitivo essa somiglia moltissimo al distribuirsi l'una sull'altra le due specie di cristalli dei tartrati acidi quando scambievolmente si metamorfizzano. Chè i nuovi cristallini bislunghi ricuoprono completamente le facce A, k, l, C, fig. 1, e riescono prominenti sulle facce g, n, u, come si scorge nella figura 36.

Prima di farne la pruova, persuaso che i cristalli dei tartrati si dovessero metamorfizzare in paratartrato, perchè si era verificato il caso inverso, era premuroso di esaminare come si andassero ad allogare sul cristallo primitivo ortogonale i nuovi cristallini monoclini; dappoichè

essendo nei cristalli di paratartrato acido potassico le facce della zona A, d, f, β, h, fig. 6 ad 11, come pure le facce p, q, r, s, inclinate alcune verso A, altre inclinate dalla parte opposta verso A', non sapeva prevedere come i cristallini generati a qualche distanza l'uno dall'altro si potessero poi tra loro corrispondere in guisa che tutte le facce della medesima specie si trovassero parallele. E la mia giusta curiosità è stata del tutto soddisfatta in una maniera ammirevole che non avrei potuto attendermi. Difatto ho trovato che i cristallini di paratartrato che si depositano sul cristallo primitivo di tartrato sono senza eccezione tutti gemini. Di più essendo A il piano di geminazione, e per conseguenza incontrandosi le facce h, fig. 9, da una parte con angolo diedro rientrante, e dalla parte opposta con angolo prominente, i cristallini gemini del paratartrato sono sempre impiantati sul cristallo primitivo di tartrato acido potassico per la parte ove la le facce h s'incontrano con angolo rientrante, e però le loro estremità libere corrispondono all'angolo diedro prominente formato dalle facce h.

Apparisce per sè evidente la importanza di questo fatto, il quale ci dimostra l'arcana azione dei cristalli ortogonali dei tartrati sul primo accozzarsi delle molecole dei cristallini di paratartrato; azione tale che li costringe a divenire gemini e ad impiantarsi per la parte ove le facce h s' incontrano con angolo diedro rientrante. Trascorse non più di sedici ore dopo la immersione dei cristalli di tartrato acido nella soluzione di paratartrato, ho già osservato ben distinta la costante geminazione dei nuovi cristallini e la loro costante maniera d'impiantarsi sulle facce g, n, u del cristallo primitivo; e malgrado la piccolezza delle faccette h terminali, ho potuto assicurarmi della specie alla quale appartengono misurandone l'inclinazione sulle facce A col goniometro a riflessione. Talchè sulla esattezza del fatto annunziato non posso conservare alcun dubbio. Lo stesso fatto è pure rifermato dalla forma che si osserva derivare dal fondersi insieme i cristallini dopo la completa trasformazione. Come si osserva nella figura 29, **a**, **b**, che rappresenta un cristallo giunto al completo suo metamorfismo, nella parte superiore e nella inferiore del cristallo vi sono le facce h disposte come nei cristalli ortogonali, incontrandosi cioè in entrambe le parti opposte con angoli diedri prominenti. Quanto alle facce q, r, che sono altresì disposte come lo sarebbero in un cristallo ortogonale, debbo soggiungere che le faccette q le ho quasi sempre così rinvenute come sono nella figura disegnate, mentre delle faccette r nei diversi cristalli osservati ne ho trovato soltanto

alcune quando in una parte, quando in un'altra del cristallo senza regola fissa. Nella medesima figura si veggono pure le faccette rugose x presso le estremità dello spigolo formato dalle facce h, h', sulle quali faccette ora non è necessario trattenerci.

Cristalli che si hanno dalle soluzioni di levo e destro tartrato acido potassico mescolati in varie proporzioni. Non avrei preso ad indagare le maravigliose forme cristalline che si hanno mescolando insieme in proporzioni diverse il levo ed il destro tartrato acido potassico se non ci fossi stato guidato da causale osservazione. Avendo gran copia di levo e destro tartrato neutro potassico-sodico mescolati insieme, e volendo separare le due specie, d'ordinario non distinte pel carattere dell'emiedria, ho fatto ingrandire nelle acque madri i cristalli isolati sino a raggiungere il peso di circa cinque grammi. Ho quindi disciolto separatamente ciascun cristallo, ed avendo aggiunto nella soluzione un pò di acido nitrico, ho avuto, secondo la specie del cristallo disciolto, il destro o il levo tartrato acido potassico che in parte si è precipitato per la sua poca solubilità. Questo metodo intanto non suol dare soluzioni che contengono una specie di tartrato affatto scevra dell'altra specie, ed in qualche caso in cui non ho avvertito che il cristallo disciolto teneva incastonato altro cristallo di specie diversa, è avvenuto per conseguenza che nel liquore si sono trovate riunite le due specie di tartrato acido potassico l'una in maggior copia dell'altra. Da queste soluzioni poi ho avuto cristalli di strana forma che saranno di quì a poco esaminati, e mi han fatto comprendere l'importanza di studiare i cristalli che nascono dalle mescolanze in varie e note proporzioni dei due tartrati acidi potassici.

Ho scelto nel fare le mescolanze delle due specie di tartrati tre diverse proporzioni; di 4 : 1, di 2 : 1, e di 3 : 2. Esporrò in primo luogo i risultamenti delle mescolanze secondo le due ultime proporzioni che sono i più semplici. Avendo disciolto in circa 700 centimetri cubi di acqua calda grammi quattro di levo tartrato acido potassico e grammi due di destro tartrato acido potassico, entrambi ottenuti col metodo indicato di sopra, pag. 5, per averli puri, ho avuto col raffreddamento del liquore molti minuti cristalli di paratartrato terminati dalle facce A, β, r, h, C, fig. 9, che ho lasciato ingrandire per due giorni. Indi ogni due giorni ho decantato e concentrato alquanto col bollimento il liquore, e vi ho rimesso i medesimi cristalli ingranditi, prendendo nota del peso dei cristalli e della loro forma ogni volta che ho concentrato la so-

luzione. Quando il peso dei cristalli ingranditi è giunto a grm. 3, 789 mi sono accorto che già essi cominciavano a trasformarsi. Le loro facce *A* erano ricoverte da un cristallo di levo tartrato acido, fig. 40, (a) che si allargava alquanto oltre le facce laterali del cristallo di paratartrato, e si distingueva per le strie parallele agli spigoli *AC*. Altri cristallini di levo tartrato venivan fuori dalle facce *C* dei primitivi cristalli di paratartrato nel modo che ho disegnato nella figura 40, quantunque meno prominenti, rappresentando la figura un grado di metamorfismo più avanzato. Intanto le facce β, r, h si conservavano ancora nitide, nè su di esse aderiva alcun cristallino di levo tartrato. Rinnovando le concentrazioni del liquore, e progredendo l'ingrandimento dei cristalli, sulle facce β, r, h non si è mai impiantato alcun novello cristallino, e soltanto le ho vedute alquanto appannate, non saprei dire se per effetto di corrosione, o piuttosto in conseguenza di disturbata regolarità nell'ingrandimento dei medesimi cristalli. Nel medesimo tempo i cristallini aderenti alle facce *C* si sono alquanto distesi sulle facce *r*. In fine quando il peso dei cristalli depositati ed ingranditi è giunto a grm. 5,277 mi sono accorto che le facce *n* dei cristallini di levo tartrato erano solcate da rozze strie parallelamente agli spigoli *An* come vedremo più per disteso nei cristalli dalla mescolanza delle due specie nella proporzione di 4 : 1.

Nell'altro esperimento fatto con tre grammi di destro tartrato e grammi due di levo tartrato acido potassico; si sono ripetuti tutti i medesimi particolari descritti nell'esperimento precedente. Essendosi già ingranditi i cristalli di paratartrato acido potassico depositati sino a pesare grm. 3,068, non ci ho scorto su di essi alcun segno dei scristallini di destro tartrato, e che ho potuto osservare distintamente quando il loro peso è giunto a grm. 3,505. Quando poi son giunti a pesare grm. 4,511, allora si son pure manifestate le strie sulle facce n'' dei nuovi cristallini.

I più importanti risultamenti li ho avuti dal terzo esperimento fatto con quattro grammi di destro tartrato acido potassico ed uno di levo tartrato, per la quale proporzione si hanno due parti di paratartrato e tre di destro tartrato acido potassico. I cristalli avuti da questa mescolanza dal principio sino alla fine dell'esperimento, siccome li mostra la figura 37, han presentato la forma del destro tartrato acido potassico col particolare carattere apparente che le facce n', n'' sono rozzamente striate in dire-

(a) Il cristallo che ha servito di modello alla figura 40 proviene dalla mescolanza del seguente esperimento col destro tartrato acido potassico in maggior copia, e però i novelli cristallini appartengono a questa specie.

zione parallela agli spigoli An'. Ed un altro carattere di maggior momento mi hanno manifestato quando col goniometro a riflessione ho misurato l'inclinazione delle facce n', n'' sopra A, e delle altre due facce n, n''' sulla faccia A' posteriore; dappoichè ho trovato riflettersi da ciascuna faccia n due immagini ben distinte con una delle quali si ha l'inclinazione delle n sopra A di circa 117° e con l'altra di circa 123°. Quindi è chiaro che le facce n sono composte di due faccette che si ripetono alternandosi, e producono le menzionate strie. Una di esse appartiene alle vere facce n dei cristalli dei tartrati acidi potassici, e l'altra alle facce q dei cristalli di paratartrato. Per avere più esatta notizia di questa strana fusione dei cristalli monoclini di paratartrato acido potassico con i cristalli ortogonali dei tartrati acidi ho misurato le inclinazioni di nq sopra A in molti cristalli nei tempi successivi del loro accrescimento. Nel seguente quadro sono riportati i valori angolari rinvenuti con misure dirette in otto cristalli misurati in quattro diversi periodi del loro ingrandimento. Gli angoli sotto i numeri 1 e 2 li ho avuti quando i cristalli depositati pesavano grm. 1,245; quelli dei numeri 3 e 4 quando pesavano grm. 3,227; quelli dei numeri 5 e 6 quando pesavano grm. 4,042 e gli ultimi dei numeri 7 ed 8 quando pesavano grm. 4,689. Giunto a questo ingrandimento dei cristalli non rimanevano che 26 centimetri cubi di liquore, e però non si poteva prolungare l'operazione, nè era da attendere alcun cambiamento prolungandola. Fa d'uopo pure notare che i pesi tolti dei cristalli depositati ed ingranditi sono sempre alquanto minori della quantità di sale depositato, dovendosi tener conto delle continue perdite inevitabili nelle successive decantazioni e concentrazioni del liquore; talchè nell'ultimo residuo della soluzione non vi poteva essere che piccola parte dei cinque grammi dei sali disciolti, e che secondo il loro grado di solubilità innanzi rinvenuto, pag. 20, può calcolarsi di circa grm. 0,180.

	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°
$A'q$ =	123°34′	123°16′	123° 6′	123° 4′	123° 9′	123°31′	123°29′	123°12′
$A'n$ =	117 56	118 6	116 28	116 18	117 15	116 16	116 34	116 48
$A'u$ =	»	»	89 33	»	89 56	98 55	90 12	»
Aq' =	123 9	»	123 28	121 58	123 39	123 29	123 9	123 9
An' =	115 29	116 54	117 24	116 6	116 42	117 2	116 54	116 19
Au' =	»	»	90 11	90 21	90 21	89 51	89 47	89 41
Aq'' =	122 58	124 9	122 44	122 51	122 54	123 15	123 39	122 58
An'' =	116 31	117 18	116 46	116 39	116 2	116 26	116 13	117 1
Au'' =	»	»	»	89 57	90 11	»	90 12	89 47
$A'q'''$ =	123 39	123 30	123 36	123 3	123 4	123 7	122 24	123 2
$A'n'''$ =	116 48	116 4	117 32	117 2	117 15	116 56	117 21	117 19
$A'u'''$ =	»	»	90 3	»	89 56	89 27	90 2	89 41

*

Nel precedente quadro ho omesso soltanto le misure delle facce del tetraedro n minore, alcune delle quali ho pure qualche rara volta trovato; e quanto al resto ho registrato appuntino le misure goniometriche di tutte le faccette incontrate nella zona $An'n''$ e nell'altra zona $A'nn'''$. Nel verso delle zone Ae ed AC, fig. 1ª, ho pure osservato con lente d'ingrandimento alcune faccette per le quali non mi è stato possibile nei cristalli ottenuti misurare l'inclinazione sopra A.

Intanto per i riferiti valori angolari trovo in primo luogo da osservare che i descritti cristalli presentano un caso d'intricata unione, e direi quasi di perfetta fusione, delle facce appartenenti ai cristalli ortogonali del destro tartrato acido potassico ed ai cristalli monoclici del paratartrato acido della medesima base; che essendo di più in essi ben pronunziata la emiedria delle facce n propria del destro tartrato, le facce q del paratartrato ubbidiscono alla medesima legge di emiedria; ed in fine che stando le facce q nella parte superiore e nella inferiore del cristallo alcune inclinate verso A, altre inclinate posteriormente verso A', ne conseguita che in questo caso, come in quello del metamorfismo dei tartrati acidi potassici, la parte della massa cristallina che appartiene al paratartrato è disposta in due sensi convergenti come nei cristalli gemini.

Al medesimo ordine di fenomeni appartengono i cristalli ottenuti quando, nella maniera riferita di sopra, ho aggiunto un po' di acido nitrico alla soluzione dei cristalli di levo tartrato neutro sodico-potassico che contenevano in quantità minore anche il destro tartrato. La quantità di acido nitrico adoperata era maggiore di quanto ne abbisognava per neutralizzare la soda; e però il liquore contenendo un po' di acido nitrico libero, era in condizione di solvere i tartrati acidi potassici meglio che la semplice acqua stillata. Nondimeno sul principio ho avuto abbondante deposito di minutissimi cristallini che in gran parte ho conservato, e parte ho ridisciolto nello stesso liquore riscaldato ed alquanto allungato con novella acqua. Ho avuto così molti piccoli cristalli isolati che ho lasciato ingrandire per qualche giorno. Poi ne ho accelerato l'ingrandimento sciogliendo ogni due giorni nel liquore riscaldato piccola quantità del deposito cristallino ottenuto nel principio dell'operazione, e rimettendo nella soluzione giunta a circa 40° i cristalli già ingranditi. Quando i cristalli sono giunti a misurare tre a quattro millimetri nel loro maggior diametro, ogni volta che ho riscaldato il liquore ho conservato alcuni di essi per esporli a minuto esame; e sino a che ho finito di sciogliere tutto il primitivo deposito, ho rinvenuto la loro forma sempre la stessa, e tale

quale vedesi figurata nel numero 27, **a**, **b**. Da sette cristalli scelti tra i migliori ho avuto i valori angolari ordinati nel quadro che segue, ed al quale bisogna rivolgere l'attenzione prima di venire alle conseguenze che se ne possono dedurre.

	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°
Aq =	123°34′	123°17′	123°51′	123°49′	123°46′	123°24′	122°28′
An =	»	»	117 34	»	»	117 39	117 41
$A'q$ =	»	122 31	122 43	»	122 28	122 38	123 34
$A'r$ =	109 18	109 38	»	109 4	109 10	109 27	»
$A's$ =	»	»	98 42	»	98 18	98 4	»
Aq' =	»	»	»	»	123 21	»	»
An' =	»	116 24	116 53	»	117 3	117 28	117 34
Ar' =	110 12	110 3	»	»	»	»	109 24
As' =	99 16	»	»	98 26	»	99 11	98 58
$A'q'$ =	123 0	122 5	123 8	123 27	123 26	123 7	123 3
$A'n'$ =	»	»	»	»	117 38	118 2	»
Aq'' =	»	»	122 49	»	»	123 0	122 39
Ar'' =	»	109 12	»	109 21	»	»	»
As'' =	98 28	»	98 12	98 14	»	»	97 37
$A'q''$ =	123 17 (a)	123 47	123 46	123 32	122 42	123 6	124 12
$A'n''$ =	»	118 16	»	117 36	»	»	»
Aq''' =	122 31	123 9	122 34	123 8 (b)	123 14	122 29	123 51
An''' =	116 39	»	»	»	»	117 15	117 8
$A'q'''$ =	»	»	124 16	123 33	122 26	»	»
$A'n'''$ =	»	118 12	»	»	»	»	»
$A'r'''$ =	110 32	109 58	110 30	»	»	109 49	110 1
$A's'''$ =	»	»	100 25	99 31	98 2	»	»

L'aspetto dei cristalli, siccome apparisce dalla figura che li rappresenta, è quello dei cristalli di levo tartrato acido potassico, e da ciò si deduce senza alcun dubbio che nella soluzione era questa specie di sale soprabbondante in paragone della specie destrorsa. I valori angolari poi che misurano le inclinazioni delle facce rinvenuti con le misure dirette vengono a contradire questa illusoria apparenza, mostrando che le grandi facce allogate come le facce n, n''', fig, 3, nei cristalli del levo tartrato appartengono esclusivamente ai cristalli di paratartrato; ed oltre le facce q, fig, 27, che sono le più grandi, vi son pure le facce r, ed s dei medesimi cristalli di paratartrato. Nella figura 27, **b**, ove ho rappresentato la parte inferiore del cristallo della figura 27, **a** con le facce A perpendicolari al piano di proiezione, si veggono le facce h, h' incontrarsi con

(a) $A'r'' = 110°0'$. (b) $Ar''' = 108°29'$.

angolo diedrio prominente al modo stesso come s'incontrano nella parte opposta; e quantunque non abbia riportato nel quadro le inclinazioni delle facce *h* sopra *A*, pure non ho mancato assicurarmi con misure dirette che esse realmente sono inclinate sopra *A* di circa 102°, e quindi appartengono alla specie *h*. I cristalli dunque della figura 27 appartengono al paratartrato acido potassico con quel carattere di geminazione proprio dei cristalli nati per metamorfismo dei tartrati, fig. 29, e con questo di particolare che le loro facce serbano la legge di emiedria distintiva dei cristalli di levo tartrato acido potassico, sia che si consideri la relativa estensione delle facce della medesima specie, come avviene per le facce *q*, sia che si consideri la mancanza di alcune delle facce della medesima specie, come avviene per le *r*, e per le *s*.

Vi sono inoltre sulle facce *A* dei medesimi cristalli alquanti cristallini, la cui regolare e costante disposizione sul cristallo maggiore s'intende agevolmente guardando la figura, e questi cristallini sono al certo di tartrato acido potassico, perchè si veggono terminati dalle faccette *n* che malgrado la loro piccolezza mi han permesso talvolta misurarne le inclinazioni sopra *A*, siccome veggonsi registrate nel quadro precedente. Non di meno resto in dubbio se essi appartengano alla specie sinistra ovvero alla destra, o se pure ve ne siano di entrambe le specie, perchè nelle minutissime faccette *n*, che incontrano con angolo rientrante le facce *q*, non si ravvisa distinto il carattere dell'emiedria.

Avendo voluto continuare con qualche variazione gli esperimenti che mi han dato i cristalli testè esaminati, ho allungato alquanto il liquore acido nel quale essi si erano generati ed ingranditi, e l'ho riscaldato sciogliendovi un po' di paratartrato acido potassico. Poi ho riposto alquanti dei medesimi cristalli per farli ingrandire nella soluzione così preparata. Anche in questo nuovo saggio ho di tempo in tempo concentrato il liquore per impedire la produzione delle muffe e per accelerare l'ingrandimento dei cristalli. E questi han mostrato sin da principio mutate le condizioni delle facce *A* sulle quali sono scomparsi i cristallini di tartrato acido potassico, e sono divenute levigate. Di più sono apparse alcune faccette che prima non vi erano, e la loro forma è divenuta quale vedesi rappresentata nella figura 28, **a**, **b**. Gli angoli che ho trovato misurare le inclinazioni delle diverse specie di facce sulla faccia *A* ed *A'* sono riportati nel seguente quadro, nel quale ho registrato sotto i numeri 1, 2 e 3 gli angoli di tre cristalli misurati dopo il primo concentramento del liquore, sotto i numeri 4, 5 e 6 gli angoli di altri tre cristalli dopo il

secondo concentramento, ed in fine sotto i numeri 7 ed 8 gli angoli di due cristalli dopo il terzo concentramento del liquore.

	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°
Ap =	»	»	»	»	132°33′	»	»	»
Aq =	123 21′	123°46′	123°41′	123°48′	123 17	122°28′	123°19′	122°44′
As =	98 58	98 23	99 2	98 49	98 54	98 32	98 22	97 52
$A'p$ =	»	»	129 15	130 28	129 47	130 16	130 18	»
$A'q$ =	123 17	123 7	123 6	»	122 49	123 8	123 21	122 33
$A'r$ =	108 36	109 12	106 2	105 2	111 50	106 4	108 34	107 42
	»	104 31	»	»	109 13	104 32	106 49	106 2
$A's$ =	98 28	98 52	98 27	97 48	»	98 31	»	»
Ap' =	130 56	130 54	131 2	»	130 12	»	»	131 9
Aq' =	123 22	123 33	»	122 9	122 44	122 12	122 43	122 46
Ar' =	109 30	107 32	109 52	»	109 17	104 57	104 38	105 1
	104 38	»	108 55	»	106 25	»	»	»
As' =	98 24	98 27	»	98 34	98 14	98 13	98 14	97 57
$A'p'$ =	»	»	»	132 19	»	»	»	»
$A'q'$ =	123 10	123 55	122 59	123 58	123 56	122 18	123 2	122 27
$A's'$ =	98 15	98 32	98 26	99 19	98 37	99 16	98 24	98 7
Ap'' =	»	130 39	»	131 34	»	130 27	132 21	129 51
Aq'' =	122 25	123 42	122 42	123 31	122 59	122 33	»	»
Ar'' =	104 30	107 21	104 52	106 46	111 22	109 17	109 59	108 18
	»	106 36	»	»	108 51	105 29	»	»
As'' =	97 54	99 31	98 23	98 58	97 27	»	»	»
$A'p''$ =	»	»	130 30	»	»	»	»	132 3
$A'q''$ =	123 31	122 7	123 3	121 28	122 26	122 48	121 37	122 51
$A's''$ =	99 33	99 13	98 7	97 32	98 29	99 12	97 51	99 45
Ap''' =	»	»	»	130 27	»	129 58	130 44	»
Aq''' =	122 43	123 9	122 49	122 43	122 9	122 55	121 51	122 13
As''' =	98 9	98 37	98 13	98 15	97 32	97 34	97 28	98 27
$A'p'''$ =	131 12	130 29	»	»	128 44	131 19	131 23	130 25
$A'q'''$ =	124 12	123 36	123 22	123 44	»	»	124 0	122 51
$A'r'''$ =	110 28	»	108 6	106 7	110 31	110 28	109 27	107 47
	106 1	»	105 58	104 41	106 27	106 39	106 46	105 6
$A's'''$ =	99 28	98 47	»	98 56	»	»	»	»

Malgrado il prolungato ingrandimento dei cristalli nella soluzione che conteneva quasi esclusivamente paratartrato acido potassico, la primitiva emiedria della loro forma si è conservata, sia per quanto riguarda la maggiore estensione delle facce q, q''', e sì per la mancanza delle facce r ove sono le facce q più grandi. È pure notevole la poliedria delle facce r, variando la loro inclinazione sopra A da circa 105° sino a circa 111°, e d'ordinario esse mi han presentato diverse immagini degli oggetti veduti per luce riflessa; quindi è che nelle precedenti misure si trovano registrati gli angoli avuti con ciascuna delle due immagini estreme.

Il carattere poi di trovarsi le due facce h, h', fig. 28, a formare angoli

diedri prominenti nelle parti opposte del cristallo si è conservato sempre costante. La disposizione delle h come pure delle facce p, q, r, s è simile a quella che si osserva nei cristalli di paratartrato acido potassico, fig. 29, che nascono dal metamorfismo dei cristalli dei tartrati acidi, e si è veduto come in questi derivi dall'essere i cristalli di paratartrato sempre gemini e sempre impiantati sulle facce g, n, u, fig. 1, delle estremità opposte dei cristalli dei tartrati, per la parte ove le facce h s'incontrano con angolo rientrante. Si è pure veduto per la mescolanza di tre parti di destro tartrato e due parti di paratartrato acido potassico derivarne cristalli composti dall'unione, e quasi direi compenetrazione delle due specie, nei quali cristalli, fig. 37, dominando l'emiedria propria del destro tartrato acido potassico, vi sono le facce sì del tartrato che del paratartrato. Quindi è facile intendere che le soluzioni in cui si sono generati i cristalli rappresentati dalle figure 27, **a**, **b** conteneva il levo tartrato ed il paratartrato acido potassico, il primo in quantità alquanto maggiore del secondo.

Intanto se si pon mente al modo come i cristallini di paratartrato che nascono per metamorfismo sopra i cristalli dei tartrati si trovano allogati gli uni verso gli altri, non si durerà fatica ad intendere che quando essi giungono a toccarsi, e quindi a formare con la loro fusione un sol cristallo, fig. 29, l'interna struttura di questo cristallo risulta molto complicata. Basta tener conto della sola direzione dell'asse a in ciascuna metà dei cristalli gemini che non si trova per dritto con l'asse a dell'altra metà, come nella figura 12 non sono per dritto facce β della metà superiore con le facce β' della metà inferiore. Quindi nell'interno dei cristalli figurati sotto i numeri 27, 28, 29, si alternano e s'intrecciano ripetutamente le piccole masse cristalline disposte come la metà superiore $A\beta$, fig. 12, con altre piccole masse cristalline disposte come la metà inferiore $A'\beta'$.

A questa interna struttura credo sia dovuto quel che mi è avvenuto osservare quando per lungo tempo sono rimasti nelle acque madri ad ingrandirsi i cristalli rappresentati dalla figura 28; e meglio ancora quando li ho fatto ingrandire nella soluzione di puro paratartrato acido potassico. È allora succeduto che all'esterno del cristallo si sono distinte due o più parti separate da solchetti o strie flessuose in direzioni varie, in alcune parti stando le facce allogate come nella metà superiore della figura 12, e nelle altre come nella metà inferiore della medesima figura. È pure degno di nota in tal caso che i solchetti che su ciascuna specie di

faccia davano la traccia della separazione più o meno distinta tra le parti del cristallo diversamente situate, si arrestano e rimangono occulti sulle facce h.

Ogni descrizione, per quanto estesa, sembrandomi insufficiente a dare giusta idea di tale separazione, ho rappresentato nella figura 35 un esempio dei meno complicati con tutti i suoi particolari copiato dal cristallo originale, e con le facce supposte spiegate e portate al medesimo piano della faccia AA'. La faccia A e tutte le facce contraddistinte con lettere semplici appartengono alle parti allogate come la metà superiore $A\beta$ della figura 12; la faccia A', separata da A con un solco flessuoso, e tutte le facce dinotate con lettere fornite di apici appartengono alle altre parti allogate come la metà inferiore $A'\beta'$ della figura 12. Le linee formate di puntini servono a far distinguere l'incontro delle facce con angoli diedri rientranti.

Ecco poi i valori angolari trovati con le misure dirette nel cristallo figurato.

Parte superiore sinistra		*Parte superiore destra*	
$A'A$ sopra q' =	123° 5′	$A'A$ sopra q' =	123° 5′
— » s =	»	— » r =	106 59
— » r' =	—105 16		104 32
— » q =	—122 51	— » s' =	98 73
— » p' =	—130 7	— » r' =	—105 28
		— » q =	—123 1

Parte inferiore sinistra		*Parte inferiore destra*	
$A'A$ sopra p' =	130°35′	$A'A$ sopra p' =	130°31′
— » q =	123 11	— » q =	123 11
— » r' =	109 19	— » s =	»
	105 9	— » r =	—105 26
— » s =	98 7		105 37
— » s' =	— 98 36	— » q' =	—123 2
— » q' =	—122 4	— » p =	—130 58 .

In un'altra operazione, cominciata come la precedente aggiungendo dell'acido nitrico nella soluzione di un grosso cristallo di tartrato sodico-potassico di specie indefinita, i cristalli di bitartrato potassico che ne ho avuti sono stati di particolar configurazione che non mi ha permesso riconoscere se essi appartenessero al levo o al destro tartrato acido. La loro forma è rappresentata dalla figura 41, **a**, **b**, **c**. Con le misure goniometriche mi sono assicurato che le facce maggiori, tutte nitidissime, appartengono al rom-

bottaedro n dei tartrati acidi potassici, quantunque nei molti cristalli avuti dalla stessa soluzione, ed in essa lasciati ingrandire, non vi avessi ravvisato alcuno indizio di emiedria. Il più delle volte ho trovato più estese quattro facce n che sono nella medesima zona, come apparisce chiaro per le tre figure che li rappresentano in diverse posizioni. E negli angoli corrispondenti all'estremità dell'asse b vi sono due faccette curve ed irregolarmente ondate x, x', simili a quelle che abbiamo dinotate con le medesime lettere in altri casi precedenti, e che sono nella medesima zona con u e C. Le faccette x essendo curve danno diverse immagini degli oggetti veduti per luce riflessa, e tra queste suol esservene una più delle altre distinta, e più delle altre prossima alla immagine riflessa da u. Cercata la inclinazione della faccia u sulla faccia x, secondo la sua immagine più distinta, l'ho trovata in cinque misure prese sopra tre cristalli eguale a 163°15', 162°39', 162°29', 162°29', 162°28'. Con le altre immagini estreme meno distinte ho trovato l'inclinazione di u sopra x variare tra 158°40' e 157°58'. Egli è però che le x vanno considerate come particolare specie di faccette riferibili al simbolo 0 2 1, deducendosi da questo simbolo l'inclinazione di x sopra u eguale a 161°44'.

Cristalli di paratartrato acido ammonico metamorfizzati in levo e destro tartrato acido ammonico. Il metamorfismo dei cristalli di paratartrato acido ammonico in levo o destro tartrato acido ammonico procede come nelle specie analoghe a base di potassa, con la differenza che i cristalli di paratartrato della specie ammoniacale si solvono meno nelle soluzioni dei tartrati; e per poco di paratartrato che si trovi disciolto nel liquore, essi non patiscono sensibile diminuzione e restano integralmente inviluppati nel nuovo deposito cristallino dei tartrati. In conseguenza poi di quel che si è detto innanzi a riguardo della emiedria molto variabile nei cristalli dei tartrati acidi ammonici, avviene nei cristalli nati per metamorfismo che non hanno alcun carattere sicuro che faccia conoscere a quale specie di tartrato appartengano.

Cristalli di levo o destro tartrato acido ammonico metamorfizzati in paratartrato acido ammonico. La trasformazione dei cristalli dei tartrati acidi ammonici in paratartrato avviene in modo tutto speciale che rende difficile il seguire nei suoi particolari l'andamento del fenomeno. Circa un'ora dopo la immersione dei cristalli nella soluzione del paratartrato li ho sempre veduti ricoverti di punti prominenti che sono i novelli cristallini di paratartrato i quali vanno su di essi a depositarsi, e non lasciano più nulla vedere delle facce dei primitivi cristalli.

Dopo due o tre ore nei cristallini di paratartrato si giunge a distinguere anche ad occhio nudo la loro figura in forma di sottili lamine triangolari o rombiche secondo che apparisce il cristallo per metà o intero. A differenza poi di quel che succede per le specie a base di potassa, ove i novelli cristallini sono prominenti ed alquanto distanti l'uno dall'altro sulle facce g, n, u, fig. 1, e formano strato continuo con superficie striata sulle facce A, k, l, C, i cristallini di paratartrato acido ammonico sporgono con punte prominenti sulle facce k, l, C, allargandosi essi, più che in altra direzione, nel verso dell'asse c. Sulle facce poi g, n, u, del primiero cristallo non si produce nulla di rilevato, e queste facce si veggono rivestite di novello strato sottile con superficie continua che si vedrà in seguito appartenere alle facce h dei cristalli di paratartrato.

Intanto se si cerca estrarre dal liquore il cristallo che apparisce metamorfizzato quattro o cinque ore dopo la sua immersione, non è possibile evitare che la maggior parte dei cristallini di paratartrato si distacchino dal cristallo primitivo al quale sembravano aderire e lascino così vedere come non piccola porzione di esso siasi già disciolta. Anche lasciando passare un giorno senza toccarli, quantunque i nuovi cristallini acquistino maggior consistenza, e siano gli uni agli altri più strettamente congiunti, non si giunge ed impedire che molti di essi si distacchino spargendosi nel liquore. Bisogna attendere almeno tre giorni perchè il nuovo deposito dei cristalli di paratartrato acquisti tale consistenza che lo renda manegevole. Pervenuto a questo stato si riconoscerà che il gruppo dei nuovi cristallini forma quasi una buccia internamente vuota, essendo del tutto disciolto il cristallo sia di levo, sia di destro tartrato acido ammonico sul quale sono andati a depositarsi i cristallini di paratartrato. Questa facilità di solversi i cristalli dei tartrati quando si trasformano in paratartrato è in perfetta opposizione della quasi insolubilità dei cristalli di paratartrato nel fenomeno inverso; e la ragione di sì contraria maniera di prodursi i due fenomeni parmi che stia nell'essere il grado di solubilità dei tartrati acidi ammonici più che tre volte maggiore di quello del paratartrato. Tra i tartrati ed il paratartrato acido potassico essendovi piccolissma differenza nel loro grado di solubilità, abbiam veduto e gli uni e l'altro solversi nelle loro scambievoli trasformazioni.

Nei cristallini poi che costituiscono la nuova buccia, siccome lo mostra la figura 32, si osserva agevolmente il fatto caratteristico del metamorfismo dei cristalli polisimmetrici, che cioè le facce d'identica spe-

cie dei nuovi cristallini sono tra loro parallele. I medesimi cristallini sono talora numerosi con le estremità corrispondenti alle facce C, C' molto prominenti, come è il caso del cristallo rappresentato dalla citata figura. Altra fiata i cristallini, più presto congiungendosi insieme, sembrano meno numerosi e sono assai meno prominenti.

D'altronde, se attentamente si considerano le parti prominenti dei nuovi cristallini, si scuoprirà una importantissima condizione che rende il fenomeno assai più ammirevole di quel che poteva sembrare a primo aspetto. Dappoichè tutti i cristallini prominenti sul lato sinistro hanno superiormente le facce r, figura 32, ed inferiormente le facce q più piccole, al contrario dei cristallini prominenti sul lato destro che hanno superiormente le facce q ed inferiormente le facce r. Questa condizione acquista ancora maggiore importanza dal perchè la riferita disposizione delle faccette q ed r è propria dei soli cristalli di paratartrato nati dal metamorfismo del destro tartrato acido ammonico, quale appunto era il gruppo cristallino che ha servito di modello alla figura 32. Ed i cristallini di paratartrato che nascono dalla trasformazione dei cristalli di levo tartrato acido ammonico hanno invece le faccette q ed r inversamente allogate, trovandosi le facce r inferiormente nei cristallini ordinati sul lato sinistro, e superiormente nei cristallini del lato destro.

Se si fa progredire per molto tempo l'ingrandimento dei cristallini che costituiscono il gruppo in forma di buccia nati pel metamorfismo, sarà facile trovare qualche cristallino del lato sinistro che siasi congiunto con altro del lato destro in guisa da formare, almeno in apparenza, un solo cristallo senza potersi distinguere il limite tra la parte destra e la sinistra; e la forma che deriva da tale unione è quale vedesi figurata al numero 30, **a**, **b**. La medesima forma, tranne qualche differenza di nessun valore nella estensione delle facce della medesima specie, si otterrà allor quando distaccato dal gruppo qualche cristallino lo si faccia ingrandire isolatamente nella medesima soluzione. Più il cristallino distaccato conserverà della parte con la quale era impiantato al gruppo, meglio riuscirà distinta la forma che acquisterà dopo l'ingrandimento

Nella medesima figura 30 **a**, **b** si osservano le facce h incontrarsi con angoli diedri prominenti in entrambe le estremità opposte del cristallo, ed accompagnate dalle faccette curve e rugose x, x'; la qual cosa si è pure notata nei cristalli di paratartrato acido potassico, figura 29, **a**, **b** che nascono pel metamorfismo dei tartrati acidi della medesima base.

Ma nei cristalli del sale potassico le facce q al numero otto, e forse anche le faccette r, le ho trovate ripetersi su tutti gli angoli della faccia A e della faccia A' posteriore; mentre nei cristalli del sale ammonico le facce q ed r, quattro per ciascuna specie, si trovano soltanto negli angoli alterni della faccia A e della opposta A'. Quindi è che i cristalli gemini di paratartrato acido ammonico nati per metamorfismo hanno in tutto la forma di cristalli ortogonali emiedrici; tanto più notevoli in quanto che la loro emiedria, siccome innanzi si è dichiarato, sarà in un verso che dir potremo destrorso, figura 30, 32, se essi nascono dal destro tartrato acido ammonico, e sarà nel verso contrario, ovvero sinistrorso se nascono dal levo tartrato. Forse la differenza tra cristalli metamorfizzati del sale ammonico e quelli del sale potassico consiste soltanto nell'essere la riferita disposizione emiedrica delle facce q ed r più distinta nei primi che nei secondi; tanto più che nei cristalli di paratartrato acido potassico che abbiam veduto prodursi nelle soluzioni del levo e destro tartrato acido potassico mescolati in parti disuguali, figura 27, 28, 33, le facce p, q, r, s si trovano ubbidire più o meno rigorosamente alla medesima legge di emiedria.

Discorrendo dei cristalli rappresentati dalle figure 27, 28, 29, 35, 37 pag. 28, 32 si è dimostrato come essi sono cristalli gemini di complicatissima struttura, e gemini ancora debbono considerarsi i cristalli del sale ammoniacale che veggonsi figurati col numero 30. La vera struttura dei medesimi cristalli mi si è manifestata in modo evidente in uno esperimento nel quale ho immerso nella soluzione di paratartrato acido ammonico quantità quasi eguali dei cristalli di levo e di destro tartrato acido ammonico. Trascorsi tre giorni, mentre la loro trasformazione ha lentamente progredito in coppa chiusa, ho trovato sparsi nel fondo della coppa alquanti piccoli cristalli isolati generatisi dopo la immersione dei cristalli dei tartrati acidi, la cui forma è stata fedelmente figurata nei numeri 38 e 39. Sotto il numero 39 il cristallo è rappresentato con la faccia AA' parallela al piano di proiezione, e sotto il numero 38 con la faccia AA' perpendicolare al medesimo piano: le linee composte di trattolini segnano il confine tra il cristallo di sinistra e quello di dritta, mentre le lettere semplici dinotano le facce del primo, e le lettere con apice dinotano le facce del secondo cristallo. Tranne gli angoli diedri rientranti nei quali s'incontrano i' con f, ed f' con i, le altre facce s'incontrano o stando nel medesimo piano, come A con A', ovvero formano angoli diedri prominenti, come r con h', h con r' ed h con h'. Quindi è

chiaro come i due cristalli s'incastrano scambievolmente, e come la loro unione, soppressi gli angoli rientranti *i'f*, *f'i*, danno la medesima forma rappresentata con la figura 30, **a**, **b**.

Siccome nel gruppo gemino della figura 39 le facce *r*, *r'* si trovano a sinistra superiormente ed a destra inferiormente, egli è facile intendere che se il cristallo *CA* fosse allogato a destra, e l'altro *A'C'* a sinistra, si troverebbero le facce *r* superiormente a destra ed inferiormente a sinistra. Questa seconda varietà della scambievole posizione dei due cristalli componenti il gruppo gemino l'ho pure osservato tra i cristallini solitarii depositati nel medesimo liquore. E dietro ciò chi si è innanzi dichiarato della differenza tra i cristalli gemini di paratartrato secondo che nascano dal metamorfismo del levo o destro tartrato acido ammonico, parmi potersi conchiudere che anche le due varietà dei cristallini isolati derivino ciascuna dalla corrispondente specie di tartrato i cui cristalli sono stati esposti a trasformarsi.

Da ultimo fa d'uopo avvertire non essere frequente il caso di cristalli nei quali la disposizione delle facce sia così chiara e facile a riconoscere come nella figura 39 si scorge rappresentata. Spesso, come è naturale, un cristallo variamente si estende in confronto dell'altro, per la quale sproporzionata estensione avviene tal fiata che si smarrisce ogni guida che valga a fare intendere le scambievoli posizioni dei due cristallini. Mi è pure avvenuto che rimettendo nelle acque madri alquanti dei cristalli gemini simili a quello disegnato con la medesima figura 39, per averli più distinti giunti a maggiore grandezza, ho trovato invece, dopo alquanti giorni, uno dei due cristallini componenti il gruppo quasi del tutto scomparso, probabilmente per essere stato dall'altro di molto superato in grandezza.

Cristalli che si hanno dalle soluzioni del levo e del destrotartrato acido ammonico mescolati in varie proporzioni. Quando nelle soluzioni di ciascuna delle specie dei tartrati acidi ammonici vi è piccolissima parte, circa un centesimo, dell'altra specie, i cristalli che si producono hanno particolar forma che li fa distinguere dagli ordinarii cristalli generati nelle pure soluzioni, sia del levo sia del destro tartrato. Essi sogliono essere allargati nelle direzioni degli assi *b* e *c*, compressi nel verso dell'asse *a*, e sopra tutto notevoli perchè ciascun cristallo sembra composto di minori cristalli tutti allo stesso modo allogatti, e gli uni agli altri congiunti per le facce *A*, figura 1, e con le estremità corrispondenti alle facce *C*, *C'* che variamente si prolungano a destra ed a

sinistra. La figura 32 che rappresenta un gruppo di cristilli di paratartrato acido ammonico nati per metamorfismo, può servire a far comprendere come sono aggruppati in uno i cristallini dei tartrati acidi ammonici che si hanno dalle soluzioni in cui ad una delle due specie trovasi mescolata piccola quantità dell'altra specie. Quando ad una delle due specie ho mescolato circa il cinquantesimo dell'altra specie, ho pure avuto cristalli della specie preponderante formati di minori cristallini aggruppati, e con questo di particolare che le estremità libere dei cristallini che vanno ad allogarsi da ciascuna banda si ripiegano verso la faccia A, divergendo dalle facce C, C'. In questi cristalli aggruppati poi son di parere che si contenga un po' di paratartrato acido ammonico, perchè nelle cristallizzazioni fatte con le riferite proporzioni non ho mai ottenuto i cristalli del paratartro; e quando con la medesima soluzione ripetutamente concentrata ho dato luogo alla formazione di diversi depositi cristallini, nei successivi depositi la forma dei cristalli è divenuta man mano più semplice sino a somigliare quella dei cristalli che sogliono depositare le soluzioni di ciascuna specie pura.

Negli esperimenti fatti col mescolare in quantità diverse, non molto dispari, i due tartrati acidi ammonici, ho incontrato difficoltà grandissima ad avere i cristalli del paratartrato di forma ben definita; e la difficoltà è stata di tanto maggiore per quanto una specie soprabbondava in rapporto dell'altra. Le proporzioni adoperate nei saggi eseguiti sono state di 1 : 2, 1 : 3, 1 : 4, 1 : 10. Con quest'ultima proporzione di un gramma di levo tartrato e dieci di destro tartrato, le molte volte avendo tentato di avere cristalli dalle soluzioni portate a diverso grado di concentramento e riposte in coppe chiuse, non ho mai avuto altro che minutissimi cristalli in gran copia, alcuni solitarî, altri congiunti in piccoli gruppi raggiati. Siccome abbandonando il liquore alla spontanea evaporazione le muffe lo avrebbero guasto prima che i cristallini depositati si fossero discretamente ingranditi, ho decantato e concentrato alquanto la soluzione col bollimento, e giunta poi a circa 40°; l'ho versata sul deposito cristallino. Con questa operazione più volte ripetuta, se mi è riuscito di fare ingrandire i cristallini depositati, non ho potuto ottenere maggior nitidezza nelle loro forme, che han continuato a rimanere confuse. E soltanto dal paragonare il loro aspetto con le forme più distinte avute negli altri esperimenti, ho potuto riferirli al paratartrato acido ammonico. Ne ho avuto in seguito maggiore certezza per le nitide forme che mi han dato dopo averli disciolti a parte con acqua stillata.

Intanto questo fatto serve a provare una straordinaria difficoltà a cristallizzare che il paratartrato acido ammonico incontra quando nella sua soluzione si trova disciolto in gran copia uno dei due tartrati acidi della medesima base.

Quando nel precedente esperimento i cristalli del paratartato depositati son giunti a pesare grm. 1,674, non potendo essi per la confusione delle loro forme servire ad esaminare il metamorfismo che ne sarebbe conseguitato continuando a farli ingrandire nelle acque madri, li ho messi da banda, ed ho concentrato di circa un quarto il liquore decantato. Sottraendo dalla quantità dei sali adoperati nel principio dell'operazione grm. 1,674 di paratartrato acido ammonico, il residuo rimasto disciolto nel liquore decantato si trova esser formato di grm. 0,163 di levo tartrato, e di grm. 9,163 di destro tartrato; ovvero il primo sta al secondo nel rapporto di 1 : 56. Con questa proporzione tra le due specie di tartrati i cristalli depositati dal liquore concentrato sono stati di destro tartrato acido ammonico di forma complessa, risultando ciascun cristallo, come si è detto di sopra, di altri minori cristallini aggruppati e congiunti per le facce A, figura 1.

Per le altre mescolanze delle due specie in proporzioni meno disparate ho avuto da prima la produzione dei cristalli di paratartrato acido ammonico che, operando con le precauzioni suggerite dalla pratica, son giunto ad avere discretamente ingranditi e di forme ben difinite. Quindi, continuando il loro ingrandimento, sono giunti ad essere investiti dai cristalli dei tartrati acidi ammonici allo stesso modo che in casi simili abbiam veduto per le mescolanze dei tartrati acidi potassiei, tranne piccole differenze che non sono di alcuna importanza.

Va ricordato intanto un fatto che ho avuto occasione di osservare nel fare questi esperimenti, a riguardo della diversa maniera d'impiantarsi i cristalli di paratartrato acido ammonico secondo il variare delle mescolanze contenute nel liquore in cui essi si generano. Quando i due tartrati acidi ammonici sono mescolati in quantità eguali, e però può ritenersi disciolto il puro paratartrato, i cristalli, che talvolta si depositano aggruppati insieme, si congiungono per una delle parti corrispondenti alle estremità dell'asse b, ed il piano di divergenza passa per gli assi a e b. Se poi nella soluzione si trova eccedente uno dei due tartrati, allora i cristalli riescono bislunghi nel verso dell'asse c, assai spesso si congiungono in gruppi raggiati, ed il punto pel quale scambievolmente si attaccano corrisponde sempre ad una delle facce C, C'. Ci ha pure da consi-

derare che i cristalli di paratartrato acido ammonico essendo monoclini, allogandoli in una determinata posizione, come quella rappresentata dalla figura 6, le facce C, C' sono sempre l'una dall'altra distinte; talchè ci ha un mezzo facile di differenziare la faccia C di sinistra dalla faccia C' di dritta. Egli è poi ammirevole non essere indifferentemente all' una o all' altra delle facce C, C' che corrisponde il punto pel quale i cristalli s'impiantano. Nei cristalli depositati con le mescolanze delle due specie dei tartrati nel rapporto di 1 : 2 e di 1 : 3, avendoli ottenuti con faccette nitide per poter definire le loro forme con misure goniometriche, mi sono assicurato che quando nella soluzione del paratartrato si conteneva altresì il levo tartrato i cristalli s'inpiantavano e si congiungevano per la faccia sinistra C; ed al contrario soprabbondando il destro tartrato i cristalli s'impiantavano per la faccia C' del lato destro.

Negli esperimenti eseguiti per trasformare i cristalli dei tartrati acidi ammonici in cristalli di paratartrato, avendo immerso nella soluzione del paratartrato sì quelli del levo che del destro tartrato, si è veduto, pag. 35, come questi restino disciolti, e quali particolari forme di cristalli gemini appartenenti al paratartrato acido ammonico si generino. In tal caso non avendo curato tener conto del peso rispettivo dei cristalli immersi, ha dovuto avvenire che uno dei due tartrati siasi trovato disciolto in quantità maggiore dell'altro. Avendo di più voluto sperimentare come proceda nella medesima soluzione l'ingrandimento dei cristalli non geminati di paratartrato acido ammonico, ne ho immersi alcuni della forma disegnata nella figura 33, e questi, trascorsi sette giorni, li ho trovati, come si scorge nella figura 34, con le facce del lato sinistro divenute convesse e rugose ed assai diverse da quelle del lato destro. Questa specie di emiedria non dubito punto che vada connessa col fatto innanzi detto dell' impiantarsi i cristalli in date condizioni costantemente con una faccia C determinata. Anzi considero il fatto dell' impiantarsi i cristalli con la faccia C di sinistra e non con la faccia C' di dritta, o viceversa, come una vera emidria. Quindi è da ritenere che i cristalli monoclini di paratartrato acido ammonico generati in soluzioni di puro paratartrato non siano emiedrici; generati in soluzione che contenga disciolto il levo tartrato unito al paratartrato siano emiedrici in un senso; e finalmente generati in soluzione col destro tartrato siano emiedrici in senso opposto.

Considerazioni intorno alla polisimmetria dei tartrati acidi e del paratartrato acido di potassa o di ammonio. Dalle cose fin quì espo-

ste sopra i tartrati e paratartrati acidi di potassa e di ammonio emergono spontanee diverse considerazioni e sull'indole della loro chimica composizione, ed a riguardo dei loro caratteri cristallografici. Sotto entrambi questi rapporti tra i levo tartrati ed i destro tartrati apparisce maggior differenza di quella che per le precedenti conoscenze si poteva argomentare, ed al contrario i paratartrati si trovano più ravvicinati ai levo e destro tartrati.

La differenza cristallografica tra i tartrati ed i paratartrati che si è dimostrato non esser altro che un fenomeno di polisimmetria, come la differenza tra i levo ed i destro tartrati; il metamorfismo che in tutti i casi si è trovato avvenire con la medesima facilità, e con i medesimi particolari sia tra i levo tartrati ed i destro tartrati, sia tra i paratartrati e ciascuna specie di tartrato, lasciano intravedere che tra i tartrati ed i paratartrati vi possa essere quella stessa analogia di aggregazione molecolare che intercede tra i levo ed i destro tartrati, o in altri termini che tra i levo e destro tartrati vi possa essere quella medesima differenza che passa tra un paratartrato e ciascuna specie di tartrato. D'altra parte il fatto che l'acido paratartrico si genera dall'unione in parti eguali degli acidi levo e destro tartarico, e può novellamente scindersi nelle due specie di acidi che lo hanno prodotto, guida alla naturale conseguenza che nella sua costituzione molecolare si trovino combinati due gruppi di molecole, e che però in esso vi sia un ordine di composizione chimica ben diverso da quello di ciascun acido tartarico. Dopo aver preso nota delle conclusioni in certo modo contradittorie che si hanno da una parte per i riferiti esperimenti cristallografici, e dalla parte opposta per il fatto della genesi dell'acido paratartrico, non tenterò di conciliarle insieme, temendo di far cosa vana per la ignoranza in cui siamo dell'intima costituzione molecolare di qualsivoglia corpo.

Uno dei fatti che reputo meritare particolar considerazione nei cristalli dei tartrati è la loro emiedria; e non è senza interesse il cercare qual sia l'importanza, quale il valore che dobbiamo attribuire a questo carattere. Nel 1855 (1) ho pubblicato alcune ricerche sperimentali intorno alla emiedria per le quali ho conchiuso che moltissime specie di cristalli, e forse tutte, in particolari condizioni sono capaci di emiedria; che le principali cagioni che fanno comparire o scomparire la emiedria, o anche fanno cambiare il genere di emiedria, sono *il tempo più o meno rapido con cui si*

(1) Ricerche intorno ai cristalli emiedrici per A. Scacchi. *Nuovo Cimento*, aprile 1855.

esegue l'accozzamento delle molecole, e la presenza delle sostanze eterogenee nelle soluzioni in cui si producono i cristalli. Secondo queste deduzioni l'emiedria non sarebbe un fatto di gran valore per dinotarci una particolare maniera di composizione chimica dei cristalli, non essendo inerente alla loro natura, ma derivando dalle condizioni nelle quali gli stessi cristalli si sono formati. Intanto per i tartrati l'emiedria sembra un fatto di altra natura, essa potrebbe reputarsi un carattere inerente alla loro chimica composizione, e riguardarsi come un fenomeno molto affine alla polisimmetria, ove si consideri ch'essa si manifesta in un senso per i levo tartrati ed in un senso opposto per i destro tartrati, e che con la trasformazione scambievole delle due specie di tartrati si muta l'emiedria nella modesima guisa che per la trasformazione scambievole dei tartrati e dei paratartrati si muta ciò che dicesi sistema di cristallizzazione.

Se ben si consideri la differenza di un cristallo di levo tartrato posto a riscontro con un altro di destro tartrato, si ha per le loro forme che essi sono terminati dalle stesse facce, con gli angoli diedri della medesima specie nell'uno e nell'altro esattamente eguali, e soltanto diversi per il senso della loro emiedria. Si ha poi per altre loro qualità una importante e costante differenza nel carattere delle loro soluzioni che deviano a dritta o a sinistra il piano di polarizzazione della luce secondo che appartengono all'una o all'altra specie di tartrato; ed un'altra differenza ancor essa molto notevole si è innanzi mostrata, pag. 7, per la solubilità dei cristalli di una specie nelle soluzioni sature dell'altra specie di tartrato. Quindi è che il carattere della loro diversa emiedria che troviamo convenire puntualmente con queste altre differenze sembra essere una qualità derivante dalla diversa costituzione molecolare di ciascuna specie di tartrato, non altrimenti che il diverso rapporto delle lunghezze degli assi cristallografici, e le diverse inclinazioni dei medesimi assi dipendono dalla composizione chimica di ciascuna sostanza.

Nondimeno per i risultamenti di altre esperienze si ha che la riferita importanza della emiedria e lo stretto suo legame con la composizione dei cristalli potrebbe essere piuttosto appariscente che reale. Non ricorderò la mutabilità della emiedria del bitartrato ammonico ordinario, pag. 9 e seguenti, non essendomi riuscito trovare la cagione che la produca; ma due altri fatti precedentemente menzionati dimostrano che la emiedria dei tartrati può invertirsi, e che le soluzioni dei tartrati hanno una maravigliosa virtù di rendere emiedrici anche i cristalli dei paratartrati. Si è veduto, pag. 12, che i cristalli dei tartrati acidi ammonici ge-

*

nerati nelle soluzioni che contengono il citrato sodico presentano il carattere della emiedrica invertito senza essersi nulla mutato della propria natura dei cristalli; i quali se s'immergono in una soluzione pura della specie di tartrato acido ammonico identica a quella dei cristalli, con l'ingrandirsi dei medesimi, si cambia in essi il senso della emiedria, restituendosi alla condizione normale. Si è pure veduto, pag. 41, che i cristalli di paratartrato acido ammonico, che non sono di loro natura emiedrici, diventano emiedrici nelle soluzioni dei tartrati acidi ammonici, e presentano l'una o l'altra delle due contrarie emiedrie secondo che nel liquore sia disciolto il levo o il destro tartrato. A questi due fatti potrei anche aggiungere il fenomeno di emiedria che in taluni casi si manifesta nei cristalli gemini dei paratartrati, pag. 28 e 36, ancor essa in senso variabile secondo la specie più abbondante di tartrato disciolto nel liquore. Egli è poi facile intendere come per i ricordati fatti l'emiedria dei cristalli dei tartrati potrebbe ancor essa non essere qualità inerente alla loro propria natura, ma essere invece effetto della virtù che ha di agire sopra i cristalli la soluzione nella quale essi si producono e s'ingrandiscono.

Se non vi fossero altri fatti da opporre a questi ora menzionati, ne seguirebbe che l'emiedria dei cristalli dei tartrati sarebbe un fenomeno accidentale da non compararsi al diverso tipo di forma delle sostanze polisimmetriche; che tra i levo ed i destro tartrati intercederebbe una differenza analoga a quella che si rinviene tra i due modi di essere delle sostanze polisimmetriche senza che tal differenza influisca sulla forma dei cristalli; che in fine le soluzioni dei levo tartrati e dei destro tartrati avessero, oltre la virtù di far deviare il piano di polarizzazione della luce a sinistra o a destra, anche l'altra di produrre nei cristalli che in esse si formano una emiedria sinistrorsa o destrorsa.

Queste deduzioni poi sono contraddette dal fatto già noto che nelle soluzioni di paratartrato sodico-ammonico, o sodico-potassico, si producono ad un tempo i cristalli dei corrispondenti levo tartrati e destro tartrati gli uni con emiedria contraria a quella degli altri. Se la emiedria non fosse qualità propria dei cristalli, e derivasse da particolare maniera di agire delle soluzioni, è manifesto che in questo caso i cristalli non dovrebbero essere emiedrici.

Esposte le contrarie conclusioni alle quali si perviene per i fatti sino al presente conosciuti intorno alla importanza del carattere della emiedria nei cristalli dei tartrati, stimo non potersi per ora affermare quale di esse all'altra prevalga.

Darò termine a queste considerazioni ritornando sul fatto che i cristallini dei paratartrati acidi di potassa e di ammonio che nascono pel metamorfismo dei corrispondenti tartrati sono sempre gemini, pag. 24. I cristalli dei medesimi paratartrati che si hanno con i metodi ordinari dalle loro soluzioni pure, assai di raro sono gemini, talchè questa invariabile condizione dei cristalli che nascono per metamorfismo deve reputarsi provvenire da una particolare influenza che esercitano i cristalli dei tartrati sulle molecole de' paratartrati, obbligandole a seguire la legge della geminazione. Tale influenza potrebbe attribuirsi alla soluzione del tartrato, perchè si è veduto come la parte superficiale dei cristalli dei tartrati immersi nelle soluzioni dei paratartrati si solve; e però il liquore che circonda i cristalli immersi, e nel quale si generano i novelli cristallini del paratartrato, contiene sempre disciolto un po' di tartrato. Nondimeno reputo la causa della geminazione emanare dei cristalli del tartrato, dappoichè certamente da questi deriva l'altro fatto, intimamente connesso alla geminazione, che i cristallini gemini del paratartrato sono sempre impiantati sul cristallo del tartrato per la parte ove s'incontrano con angolo diedro rientrante le facce h, h', fig. 12, o, ciò che vale lo stesso, per la parte ove s'incontrano con angolo prominente le facce β, β'.

Quanto al rinvenirsi i cristalli semplici o geminati, sia nelle produzioni naturali come nelle artificiali, possiamo stabilire tre casi principali.

1° Sostanze i cui cristalli non si conoscono altrimenti che semplici (leucite, solfato di magnesia).

2° Sostanze i cui cristalli si producono nelle medesime condizioni e semplici e geminati ad un tempo (solfato potassico, nitrato di stronziana).

3° Sostanze i cui cristalli in talune condizioni son tutti semplici, in altre condizioni son tutti gemini, e tutti con la medesima specie di geminazione se la sostanza si gemina in diverse maniere (calcite, fluorina).

Quest'ultimo caso è di tutti il più notevole, e sarebbe maggiore la sua importanza per le investigazioni cristallografiche se potessimo determinare le condizioni particolari nelle quali si generano cristalli ora semplici ed ora gemini, e quando con l'una o con l'altra maniera di geminazione. Ma nelle produzioni artificiali, per le quali ci è dato conoscere e regolare a nostro piacimento le condizioni in cui si generano i cristalli, tranne il riferito esempio dei cristalli di paratartrato acido potassico o ammonico nati per metamorfismo, non mi sono imbattuto in altra sostanza per la quale mi fosse riuscito avere cristalli semplici o geminati in condizioni ben definite. E soltanto potrei recare diversi esepii nei quali

più o men chiaramente mi è avvenuto osservare essere più frequente e più facile la comparsa dei cristalli semplici nelle lente cristallizzazioni, ed al contrario nelle cristallizzazioni rapide aversi maggior copia di cristalli gemini.

Finalmente quanto alla posizione relativa dei cristalli dei paratartrati e dei tartrati nel loro scambievole metamorfismo, importa notare le tre seguenti condizioni: 1ª che l'asse della zona *AC*, fig. 6-9, dei primi coincide con l'asse della zona *AC*, fig. 1-5, dei secondi; 2ª che tutti gli spigoli dei primi sono rispettivamente paralleli agli spigoli dei secondi nelle zone in cui si trova compresa la faccia *A*; 3ª e che gli spigoli dei primi non son paralleli agli spigoli dei secondi nelle zone in cui si trova compresa la faccia *C*, a meno che non vi sia pure compresa la faccia *A*.

Confronto tra i cristalli del paratartrato acido di soda e dei tartrati acidi di soda. Nella precedente memoria sulla polisimmetria ho mostrato che i cristalli di paratartrato acido di soda sono polisimmetrici, riferendosi le loro forme quando al sistema triclinoedrico e quando all'ortogonale; ed in quest'ultimo caso sono dotati di tale emiedria che potrebbero ancora considerarsi come cristalli monoclini. Nella figura 15 è rappresentato un cristallo triclino con la faccia β parallela al piano di proiezione, e nella figura 16 lo stesso cristallo è rappresentato con le facce C, u, v, x, β perpendicolari al piano di proiezione. Dell'altra specie la forma è figurata sotto il numero 17, anche con le facce C, u, v, x, β perpendicolari al piano di proiezione. Essendovi clivaggio nitidissimo parallelo alle facce *C* di entrambe le due specie di forme, riterremo che le medesime facce siano identiche in entrambe, e potranno servire come punto di partenza nel definire l'analogia delle diverse facce che sono nell'una e nell'altra forma. L'analogia poi tra le facce contrassegnate dalle medesime lettere nei cristalli triclini ed ortogonali è dimostrata dall'avere esse negli uni e negli altri eguali inclinazioni sopra *C* (1), tranne le piccole differenze che sono inferiori a quelle che di necessità si rinvengono nelle misure goniometriche delle facce che sono di loro natura più dell'ordinario poliedriche. Paragonando poi le facce α e λ dei cristalli triclini con le facce *A*, *l*, *n* dei cristalli ortogonali, non è possibile stabilire alcuna analogia tra le prime e qualcuna delle seconde. Lo spigolo *Cu* dei cristalli triclini è inclinato allo spigolo $C\alpha$ di 112°59′; nei cristalli ortogonali lo spigolo *Cu* è inclinato sullo spigolo *Cl* di 90°0′, e sullo

(1) Veggasi il quadro che verrà in seguito.

spigolo Cn, supponendo la faccia n prolungata, di 140°42′. Gli angoli formati da questi spigoli danno la misura delle inclinazioni dei piani delle zone $C\alpha\lambda$, ClA, Cn sul piano della zona $Cux\beta v$, comune ai due tipi di forme, e la grande differenza nei riferiti valori angolari esclude ogni analogia.

Ho ricercato pure se allogando la faccia α o λ dei cristalli triclini nei cristalli ortogonali inclinate sopra C e sopra u come le sono sopra le analoghe facce dei cristalli ticlini, esse incontrassero gli assi ortogonali a, b, c a tali proporzionali distanze da soddisfare alle leggi cristallografiche. E ritenendo l'asse a eguale all'unità, ho trovato:

per la faccia α. . . . . $a:b:c=1:2,3578:1,1847$
per la faccia λ. . . . . $a:b:c=1:2,3578:7,9548$
per la faccia n dei cristalli ortogonali . . . $a:b:c=1:1,6830:2,9859$

Come si scorge dal riferito rapporto tra gli assi b e c delle facce α e λ con gli assi b e c della faccia n, esso è tanto lontano dalle semplici proporzioni degli assi cristallografici per le facce di un medesimo cristallo che esclude la possibilità di trovarsi mai α e λ unite ad n.

Nella citata memoria si è dichiarato altresì che nessuna delle due specie di cristalli del paratartrato acido di soda si trasforma nell'altra; almeno non si è riuscito con alcun mezzo ad ottenerne la trasformazione diretta. Questo fatto non esclude dal novero delle sostanze polisimmetriche il paratartrato acido di soda; dappoichè la cagione del prodursi l'uno o l'altro tipo di forma non dipende da alcuna differenza nella composizione chimica della soluzione nella quale si genera ciascuna specie dei suoi cristalli. Egli è però che non si ha il mezzo sicuro di trasformare i cristalli di una specie mettendoli nelle condizioni che dànno origine all'altra specie. La cagione, se non unica almeno principale, per la quale si ottengono ora cristalli triclini ed ora cristalli ortogonali dalle soluzioni del paratartrato acido di soda, consiste nel prodursi i cristalli con maggiore o minore rapidità; cagione affatto identica a quella per cui i cristalli di bitartrato di stronziana con quattro proporzionali di acqua sono talfiata triclini ed altre volte monoclini. Intanto si è veduto (1) che i cristalli triclini del bitartrato di stronziana si metamorfizzano spontaneamente anche fuori le soluzioni generatrici in cristalli monoclini, e non

(1) Della polisimmetria dei cristalli per A. Scacchi, pag. 89 e seg.

mai questi si trasformano in quelli. Quanto poi al paratartrato acido di soda si è pure veduto (1) che stando nella medesima soluzione i cristalli triclini generati in principio ed i cristalli ortogonali sopraggiunti in seguito, in progresso di tempo, mentre i secondi continuano ad ingrandirsi, i primi si solvono, e saturando col loro disfarsi la soluzione, favoriscono l'ingrandimento dei cristalli ortogonali. È questo il solo mezzo indiretto, e di non facile riuscita, per trasformare i cristalli del paratartrato acido di soda del tipo triclino in cristalli del tipo ortogonale; ed in nessun modo per gli esperimenti sino al presente eseguiti, si è giunto ad ottenere la trasformazione inversa.

Egli è però che le sostanze polisimmetriche, guardate dal lato della scambievole trasformazione dei cristalli di tipo diverso, offrono due casi ben distinti. Nel primo caso si trovano quelle sostanze per le quali il diverso tipo di forma cristallina deriva dalla composizione chimica della soluzione in cui si generano i cristalli; e potendo a nostro piacere far variare tale composizione, possiamo pure ottenere quella specie di forma che vogliamo, e la diretta trasformazione scambievole tra i cristalli che hanno diverso tipo di forma. In questo stesso caso si ha che i cristalli estratti dalle acque madri, o lasciati in soluzioni la cui composizione chimica non va soggetta a variare, sono del tutto stabili ed incapaci di metamorfismo spontaneo. Questa è la condizione del solfato potassico e del feldispato (ortosa ed albite) esaminati nella precedente memoria, come pure dei tartrati acidi e del paratartrato acido di potassa o di ammonio, sia che i levo tartrati si paragonino con i destro tartrati, sia che gli uni e gli altri si paragonino con i paratartrati.

Nel secondo caso sono quelle sostanze per le quali il prodursi l'uno o l'altro tipo di forma provviene dalla maggiore o minore celerità con cui si producono i cristalli. Quindi è che possiamo a nostro piacimento, come nel precedente caso, ottenere l'una o l'altra specie di forma, ma non è in nostro potere di variare queste condizioni in modo da applicarle efficacemente alla scambievole trasformazione dei cristalli di diverso tipo. In questo caso poi abbiamo che i cristalli generati con maggiore celerità non sono stabili, val quanto dire che sono capaci di trasformarsi spontaneamente nell'altra specie di più lenta generazione. Il tartrato acido di stronziana con $4HO$, ed il paratartrato acido di soda sono tra gli esempii di tal maniera di polisimmetria, ma con differenze di qualche importanza.

(1) La medesima opera, pag. 104.

Dappoichè nei cristalli del tartrato acido di stronziana la spontanea trasformazione si ottiene assai facilmente, sia dopo averli estratti dalle acque madri, sia nelle stesse acque madri senza che in esse intervenga alcun mutamento per la loro chimica composizione. Nel paratartrato acido di soda al contrario i cristalli triclini di più rapida formazione, se sono meno stabili dei cristalli ortogonali, la differenza non è così rilevante come nel sale di stronziana; e si riduce al solo fatto che stando riunite le due specie di cristalli nelle acque madri, in favorevoli condizioni, i cristalli triclini prima generati si solvono, mentre i cristalli ortogonali dal loro disfarsi ricevono gli elementi che servono ad ingrandirli. Tale essendo la piccola differenza di stabilità tra i cristalli di diverso tipo del paratartrato acido di soda, ne conseguita il difetto di opportune condizioni perchè la specie più stabile si potesse ottenere per diretta trasformazione dell'altra specie, e quindi verificarsi la legge del parallellismo delle facce analoghe dei cristalli di tipo diverso.

Dopo la pubblicazione della prima memoria sulla polisimmetria, ritenendo possibile la spontanea trasformazione dei cristalli triclini del paratartrato acido di soda in condizioni più favorevoli di quelle che si hanno nell'ordinaria maniera di conservare i cristalli, ho tentato la pruova con qualche esperimento diretto a mantenere i cristalli triclini in un'atmosfera umida e più calda di quel che suol essere nella stagione estiva. Alla temperatura di circa 80° per molte ore sostenuta i cristalli non han patito cambiamento sensibile, ed anche variando l'esperimento in modi diversi non mi è riuscito osservare in essi alcun segno di metamorfismo.

Passando ora al paragone tra i cristalli di paratartrato acido di soda con quelli di levo o destro tartrato acido della medesima base, l'analogia che avremmo dovuto attenderci di trovare dietro l'esempio degli altri tartrati paragonati con i paratartrati d'identica composizione chimica, è limitata a leggieri somiglianze le quali lasciano dubitare che vi sia alcuna analogia. Nelle figure 13 e 14 ho rappresentato due varietà dei cristalli di destro tartrato acido di soda, ovvero del bitartrato di soda ordinario. In essi vi è clivaggio distinto parallelo alla faccia *C* come per entrambi i tipi dei cristalli del paratartrato rappresentati nelle figure 15, 16, 17. Vi son pure le facce **u**, **v**, **x**, fig. 13, disposte come le facce *u*, *v*, *x*, fig. 16, 17; e la faccia **o**, fig. 13, disposta come la faccia *l*, fig. 17. Nondimeno le inclinazioni sopra *C* delle facce dei cristalli del bitartrato non sono tanto prossime a quelle delle facce indicate con le medesime lettere nei cristalli del paratartrato da poter conchiudere l'analogia delle

prime con le seconde. Ciò apparirà chiaramente per le misure goniometriche riportate nel quadro qui aggiunto:

	Paratartrato acido di soda		Tartrato acido di soda
	TRICLINO *fig. 15, 16*	ORTOGONALE *fig. 17*	*fig. 13, 14*
C sopra **u** =			148°34′
C » *u* =	143° 1′	142°44′	
C » *v* =	132 15	133 12	
C » **v** =			129 18
C » *x* =	118 42	119 24	
C » **x** =			112 15
C » *β* =	103 7	105 44	
C » *y* =		100 38	
C » *l* =		135 8 [(a)]	
C » **o** =			123 49
C » **n** =			117 24
C » *n* =		106 3	

Dalle precedenti misure non possiamo ritener dimostrata tra i cristalli del tartrato e del paratartrato quell'analogia ch'è propria delle forme di diverso tipo delle sostanze polisimmetriche; talchè ho stimato dovermi assicurare se realmente avessero la medesima composizione elementare. Avendo quindi determinato la quantità di soda contenuta in 100 parti di ciascuna specie, ho trovato pel bitartrato 16, 15; pel paratartrato acido triclino 16,29 e pel paratartrato acido ortogonale 16,23. Secondo la formola $C^8H^5NaO^{12},2HO$ la quantità della soda sarebbe 16,30 per 100, e però non cade dubbio sulla identica quantità di acqua contenuta nelle tre specie di cristalli analizzate.

Difficili poi, e per nulla concludenti sono riusciti i tentativi fatti per metamorfizzare i cristalli del destro tartrato in paratartrato, o per otte-

(a) Nella precedente memoria sulla polisimmetria, pag. 98, ho ritenuto l'inclinazione di *l* sopra *C* = 132′ 37′ che non si allontanava di molto dalla inclinazione rinvenuta con le misure dirette; ed in conseguenza di questa inclinazione ho adottato per la faccia *l* il simbolo alquanto complesso 4 0 11. Da recenti misure sopra cristalli più nitidi avendo avuto l'angolo che misura l'inclinazione di *l* sopra *C* prossimo a 135°, ho adottato per *l* il simbolo assai più semplice 1 0 3 dal quale si deduce il medesimo angolo = 135°8′.

nere il fenomeno inverso. Mi astengo quindi dall'esporre gli esperimenti fatti, dai quali debbo conchiudere di non conoscere ancora le vere relazioni cristallografiche dei tartrati acidi di soda.

PARTE II.

Considerazioni sul polimorfismo.

Nella prima memoria sulla polisimmetria si trovano esposti alcuni esperimenti sul polimorfismo del solfato di nichelio con sei proporzionali di acqua, pag. 105 e seguenti, e da questi esperimenti si deduce che i due fenomeni che ho distinto con i nomi di polissimmetria e di polimorfismo sono talvolta prodotti da analoghe cagioni.

Da una parte questa condizione che il polimorfismo non riconosce cagioni affatto distinte da quelle che producono la polisimmetria, e da un'altra parte la chimica composizione supposta identica nei cristalli polimorfi, mi han fatto supporre almeno la possibilità che tra le forme dei cristalli di tipo diverso delle sostanze polimorfe vi fosse un certo rapporto più complicato di quello che presentano i cristalli delle specie polisimmetriche. Egli è poi chiaro che il rapporto da me cercato non poteva esser quello ammesso da Pasteur nei cristalli dimorfi e da me stesso reputato più illusorio che reale quando ho stabilito la differenza tra il polimorfismo e la polisimmetria. Quindi ho continuato a studiare questo argomento per meglio approfondirlo, ed ho stimato estendere le mie ricerche a quelle sostanze che per analogia di composizione dovremmo attenderci di rinvenirle isomorfe, e che pure si presentano dimorfe. Intanto per le nuove indagini che sono l'argomento di questa seconda parte della presente memoria ho acquistato opinione ben diversa da quella fin ora adottata sul dimorfismo; ed a dirla in breve ora son di avviso che le sostanze dimorfe nei cristalli di diverso sistema non abbiano la medesima composizione chimica, e che però non vi sia vero dimorfismo; o almeno la parola dimorfismo serve ad esprimere il diverso sistema di cristallizzazione tra le sostanze che per le chimiche analisi si mostrano identicamente composte e non tra quelle che abbiano realmente composizione in tutto identica.

I solfati che hanno per base un ossido del gruppo della magnesia ho

reputato offrirmi una serie di composti opportuna ad essere studiata sotto questo rapporto. Abbiamo di fatto tre specie, i solfati di magnesia, di zinco e di nichelio con sette proporzionali di acqua le cui forme cristalline sono trimetriche ortogonali; e tre altre specie, i solfati di ferro, di manganese e di cobalto, ancor essi con sette proporzionali di acqua, ma con cristalli monoclini. Per questi solfati è d'uopo aver presente che si hanno in essi la riferita quantità di acqua, e quindi le riferite forme cristalline, quando le loro soluzioni sono neutre o poco acide, e quando la temperatura del liquore cristallizzante non oltrepassa di molto i trenta gradi. Dappoichè elevandosi il grado di calore, o soprabbondando nel liquore l'acido solforico, per ragioni assai facili ad intendere, si hanno cristallizzati i solfati delle medesime basi con minori proporzioni di acqua e che non sono più comparabili con i precedenti. Il solfato di manganese è pure notevole in paragone degli altri in quanto che per esso la temperie di nove o al più dieci gradi sopra zero basta per impedire la produzione dei cristalli con sette equivalenti di acqua; ed i cristalli monoclini già ottenuti al di sotto di dieci gradi, posti all'asciutto a temperature di poco superiori, abbandonano porzione di acqua e, senza dar segno di fatescenza, si trasformano in gruppi di minuti cristalli triclini con cinque proporzionali di acqua. Di questi particolari del solfato di manganese si vedrà la importanza quando saremo ai solfati nella composizione dei quali si mescolano due ossidi che separatamente danno sali con forme cristalline tra loro diverse.

Anche più del solfato di manganese è importante la condizione del solfato di rame, dappoichè l'ossido di rame ha pure grande analogia con le basi dei solfati innanzi menzionati; e bastano a mostrarla l'isomorfismo tra il solfato di rame e quello di manganese, entrambi con cinque proporzionali di acqua, e l'isomorfismo dei solfati doppî che tutti i solfati degli ossidi precedenti, compreso il solfato di rame, formano col solfato di ammonio. Intanto il solfato di rame, purchè sia puro, non dà mai cristalli con sette proporzionali di acqua. E siccome le temperature più basse sono quelle che favoriscono la produzione delle specie con maggiori proporzioni di acqua, ho tentato, senza potervi riuscire, di ottenere il solfato di rame con sette equivalenti di acqua facendolo cristallizzare alla temperie di sei gradi sotto zero.

In questo esperimento ho adoperato una soluzione del sale di rame nella quale si erano generati alquanti cristalli mentre la temperatura dell'ambiente era di circa 23°. Situato in una mescolanza di neve e sale

il cristallizzatoio con la soluzione decantata, quando il termometro in esso immerso ha segnato undici gradi sopra zero, sono apparsi i primi cristalli assai minuti dell'ordinaria forma del solfato di rame. Giunto il raffreddamento a circa tre gradi sotto zero, ho tuffato nel liquore alquanti fili di cotone per esser sicuro che i cristalli su di essi aderenti, nel caso se ne fossero attaccati, non potevano esser generati prima che si fosse raggiunto questo abbassamento di temperatura. Il termometro ha continuato a segnare progressivo raffreddamento sino a — 6°, e dopo essere stato quasi stazionario per pochi minuti, son venuti a galla dal fondo della coppa molti fiocchetti di neve con qualche cristallino del sale di rame in essi impigliato: In meno di un minuto dopo la prima apparizione dei fiocchetti la temperatura è salita e si è arrestata a — 2°, 8. Quindi ho stimato inutile continuare l'esperienza con temperature più basse per l'impedimento alla cristallizzazione del sale di rame derivante dalla congelazione del liquore; e soltanto ho continuato per circa due ore a rinnovare la medesima mescolanza di neve e sale per dar tempo all'ingrandimento dei cristalli già cominciati a depositarsi. In queste due ore il termometro si è abbassato alquanto arrestandosi a — 3°, 2, i fiocchi che ingombravano il liquore si sono in parte dileguati; e mentre aderente alle interne pareti laterali della coppa si è formata una fitta crosta di neve fibbrosa di circa 10 millimetri, nel mezzo sino al fondo della medesima coppa la soluzione è rimasta limpida, talchè ho potuto distiguere il progressivo ingrandimento dei cristalli depositati in fondo o aderenti ai fili di cotone immersi nel liquore. La forma poi di questi cristalli ho trovato esser quella stessa del solfato di rame con cinque proporzionali di acqua. Quindi per questo saggio mi sono persuaso che il solfato di rame sia incapace di cristallizzare con sette proporzionali di acqua, almeno sino alla temperie di — 6°, e che a temperature più basse sia assai malagevole o forse impossibile di fare l'esperimento.

Nella figura 42 ho rappresentato la forma più frequente dei cristalli ortogonali dei solfati che hanno per base la magnesia, lo zinco, od il nichelio, e nell'altra figura 43 è disegnata la forma monoclina propria degli altri solfati che hanno per base il ferro, il cobaldo o il manganese. Nel quadro seguente si leggono gli angoli che misurano le inclinazioni delle facce di ciascuna specie di cristallo secondo la diversa specie di ossido metallico che entra nella sua chimica composizione.

Fig. 12

	MgO	ZnO	NiO
o sopra o' =	120° 4′	120° 6′	120°29′
u » u' =	89 24	89 38	88 44
n » u =	129 3	129 5	128 38
n » n' =	126 46	126 52	126 58
n' » n'' =	52 36	52 45	51 49

Fig. 13

	FeO	CoO	MnO
A sopra B =	118° 1′	118° 8′	118°12′
A » m =	119 3	118 51	119 10
A » e =	105 45	105 4	106 47
A » u =	105 9	105 21	104 43
A » k =	115 35	115 40	115 12
B » f =	159 7	159 24	158 30
B » u =	123 41	124 8	122 31
B » k =	101 47	101 47	101 36
B » m =	119 3	118 51	119 10
e » m =	123 56	124 1	123 23
e » k =	96 44	96 28	97 4
e » u =	66 23	66 51	67 39
C » m =	138 54	138 45	139 34

Confrontando le misure goniometriche dei cristalli prismatici dei solfati di magnesia, di zinco e di nichelio con quelle dei cristalli monoclini dei solfati di ferro, di manganese e di cobalto, è facile persuadersi non esservi alcuna analogia tra le facce dei due diversi sistemi di forme; e che però essi costituiscano un distinto esempio di dimorfismo. Assicurato questo fatto, esso stesso ci mostra che quanto alla cagione del dimorfismo nel presente caso contribuisce in modo quasi esclusivo la natura chimica di ciascun ossido che tien luogo di base. Per osservazioni precedenti, ed in particolare per le ricerche fatte da Rammelsberg (a), è pure dimostrato che nei cristalli di ciascun sistema vi possono prender parte gli ossidi che separatamente danno cristalli dell'altro sistema. La quantità relativa di ciascuno dei due ossidi è variabile, e dipende da due

(a) Handbuch der Krystallographischen Chemie von C. F. Rammelsberg. *Berlin 1855*, pag. 107.

principali condizioni; dalla quantità relativa del solfato ortoganale e del solfato monoclino contenuti nella soluzione, e dal grado di solubilità dei medesimi solfati. In queste mescolanze poi il fatto più notevole, e che meno era da attendersi, ce lo presentano alcuni solfati monoclini nei quali talvolta prevale in proporzioni atomiche il solfato che isolatamente dà cristalli ortogonali.

D'altra parte sono ammirevoli le mescolanze del solfato di rame con uno dei solfati di magnesia, di zinco e di nichelio che da se soli danno cristalli ortogonali. In ciascuno di questi casi si hanno cristalli monoclini isomorfi col solfato ferroso, nei quali si rinviene pure variabile la proporzione tra il solfato di rame ed uno degli altri solfati, e la quantità atomica degli ultimi è d'ordinario molto maggiore di quella del solfato di rame. Intanto questi cristalli monoclini derivano dall'unione di due sali ciascuno dei quali isolatamente non dà mai cristalli monoclini. Condizione molto importante la quale ci rivela l'unione dei due solfati non essere una semplice mescolanza, siccome per le variabili loro proporzioni sembra doversi inferire; ma essere invece una chimica combinazione di due specie di sali. E favorisce maggiormente questa maniera d'intendere la loro composizione il fatto del solfato di rame puro che anche a temperature inferiori a zero non dà mai cristalli che abbiano più di cinque proporzionali di acqua, mentre il solfato di rame che fa parte dei menzionati cristalli monoclini, facili ad ottenersi anche a temperature maggiori di 20° sopra zero, contiene come il solfato ferroso sette proporzionali di acqua.

Egli è poi chiaro che se i cristalli monoclini formati dal solfato di rame con uno dei solfati che danno forme cristalline ortogonali, vanno considerati come chimiche combinazioni di due specie di solfati, gli altri cristalli monoclini formati soltanto dai solfati di ferro, di manganese o di cobalto, per l'analogia di composizione dimostrata dall'isomorfismo, dovranno ancor essi riguardarsi come composti da due specie di solfati.

Queste deduzioni sarebbero abbastanza sicure, se non fosse il variare delle proporzioni tra le basi dei cristalli monoclini che nascono dall'unione del solfato di rame con i solfati di magnesia, di zinco o di nichelio; dappoichè la costante proporzione dei componenti è carattere distintivo delle chimiche combinazioni. Nondimeno credo facile dare una spiegazione del fenomeno secondo la quale la riferita variabilità di proporzioni non sarebbe che apparente, e nel medesimo tempo tutti i casi di dimorfismo sarebbero conseguenza del diverso tipo di chimica composizione.

La spiegazione che propongo è fondata sulla proprietà già riconosciuta in molti corpi, siano semplici siano composti, di poter subire diverse modificazioni che diconsi stati allotropici o isomerici. Questi stati diversi talvolta non offrono che lievi differenze, e sono facili a mutarsi gli uni negli altri, altre volte sono le differenze più profonde e più permanenti, siccome ne porge l'esempio il carbonio nelle sue modificazioni di diamante e di grafite. Le differenze poi tra gli stati allotropici del medesimo corpo possono compararsi a quelle che distinguono i corpi di natura diversa; se non che per questi la distinzione è stabile, non potendosi con i mezzi fin ora conosciuti effettuare la trasformazione di un corpo nell'altro, mentre possiamo trasformare l'una nell'altra modificazione, o ridurre alla stessa modificazione gli stati diversi del medesimo corpo.

Ciò posto non sarà opinione priva di fondamento il supporre nel caso che stiamo esaminando gli ossidi di magnesio, di zinco, di nichelio, di ferro, di manganese, di cobalto e di rame capaci di prendere diversi stati isomerici nelle loro combinazioni con l'acido solforico; e basta supporre due soli di questi stati che diremo α e β; talchè chiamando in generale M qualsivoglia dei precedenti sette metalli, diremo i loro ossidi, secondo l'uno dei due stati che può prendere $M^{\alpha}O$, ed $M^{\beta}O$. Aggiungasi pure che non tutti i medesimi ossidi possono prendere con pari facilità l'uno e l'altro stato; ma, per quel che si deduce dal carattere cristallografico dei loro solfati, gli ossidi di magnesio, di zinco e di nichelio sono più disposti a diventare $M^{\alpha}O$ che $M^{\beta}O$, gli ossidi di ferro, di manganese, e di cobalto diventano con eguale facilità $M^{\alpha}O$ ed $M^{\beta}O$, e l'ossido di rame non può prendere altro stato se non quello di $M^{\beta}O$. In questi diversi stati isomerici è da considerare la loro facilità di prodursi e la eguale facilità di scomparire fuori le condizioni in cui si producono, non rimanendo alcun segno di differenza in ciascuno dei medesimi ossidi separati dall'acido solforico. Il quale rapporto tra la facilità di prodursi e la difficoltà di persistere i diversi stati isomerici, già confermato da altri esempii che non occorre ricordare, ci rende impossibile di dimostrare con maggiore evidenza le modificazioni diverse degli ossidi metallici nei cristalli che abbiam preso ad esaminare.

Quindi, da parte la presenza de'sette proporzionali di acqua, si perviene a conchiudere che i cristalli ortogonali siano formati da un solfato di $M^{\alpha}O$, qualunque sia l'ossido o i diversi ossidi isomorfi che funzionano da base; ed i cristalli monoclini siano formati dalla combinazione in proporzione definita di un solfato di $M^{\alpha}O$ con un solfato di $M^{\beta}O$.

In quest'ultimo caso non sappiamo se i due solfati siano combinati in proporzioni atomiche eguali, che sarebbe il più semplice modo di combinazione, o se in vece serbassero altre proporzioni; ma è da ritenere che i loro rapporti atomici siano costanti e sempre gli stessi. Potrebbe essere pure che sì nei cristalli ortogonali che nei monoclini stia un solfato di $M^{\alpha}O$ combinato ad un solfato $M^{\beta}O$ con proporzioni diverse in ciascuna delle due specie di cristalli. E potremmo ancora scegliere altre maniere di combinazioni che non avranno altro merito se non quello di essere possibili. Nello stato presente delle scienze naturali, non avendo alcun criterio sicuro per giungere a determinare in modo assoluto qual sia l'intima maniera di combinazione nei corpi composti, qualunque tipo di composizione chimica vogliasi assegnare ai cristalli ortogonali ed ai monoclini non sarà mai da ritenersi come definitivamente determinato. Intanto è d'uopo considerare che il nostro scopo è pienamente raggiunto sol che sia dimostrata la probabilità che la chimica composizione dei cristalli monoclini sia diversa da quella dei cristalli ortogonali.

Omettendo altre considerazioni in sostegno della riferita ipotesi, soggiungerò soltanto che essa basta a renderci ragione di tutti i fatti che nei solfati con sette proporzionali di acqua sembrano più o meno fuori regola. I cristalli monoclini nascendo dalla combinazione di un solfato di $M^{\alpha}O$ con un solfato di $M^{\beta}O$, s'intende perchè il solfato di rame con i solfati di magnesia, di zinco e di nichelio producano cristalli monoclini, mentre ciascuno di essi è incapace da se solo a dare cristalli di questo sistema; e s'intende pure come la variabile proporzione delle diverse basi possa conciliarsi con la costante proporzione tra il solfato di $M^{\alpha}O$ ed il solfato di $M^{\beta}O$, perchè gli ossidi di magnesio, di zinco e di nichelio, se in gran parte sono nello stato di $M^{\alpha}O$, una loro porzione può trovarsi allo stato di $M^{\beta}O$. Le medesime cose vanno applicate per i cristalli monoclini nei quali gli ossidi di magnesio, di zinzo e di nichelio sono uniti all'ossido di ferro, di manganese o di cobalto. Il prodursi cristalli ortogonali che contengono oltre gli ossidi di magnesio, di zinco e di nichelio anche gli altri ossidi di ferro, di manganese o di cobalto, non ha nulla di straordinario, perchè gli ultimi tre ossidi possono stare nello stato di $M^{\alpha}O$. Che il puro ossido di rame non si combini mai con l'acido solforico e con sette proporzionali di acqua, vuol dire che non si dà alcun solfato di $M^{\beta}O$ con sette proporzionali di acqua. Se i cristalli monoclini di puro solfato di manganese con sette proporzionali di acqua si trasformano in cristalli triclini con cinque proporzionali di acqua per poco che

la temperatura oltrepassi i dieci gradi, mentre i cristalli monoclini formati dallo stesso solfato di manganese con uno dei solfati di magnesia, di zinco o di nichelio si conservano intatti a temperature maggiori di venti gradi, purchè sottratti all'azione dell'aria libera che li renderebbe fatescenti, non è un fatto da farne maraviglia, ed esso serve soltanto a mostrarci che l'ossido di manganese nello stato di M^2O è meno stabile degli ossidi di magnesio, di zinco e di nichelio nel medesimo stato.

Vi son pure altri cospicui esempii di dimorfismo nei quali concorrono tali condizioni da mostrare che nei cristalli di sistema diverso sia altresì diverso, o che almeno esser possa diverso, il tipo della loro chimica composizione. Siccome la maniera con la quale propongo doversi considerare il dimorfismo, almeno sin ora, non può dirsi rigorosamente dimostrata, reputo poco importante l'esame di molti altri fatti discutendo i quali si perviene al medesimo grado di probabilità. E credo bastare all'argomento che ho preso a trattare esporre alcune considerazioni sulla pirite ragguagliata ad altre specie di minerali con le quali ha strette relazioni. Abbiamo i cristalli di pirite e quelli di marcassite composti di solfo e ferro nelle medesime proporzioni, $FeSu^2$, i primi riferibili al sistema monometrico con forme emiedriche a facce parallele, gli altri riferibili al sistema trimetrico ortogonale. Abbiamo altre specie minerali isoforme con la pirite ed altre isoforme con la marcassite nelle quali al contrario si riscontra un tipo di composizione apparentemente diverso. Esse sono riportate nel seguente specchietto con le corrispondenti formole accomodate a mostrare e l'analogia e la differenza nella loro composizione:

Cristalli monometrici		Cristalli trimetrici	
Pirite	$Fe^2Su^4 = FeSu^2, FeSu^2$ . .	Marcassite . .	$Fe^2Su^4 = FeSu^2, FeSu^2$
Cobaltina. .	$Co^2Su^2As = CoSu^2, CoAs$ . .	Glaucodote. .	$Co^2Su^2As = CoSu^2, CoAs$
Gersdorfite.	$Ni^2Su^2As = NiSu^2, NiAs$ . .	Mispickel. . .	$Fe^2Su^2As = FeSu^2, FeAs$.

Facendo attenzione alle formole chimiche che seguono immediatamente i nomi delle specie, si scorgerà da una parte esser diversa la composizione delle specie isomorfe, e d'altra parte esser diverso il sistema di cristallizzazione nelle specie che hanno la medesima composizione. Intanto se l'isomorfismo è carattere distintivo dell'analogia di composizione, nè la pirite, nè la marcassite possono avere la composizione così semplice come viene indicata dalla formola $FeSu^2$. Nell'una

e nell'allra specie è necessario ammettere che metà dello zolfo si rinvenga in uno stato diverso da quello dell'altra metà di zolfo, ed analogo a quello dell'arsenico. L'analogia poi va soggetta a quest'altra condizione che due proporzionali di zolfo equivalgono ad uno di arsenico, secondo i proporzionali comunemente adottati per l'arsenico e per lo zolfo. Fin quì la interpretazione data alla composizione dei solfuri di ferro non è che necessaria conseguenza dell'isomorfismo delle specie riunite nel medesimo gruppo; e lo stesso loro isomorfismo è un novello fatto che serve a dimostrare un corpo qualunque potersi trovare in diversi stati nel medesimo composto.

Quindi chiameremo N^{α} sì l'arsenico che lo zolfo a proporzionale doppio analogo al medesimo arsenico, $N^{\alpha}=As=Su^{2}$, e diremo N^{β} la modificazione dello zolfo diversa dalla precedente. Ciò non basta per avere diversi tipi di composizione tra i cristalli monometrici ed i trimetrici. Ma ammesse le diverse modificazioni o stati allotropici diversi nello zolfo, non può incontrarsi difficoltà ad ammettere somiglianti modificazioni diverse nel ferro, nel cobalto e nel nichelio, le quali modificazioni dinoteremo per M^{α} ed M^{β}.

Allora scegliendo una delle possibili formole razionali che in generale potremmo adottare per le specie dei cristalli monometrici e per quelle dei cristalli trimetrici, se riteniamo per le prime la formola $M^{\alpha}N^{\beta 2},M^{\beta}N^{\alpha}$ e per le seconde $M^{\beta}N^{\beta 2},M^{\alpha}N^{\alpha}$, tutto rientra nelle regole ordinarie; l'isomorfismo rimane carattere distintivo delle analoghe composizioni, e le forme cristalline di sistema diverso, ovvero il dimorfismo, ci mostrerebbe sempre una differenza di composizione chimica.

Intanto dalle cose fin quì discorse apparisce che il fenomeno del dimorfismo quale da me si considera è tutt'altro di quel che insino ad ora è stato considerato. Secondo l'opinione generalmente adottata le sostanze dimorfe hanno identica composizione chimica, e la differenza delle loro forme cristalline si è creduto derivare da diversa disposizione delle loro molecole. La quale interpretazione è molto vaga e nulla aggiunge a chiarire il fenomeno, dappoichè la diversa disposizione di molecole ed il diverso sistema di cristallizzazione sono quasi la medesima cosa. Secondo la nuova opinione i fatti conosciuti col nome di dimorfismo non costituiscono più una legge di eccezione; essi rientrano nella legge generale che la differenza delle forme cristalline è effetto della diversa composizione chimica; talchè siamo portati a conchiudere non darsi vero polimorfismo, ed il diverso sistema di cristallizzazione essere tal fatto che basta da sè

solo a svelarci una differenza nella chimica composizione. Se abbiamo casi di polimorfismo nei corpi semplici, siccome uno assai notevole ne presenta il carbonio nelle sue modificazioni di diamante e di grafite, fa d'uopo riflettere che il diamante e la grafite, oltre al distinguersi pel sistema di cristallizzazione, si differenziano pure per molti altri caratteri; che tra l'uno o l'altro intercedono maggiori differenze di quelle che d'ordinario distinguono un corpo semplice da un altro di diversa natura. Quindi la diversità del loro carattere cristallografico è necessaria conseguenza del loro diverso stato allotropico, e rientra nella legge generale. E tanto è cercar ragione del diverso sistema di cristallizzazione tra il diamante e la grafite quanto è cercarla del diverso carattere cristallografico, a mo' d'esempio, tra l'antimonio e l'argento.

CONCLUSIONE

Nella prima memoria sulla polisimmetria ho distinto la polisimmetria dal polimorfismo mostrando le loro importanti differenze per i caratteri geometrici dei cristalli di tipo diverso e per i fenomeni di metamorfismo tra i medesimi cristalli. I nuovi esperimenti sopra i cristalli dei paratartrati e dei destro e levo tartrati han servito ad estendere le nostre conoscenze sulla polisimmetria.

Quanto alla chimica composizione dei cristalli di tipo diverso nelle sostanze polisimmetriche e nelle sostanze polimorfe ho esposto le ragioni che mi fan ritenere al diverso sistema di cristallizzazione delle sostanze polimorfe corrispondere un diverso tipo di composizione chimica, mentre, almeno per ora, i cristalli di tipo diverso delle sostanze polisimmetriche non pare che abbiano composizione diversa. Egli è però che il polimorfismo, secondo le attuali conoscenze, si trova maggiormente discosto dalla polisimmetria, e sembrano quasi due fenomeni non più tra loro comparabili.

INDICE DELLE MATERIE

Introduzione. Differenza stabilita sinora tra il polimorfismo e la polisimmetria. Cagioni note di questi fenomeni. Nuove ricerche sulla polisimmetria dei tartrati e paratartrati. Opinione sul polimorfismo, pag. 1, 2.

Conoscenze generali dei tartrati e paratartrati. Differenze tra gli acidi destro tartarico, levo tartarico e paratartarico. Se i destro tartrati ed i levo tartrati costituissero un caso particolare di polisimmetria. Relazioni tra i cristalli dei tartrati e quelli dei paratartrati d'identica composizione chimica, pag. 2-4.

Levo e destro tartrato ammonico-sodico. I cristalli di una specie immersi nelle soluzioni dell' altra specie si sciolgono; e quindi non possono scambievolmente trasformarsi, pag. 4.

Caratteri dei cristalli del levo e destro tartrato acido di potassa. Loro descrizione. Metodo per ottenere ciascuna specie libera da mescolanza con l'altra specie. Costanza della loro emiedria. Particolare maniera d'impiantarsi i cristalli prodotti nelle soluzioni che contengono il citrato di soda, pag. 5, 6.

Metamorfismo scambievole tra i cristalli di levo e destro tartrato acido potassico. Descrizione del fenomeno, e maniera di sperimentare. Solubilità dei cristalli di ciascuna specie nelle soluzioni sature dei cristalli di specie diversa, pag. 7-9.

Levo e destro tartrato acido ammonico; *emiedria variabile dei loro cristalli*. Forme cristalline variabilissime dei tartrati acidi di ammonio. Loro emiedria anche variabile senza cagione apparente. Emiedria invertita nei cristalli prodotti nelle soluzioni che contengono citrato sodico. Particolare maniera d'impiantarsi ed indizii di emiedria indeterminata nei medesimi cristalli generati nelle soluzioni con citrato ammonico pag. 9-14.

Metamorfismo scambievole tra i cristalli di levo e destro tartrato acido ammonico. Descrizione del fenomeno, pag. 14-16.

Comparazione tra i cristalli dei tartrati acidi di potassa, e di ammonio con quelli dei paratartrati acidi delle medesime basi. Analogia per i clivaggi

e le misure goniometriche tra le facce di una zona; differenze per le facce di altre zone. Identiche inclinazioni tra i piani delle diverse zone. Se i cristalli monoclini dei paratartrati si possono considerare come ortogonali emiedrici, pag. 16-19.

Grado di solubilità dei medesimi cristalli, pag. 20.

Cristalli di paratartrato acido potassico metamorfizzati in levo e destro tartrato acido potassico. Descrizione del fenomeno. Notevole solubilità del paratartrato nelle soluzioni sature dei tartrati, pag. 21-23.

Cristalli di levo e destro tartrato acido potassico metamorfizzati in paratartrato acido potassico. Descrizione del fenomeno. I cristallini di paratartrato che s'impiantano su quelli del tartrato sono sempre gemini, ed hanno un punto determinato col quale s'impiantano, pag. 23 e 24.

Cristalli che si hanno dalle soluzioni di levo e destro tartrato acido potassico mescolati in proporzioni varie. Risultamenti delle esperienze fatte con le due specie di tartrati riunite nelle proporzioni di 2:1 e di 3:2. Nei cristalli avuti dall'unione delle due specie nel rapporto di 4:1 si presentano le facce del tartrato e del paratartrato riunite insieme ed alternamente ripetute; le facce del paratartrato seguono la legge di emiedria del tartrato, e la legge dei cristalli gemini dello stesso paratartrato, pag. 25-28.

Risultamenti di altre esperienze fatte con le due specie di tartrati in proporzioni non definite. Come si manifesta la struttura complessa dei cristalli avuti dall'unione in rapporto variabile dei due tartrati quando essi s'ingrandiscono nella soluzione del paratartrato. Particolari forme avute in alcuni esperimenti, pag. 28-34.

Cristalli di paratartrato acido ammonico metamorfizzati in levo e destro tartrato acido ammonico, pag. 34.

Cristalli di levo o destro tartrato acido ammonico metamorfizzati in paratartrato acido ammonico. Descrizione del fenomeno. Maniera diversa di manifestarsi tale fenomeno tra i sali ammonici e gli analoghi sali potassici derivante dal loro diverso grado di solubilità. Emiedria e geminazione dei cristallini di paratartrato che nascono per metamorfismo dei tartrati, pag. 34 e 38.

Cristalli che si hanno dalle soluzioni del levo e destro tartrato acido ammonico mescolati in varie proporzioni. Risultamenti delle mescolanze dei due sali in proporzioni molto dispari. Difficoltà che incontra a cristallizzare il paratartrato acido ammonico quando nella soluzione vi sia gran copia di uno dei due tartrati. Diversa maniera d'impiantarsi e diversa

emiedria dei cristalli di paratartrato secondo che nella soluzione vi sia l'una o l'altra specie di tartrato, pag. 38-41.

Considerazioni intorno alla polisimmetria dei tartrati acidi e del paratartrato acido di potassa o di ammonio. Confronto per i caratteri cristallografici e per la chimica composizione tra i levo e destro tartrati, e tra i paratartrati e ciascuna specie di tartrato. Se la emiedria dei cristalli dei tartrati sia qualità ai medesimi inerente, o derivi da cagioni indipendenti dalla loro natura. Causa della geminazione dei cristalli di paratartrato che nascono per metamorfismo, pag. 42-46.

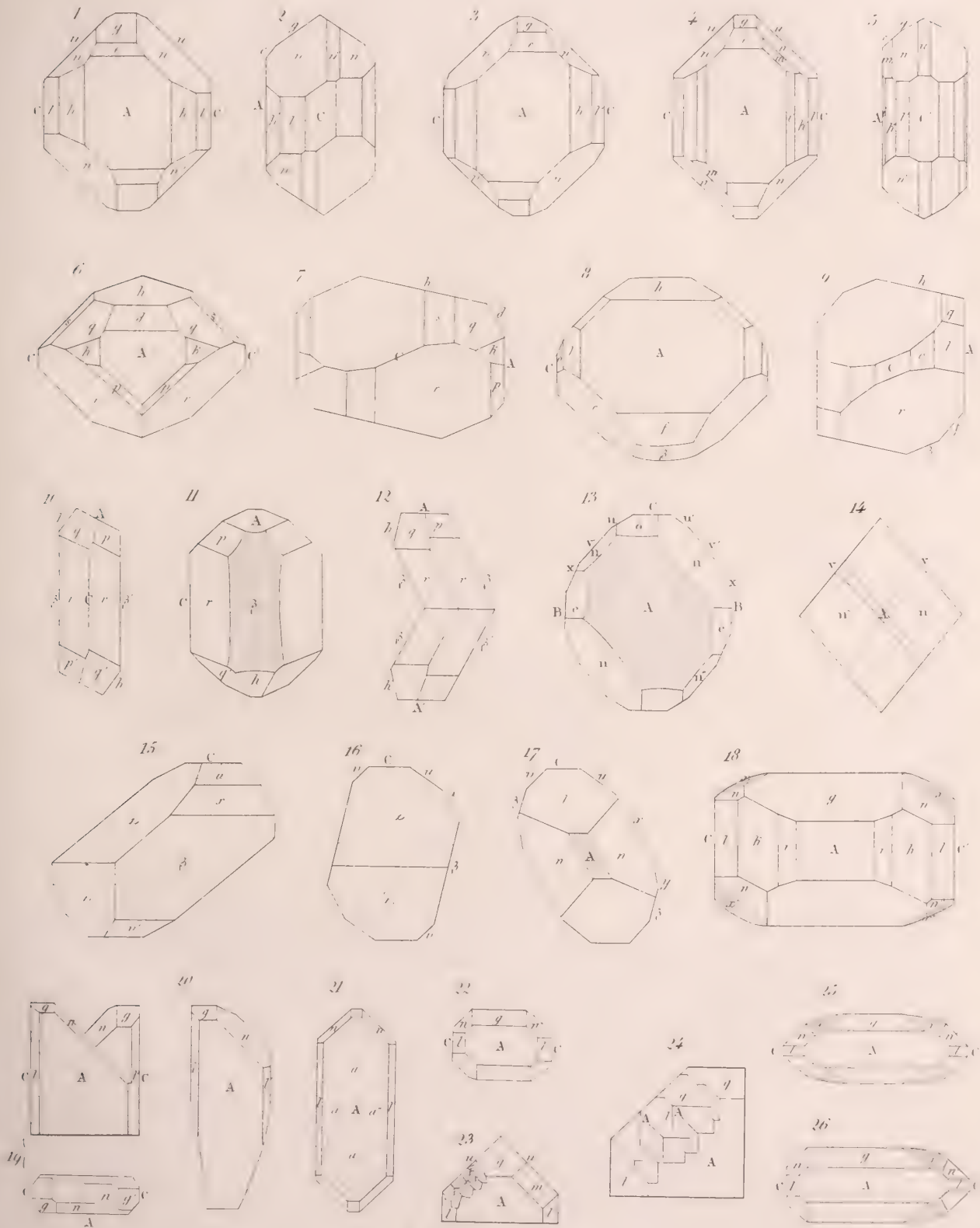
Confronto tra i cristalli del paratartrato acido di soda e quelli del tartrato acido di soda. Nei cristalli di tipo diverso del paratartrato acido di soda mentre vi è analogia per talune specie di facce, per altre specie di facce non può stabilirsi alcuna analogia. Difficoltà di trasformare i cristalli di un tipo in quelli di tipo diverso. Distinti casi di metamorfismo nelle sostanze polisimmetriche. Analogia incerta tra i cristalli del bitartrato di soda e quelli del paratartrato acido di soda, pag. 46-50.

Considerazioni intorno al polimorfismo. Le sostanze polimorfe sembrano avere diverso tipo di composizione chimica secondo il diverso sistema di cristallizzazione. Discussione sopra i solfati della formola $MO,SuO^3,7HO$ alcuni dei quali danno cristalli trimetrici ortogonali, altri cristalli monoclini. Discussione sulla pirite ragguagliata ad altre specie affini; pag. 51-60.

Conclusione; pag. 60.

ERRORI		LEGGI
pag. 1, *v.* 13	— polimmorfismo . . .	polimorfismo
» 1, *v.* 14	— polisimetria.	polisimmetria
» 2, *v.* 10	— polisimmetrica	polisimmetria
» 5, *v.* 21	— da quello	da quelli
» 8, *v.* 12	— destro tertrato	destro tartrato
» 14, *v.* 12	— terminanti	terminata
» 17, *v.* 13	— 440 10	140 10
» 21, *v.* 8	— metamorfizzato	metamorfizzati
» 25, *v.* 9	— causale	casuale
» 32, *v.* 24	— facce β	le facce β
» 38, *v.* 10	— ciò chi	ciò che
» 47, *v.* 7	— come le	come lo

Scacchi dis. G. Imperato inc

G. Imperato inc.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA
DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SUL CALCOLO DELLE ORBITE DELLE STELLE DOPPIE

MEMORIA

DEL SOCIO ORDINARIO A. DE GASPARIS

letta nella tornata del dì 9 agosto 1864.

In questa Memoria mi propongo di risolvere il problema adoperando cinque angoli di posizione e due distanze. Spingerò l'approssimazione fino a ritenere i termini che moltiplicano le quinte potenze del tempo, e la determinazione delle incognite non richiederà equazioni superiori al secondo grado. In altra memoria tratterò il caso in cui sono dati sei angoli di posizione ed una sola distanza.

Premetterò innanzi tutto alcune relazioni rimarchevoli che hanno luogo tra quantità in cui non figurano le distanze, e ad evitare inutili ripetizioni sul significato de' simboli adoperati in questo lavoro, rinvio il lettore a consultare le mie memorie, sullo stesso argomento, che saranno fra breve inserite nel nostro Rendiconto Accademico.

1. Abbiansi in primo luogo quattro angoli di posizione φ_1 φ_2 φ_3 φ_4 osservati ai tempi t_1 t_2 t_3 t_4. Si avranno le seguenti equazioni

$$\left.\begin{aligned}
n_{12} &= r_1 r_2 \, sen(v_2 - v_1) = \rho_1 \rho_2 \, sen(\varphi_2 - \varphi_1) \sec i \\
n_{34} &= r_3 r_4 \, sen(v_4 - v_3) = \rho_3 \rho_4 \, sen(\varphi_4 - \varphi_3) \sec i \\
n_{13} &= r_1 r_3 \, sen(v_3 - v_1) = \rho_1 \rho_3 \, sen(\varphi_3 - \varphi_1) \sec i \\
n_{24} &= r_2 r_4 \, sen(v_4 - v_2) = \rho_2 \rho_4 \, sen(\varphi_4 - \varphi_2) \sec i \\
n_{23} &= r_2 r_3 \, sen(v_3 - v_2) = \rho_2 \rho_3 \, sen(\varphi_3 - \varphi_2) \sec i \\
n_{14} &= r_1 r_4 \, sen(v_4 - v_1) = \rho_1 \rho_4 \, sen(\varphi_4 - \varphi_1) \sec i
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

dalle quali, dividendo il prodotto delle due prime per quello della terza e quarta, o quinta e sesta, si ricavano le due altre

$$\frac{sen(v_2-v_1)\,sen(v_4-v_3)}{sen(v_3-v_2)\,sen(v_4-v_1)}=\frac{sen(\varphi_2-\varphi_1)\,sen(\varphi_4-\varphi_3)}{sen(\varphi_3-\varphi_2)\,sen(\varphi_4-\varphi_1)}$$
$$\frac{sen(v_3-v_1)\,sen(v_4-v_2)}{sen(v_3-v_2)\,sen(v_4-v_1)}=\frac{sen(\varphi_3-\varphi_1)\,sen(\varphi_4-\varphi_2)}{sen(\varphi_3-\varphi_2)\,sen(\varphi_4-\varphi_1)} \quad . \; . \; . \; (2)$$

queste due equazioni non sono indipendenti avendosi identicamente

$$sen(v_3-v_2)sen(v_4-v_1)=sen(v_3-v_1)sen(v_4-v_2)-sen(v_2-v_1)sen(v_4-v_3) \quad (3)$$

ciascuna delle due può intanto servir di controllo a calcolo compiuto dovendosi verificare la esposta equazione fra la funzione contenente le anomalie vere, e l'altra di somigliante forma relativa agli angoli di posizione.

Si hanno ancora le due altre

$$sen(\varphi_3-\varphi_2)sen(\varphi_4-\varphi_1)=sen(\varphi_3-\varphi_1)sen(\varphi_4-\varphi_2)-sen(\varphi_2-\varphi_1)sen(\varphi_4-\varphi_3) \quad (4)$$
$$n_{23}n_{14}=n_{13}n_{24}-n_{12}n_{34}\,.$$

Tenendo ora presenti le (1); esprimendo le aje n_{12} n_{23} ec. in funzione del raggio vettore r_3 e sua derivata; indicando co' simboli m_{12} m_{23} m_{13} ec. i termini che moltiplicano le quinte potenze del tempo e successivi, avremo (Vedi la mia memoria *sulle orbite planetarie* inserita nel 1° volume degli Atti di questa Accademia)

$$\rho_1\rho_2 sen(\varphi_2-\varphi_1)\sec i=\sqrt{p}\left\{\theta_{12}-\frac{\theta_{12}^3}{6r_3^3}-\frac{\theta_{12}^3(\theta_{13}+\theta_{23})dr_3}{4r_3^4\,d\tau}+m_{12}\right\}$$
$$\rho_3\rho_4 sen(\varphi_4-\varphi_3)\sec i=\sqrt{p}\left\{\theta_{34}-\frac{\theta_{34}^3}{6r_3^3}+\frac{\theta_{34}^4\,dr_3}{4r_3^4\,d\tau}+m_{34}\right\}$$
$$\rho_1\rho_3 sen(\varphi_3-\varphi_1)\sec i=\sqrt{p}\left\{\theta_{13}-\frac{\theta_{13}^3}{6r_3^3}-\frac{\theta_{13}^4\,dr_3}{4r_3^4\,d\tau}+m_{13}\right\}$$
$$\rho_2\rho_4 sen(\varphi_4-\varphi_2)\sec i=\sqrt{p}\left\{\theta_{24}-\frac{\theta_{24}^3}{6r_3^3}+\frac{\theta_{24}^3(\theta_{34}-\theta_{23})\,dr_3}{4r_3^4\,d\tau}+m_{24}\right\} \quad . \; (5)$$
$$\rho_2\rho_3 sen(\varphi_3-\varphi_2)\sec i=\sqrt{p}\left\{\theta_{23}-\frac{\theta_{23}^3}{6r_3^3}-\frac{\theta_{23}^4\,dr_3}{4r_3^4\,d\tau}+m_{23}\right\}$$
$$\rho_1\rho_4 sen(\varphi_4-\varphi_1)\sec i=\sqrt{p}\left\{\theta_{14}-\frac{\theta_{14}^3}{6r_3^3}+\frac{\theta_{14}^3(\theta_{34}-\theta_{13})\,dr_3}{4r_3^4\,d\tau}+m_{14}\right\}$$

Fatto, come ne' lavori precedenti $\theta_{12}=h\,(t_2-t_1)$ ec. essendo h^2 la

somma delle masse delle due stelle componenti il sistema, posto per brevità

$$x = \frac{h^2}{6r_3^3}, \quad y = \frac{h^3 dr_3}{4r_3^4 d\tau} \quad \dots\dots\dots \quad (6)$$

come ancora $sen(\varphi_2 - \varphi_1) = sen\varphi_{12}$ ec.; $t_2 - t_1 = t_2$, ec. può scorgersi che dal prodotto della prima e seconda, terza e quarta, quinta e sesta delle equazioni (5) si ricavano le tre

$$\frac{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4 sec^2 i}{h^2 p} = \frac{t_{12}t_{34}}{sen\varphi_{12} sen\varphi_{34}} \left\{1 - t_{12}^2 x - t_{12}^2(t_{13} + t_{23}) y \dots\right\} \left\{1 - t_{34}^2 x + t_{34}^3 y \dots\right\}$$

$$\frac{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4 sec^2 i}{h^2 p} = \frac{t_{13}t_{24}}{sen\varphi_{13} sen\varphi_{24}} \left\{1 - t_{24}^2 x + t_{24}^2(t_{34} - t_{23}) y \dots\right\} \left\{1 - t_{13}^2 x - t_{13}^3 y \dots\right\} \quad (7)$$

$$\frac{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4 sec^2 i}{h^2 p} = \frac{t_{23}t_{24}}{sen\varphi_{23} sen\varphi_{14}} \left\{1 - t_{14}^2 x + t_{14}^3(t_{34} - t_{13}) y \dots\right\} \left\{1 - t_{23}^2 x - t_{23}^3 y \dots\right\}$$

Da queste tre ultime possono ricavarsi due equazioni in x y ed incognite provvenienti da termini successivi, equazioni che equivalendo ad una sola, fa d'uopo sviluppare e rivolgere seria attenzione alla forma dei coefficienti che dan luogo a notevoli rapporti. Ritenendo per ora che nei secondi membri delle (5) si estendano i sviluppi fino ai termini che han per coefficienti le quarte potenze del tempo, i valori che si presenteranno ne' coefficienti delle incognite delle due equazioni, che pur debbono rientrare l'una nell'altra, mostreranno se ciò è permesso. Contrasegnandole con

$$\begin{aligned} 0 &= N_1 + A_1 x + B_1 x^2 + C_1 y + D_1 xy + E_1 y^2 \dots \\ 0 &= N_2 + A_2 x + B_2 x^2 + C_2 y + D_2 xy + E_2 y^2 \dots \end{aligned} \quad (8)$$

si trova per la prima

$$N_1 = + t_{12}t_{34} sen\varphi_{23} sen\varphi_{14} - t_{23}t_{14} sen\varphi_{12} sen\varphi_{34}$$

$$A_1 = - t_{12}t_{34} sen\varphi_{23} sen\varphi_{14}(t_{12}^2 + t_{34}^2) + t_{23}t_{14} sen\varphi_{12} sen\varphi_{34}(t_{23}^2 + t_{14}^2)$$

$$B_1 = + t_{12}t_{34} sen\varphi_{23} sen\varphi_{14} t_{12}^2 t_{34}^2 - t_{23}t_{14} sen\varphi_{12} sen\varphi_{34} t_{23}^2 t_{14}^2$$

$$C_1 = + t_{12}t_{34} sen\varphi_{23} sen\varphi_{14}[t_{34}^3 - t_{12}^2(t_{13} + t_{23})] - t_{23}t_{14} sen\varphi_{12} sen\varphi_{34}[t_{14}^2(t_{34} - t_{13}) - t_{23}^3]$$

$$D_1 = + B_1(t_{13} + t_{23} - t_{34})$$

$$E_1 = - t_{12}t_{34} sen\varphi_{23} sen\varphi_{14} t_{12}^2 t_{34}^2 t_{34}(t_{13} + t_{23}) + t_{23}t_{14} sen\varphi_{12} sen\varphi_{34} t_{23}^2 t_{14}^2 t_{23}(t_{34} - t_{13})$$

e per la seconda viene

$$N_2 = \quad t_{23}t_{14}\,sen\,\varphi_{13}\,sen\,\varphi_{24} - t_{13}t_{24}\,sen\,\varphi_{23}\,sen\,\varphi_{14}$$

$$A_2 = -t_{23}t_{14}\,sen\,\varphi_{13}\,sen\,\varphi_{24}(t_{23}^2 + t_{14}^2) + t_{13}t_{24}\,sen\,\varphi_{23}\,sen\,\varphi_{14}(t_{13}^2 + t_{24}^2)$$

$$B_2 = +t_{23}t_{14}\,sen\,\varphi_{13}\,sen\,\varphi_{24}\,t_{23}^2t_{14}^2 - t_{13}t_{24}\,sen\,\varphi_{23}\,sen\,\varphi_{14}\,t_{13}^2t_{24}^2$$

$$C_2 = -t_{23}t_{14}\,sen\,\varphi_{13}\,sen\,\varphi_{24}[t_{14}^2(t_{34} - t_{13}) - t_{23}^3] - t_{13}t_{24}\,sen\,\varphi_{23}\,sen\,\varphi_{14}[t_{24}^2(t_{34} - t_{23}) - t_{13}^3]$$

$$D_2 = -B_2(t_{13} + t_{23} - t_{34})$$

$$E_2 = -t_{23}t_{14}\,sen\,\varphi_{13}\,sen\,\varphi_{24}\,t_{23}^2t_{14}^2t_{23}(t_{34} - t_{13}) + t_{13}t_{24}\,sen\,\varphi_{23}\,sen\,\varphi_{14}\,t_{13}^2t_{24}^2t_{13}(t_{34} - t_{23})\,.$$

Posto ciò, a cagione della equazione (4) si ha

$$N_1 + N_2 = (t_{23}t_{14} - t_{13}t_{24} + t_{12}t_{34})\,sen\,\varphi_{23}\,sen\,\varphi_{14}$$

e siccome è identicamente

$$t_{23}t_{14} - t_{13}t_{24} + t_{12}t_{34} = 0$$

così si deduce $N_1 + N_2 = 0$.

Inoltre si ricava

$$A_1 + A_2 = \{t_{13}t_{24}(t_{13}^2 + t_{24}^2) - t_{12}t_{34}(t_{12}^2 + t_{34}^2) - t_{23}t_{14}(t_{23}^2 + t_{14}^2)\}\,sen\,\varphi_{23}\,sen\,\varphi_{14}$$

ed eseguiti gli sviluppi indicati nel coefficiente di $sen\,\varphi_{23}\,sen\,\varphi_{14}$ si trova similmente $A_1 + A_2 = 0$.

La forma dei coefficienti di x^2 nelle due equazioni dà

$$B_1 + B_2 = (t_{23}^3t_{14}^3 - t_{13}^3t_{24}^3 + t_{12}^3t_{34}^3)\,sen\,\varphi_{23}\,sen\,\varphi_{14}$$

e qui, si vede che $B_1 + B_2$ non può mai sparire per la ragione che il coefficiente di $sen\,\varphi_{23}\,sen\,\varphi_{14}$ risulta essere la somma algebrica di tre cubi che, come è noto in Analisi, non può mai andare a zero.

Procedendo ulteriormente si ha

$$C_1 + C_2 = \{t_{12}t_{34}[t_{34}^3 - t_{12}^2(t_{13} + t_{23})] - t_{13}t_{24}[t_{24}^2(t_{34} - t_{23}) - t_{13}^3]$$
$$+ t_{23}t_{14}[t_{14}^2(t_{34} - t_{13}) - t_{23}^3]\}\,sen\,\varphi_{23}\,sen\,\varphi_{14}$$

eseguite le operazioni nel coefficiente di $sen\,\varphi_{23}\,sen\,\varphi_{14}$ si ha identicamente zero, onde viene $C_1 + C_2 = 0$.

Per la somma de' coefficienti di xy si deduce

$$D_1 + D_2 = (B_1 + B_2)(t_{13} + t_{23} - t_{34})\,sen\,\varphi_{23}\,sen\,\varphi_{14}$$

che in qualche caso particolare può annullarsi, quando cioè si avesse $t_{13} + t_{23} - t_{34} = 0$.

Finalmente per la somma de' coefficienti di y^2 viene

$$E_1 + E_2 = \left\{ t_{13}^3 t_{24}^3 t_{13} (t_{34} - t_{23}) - t_{13}^3 t_{34}^3 t_{34} ({}_{13} + t_{23}) - t_{23}^3 t_{14}^3 t_{23} (t_{34} - t_{13}) \right\} sen \varphi_{23} \, sen \varphi_{14} \, .$$

Dal fin qui esposto risulta che le due equazioni (7) possono prender la forma

$$\begin{aligned} 0 &= N_1 + A_1 x + B_1 x^2 + C_1 y + (t_{13} + t_{23} - t_{34}) B_1 xy + E_1 y^2 \ldots \\ 0 &= - N_1 - A_1 x + B_2 x^2 - C_1 y + (t_{13} + t_{23} - t_{34}) B_2 xy + E_2 y^2 \ldots \end{aligned} \qquad (9)$$

prendendo la somma di queste ultime si ottiene

$$0 = (B_1 + B_2) x^2 + (t_{13} + t_{23} - t_{34})(B_1 + B_2) xy + (E_1 + E_2) y^2 \ldots \qquad (10)$$

dalla quale nulla può trarsi, stante che i coefficienti $B_1 + B_2$ ed $E_1 + E_2$ e così pe' termini seguenti, essendo funzioni del tempo col fattor comune $sen \varphi_{23} \, sen \varphi_{14}$ quest'ultimo sparirebbe dalle formole le quali non possono prestarsi a dare i valori delle incognite o i loro rapporti avendosi per dati i soli tempi delle osservazioni.

Moltiplicando la prima delle equazioni (9) per B_2 e la seconda per B_1 sottraendo l' una dall' altra avremo

$$0 = N_1 (B_1 + B_2) + A_1 (B_1 + B_2) x + C_1 (B_1 + B_2) y + (E_1 B_2 - E_2 B_1) y^2 \ldots \qquad (11)$$

La precedente equazione si è ottenuta adoperando gli angoli di posizione φ_1 φ_2 φ_3 φ_4 ottenuti ai tempi t_1 t_2 t_3 t_4, altra della stessa forma potrà ricavarsi adoperando gli angoli φ_2 φ_3 φ_3 φ_5 determinati ai tempi t_2 t_3 t_4 t_5. Onde però vi figurino le stesse incognite adopreremo i valori di n_{23} n_{34} ec. espressi in funzione di r_3. Si ha

$$\left.\begin{aligned} \frac{n_{23}}{\sqrt{p}} &= t_{23} - t_{23}^3 x - t_{23}^4 y + m_{23} \\ \frac{n_{45}}{\sqrt{p}} &= t_{45} - t_{45}^3 x + t_{45}^3 (t_{35} + t_{34}) y + m_{45} \\ \frac{n_{24}}{\sqrt{p}} &= t_{24} - t_{24}^3 x + t_{24}^2 (t_{34} - t_{23}) y + m_{24} \\ \frac{n_{35}}{\sqrt{p}} &= t_{35} - t_{35}^3 x + t_{35}^4 y + m_{35} \\ \frac{n_{34}}{\sqrt{p}} &= t_{34} - t_{34}^3 x + t_{34}^4 y + m_{34} \\ \frac{n_{25}}{\sqrt{p}} &= t_{25} - t_{25}^3 x + t_{25}^3 (t_{35} - t_{23}) y + m_{25} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (12)$$

dalle quali si formano le equazioni

$$\frac{\rho_2\rho_3\rho_4\rho_5 \sec^2 i}{p} = \frac{t_{23}t_{45}}{sen\,\varphi_{23}\,sen\,\varphi_{45}}(1 - t_{23}^2 x - t_{23}^3 y..)\{1 - t_{45}^2 x + t_{45}^2(t_{34} + t_{35})y..\}$$

$$\frac{\rho_2\rho_4\rho_3\rho_5 \sec^2 i}{p} = \frac{t_{24}t_{35}}{sen\,\varphi_{24}\,sen\,\varphi_{35}}(1 - t_{35}^2 x + t_{35}^3 y..)\{1 - t_{24}^2 x + t_{24}^2(t_{34} - t_{23})y..\}$$

$$\frac{\rho_3\rho_4\rho_2\rho_5 \sec^2 i}{p} = \frac{t_{34}t_{25}}{sen\,\varphi_{34}\,sen\,\varphi_{25}}(1 - t_{34}^2 x + t_{34}^3 y..)\{1 - t_{25}^2 x + t_{25}^2(t_{35} - t_{23})y..\}$$

ed indicando le due equazioni in x, y ecc. che se ne deducono, con

$$0 = N_3 + A_3 x + B_3 x^2 + C_3 y + D_3 xy + E_3 y^2 \dots$$
$$0 = N_4 + A_4 x + B_4 x^2 + C_4 y + D_4 xy + E_4 y^2 \dots \qquad (13)$$

avremo

$$N_3 = t_{23}t_{45}\,sen\,\varphi_{34}\,sen\,\varphi_{25} - t_{34}t_{25}\,sen\,\varphi_{23}\,sen\,\varphi_{45}$$

$$A_3 = -t_{23}t_{45}\,sen\,\varphi_{34}\,sen\,\varphi_{25}(t_{23}^2 + t_{45}^2) + t_{34}t_{25}\,sen\,\varphi_{23}\,sen\,\varphi_{45}(t_{34}^2 + t_{25}^2)$$

$$B_3 = t_{23}t_{45}\,sen\,\varphi_{34}\,sen\,\varphi_{25}\,t_{23}^2 t_{45}^2 - t_{34}t_{25}\,sen\,\varphi_{23}\,sen\,\varphi_{45}\,t_{34}^2 t_{25}^2$$

$$C_3 = t_{23}t_{45}\,sen\,\varphi_{34}\,sen\,\varphi_{25}[t_{45}^2(t_{35} + t_{34}) - t_{23}^3] - t_{34}t_{25}\,sen\,\varphi_{23}\,sen\,\varphi_{45}[t_{34}^3 + t_{25}^2(t_{35} - t_{23})]$$

$$D_3 = B_3(t_{23} - t_{34} - t_{35})$$

$$E_3 = -t_{23}t_{45}\,sen\,\varphi_{34}\,sen\,\varphi_{25}\,t_{23}^2 t_{45}^2 t_{23}(t_{35} + t_{34}) - t_{34}t_{25}\,sen\,\varphi_{23}\,sen\,\varphi_{45}\,t_{34}^2 t_{25}^2 t_{34}(t_{35} - t_{23})$$

e per i coefficienti dell'altra si trova

$$N_4 = t_{34}t_{25}\,sen\,\varphi_{24}\,sen\,\varphi_{35} - t_{24}t_{35}\,sen\,\varphi_{34}\,sen\,\varphi_{25}$$

$$A_4 = -t_{34}t_{25}\,sen\,\varphi_{24}\,sen\,\varphi_{35}(t_{34}^3 + t_{25}^2) + t_{24}t_{35}\,sen\,\varphi_{34}\,sen\,\varphi_{25}(t_{35}^3 + t_{24}^2)$$

$$B_5 = t_{34}t_{25}\,sen\,\varphi_{24}\,sen\,\varphi_{35}\,t_{34}^2 t_{25}^2 - t_{24}t_{35}\,sen\,\varphi_{34}\,sen\,\varphi_{25}\,t_{35}^2 t_{24}^2$$

$$C_4 = t_{34}t_{25}\,sen\,\varphi_{24}\,sen\,\varphi_{35}[t_{34}^3 + t_{25}^2(t_{35} - t_{23})] - t_{24}t_{35}\,sen\,\varphi_{34}\,sen\,\varphi_{25}[t_{35}^3 + t_{24}^2(t_{34} - t_{23})]$$

$$D_4 = B_4(t_{23} - t_{34} - t_{35})$$

$$E_4 = t_{34}t_{25}\,sen\,\varphi_{24}\,sen\,\varphi_{35}\,t_{34}^2 t_{25}^2 t_{34}(t_{35} - t_{23}) - t_{24}t_{35}\,sen\,\varphi_{34}\,sen\,\varphi_{23}\,t_{35}^2 t_{24}^2 t_{35}(t_{34} - t_{23}).$$

Rivolgendo l'attenzione alle due equazioni (12) allo stesso modo che per le due precedenti, si trovano verificarsi le relazioni

$$N_3 + N_4 = 0\ ; \quad A_3 + A_4 = 0\ ; \quad C_3 + C_4 = 0\ . \quad . \quad . \quad . \qquad (14)$$

trattandole adunque analogamente, si vede che l'altra equazione in $x\,y$ cercata sarà

$$0=N_3(B_3+B_4)+A_3(B_3+B_4)x+C_3(B_3+B_4)y+(E_3B_4-E_4B_3)y^2\dots \quad (15)$$

Non sarà superfluo far rimarcare che il calcolo de' coefficienti $N_1\,A_1\dots A_3\,C_3$ ec. riesce nè lungo nè difficile a cagione de' fattori della forma $t_{23}t_{45}sen\varphi_{34}sen\varphi_{25}$ ec. che si ripetono in moltissimi di essi. A ciò si aggiungano le relazioni (14) colle precedenti già ottenute che sono altrettanti controlli per riconoscere la esattezza del calcolo numerico eseguito.

Riserbandoci di esporre qui appresso la ragione per cui i coefficienti di $x^2\,xy$ ed y^2 non han preso tal forma da far divenire identiche le equazioni (8) da un lato, e le (13) dall'altro, daremo i valori definitivi di $N_1\,A_1\,C_1$, $N_3\,A_3\,C_3$ ed in duplice forma onde avere controlli di calcoli numerici. Posto adunque

$$t_{12}t_{34}sen\varphi_{23}sen\varphi_{14}=a\,; \quad t_{23}t_{14}sen\varphi_{12}sen\varphi_{34}=b$$
$$t_{23}t_{14}sen\varphi_{13}sen\varphi_{24}=c\,; \quad t_{13}t_{24}sen\varphi_{23}sen\varphi_{14}=d$$

sarà pe' tre primi

$$\begin{aligned} N_1 &= \quad a-b=d-c \\ A_1 &= -a(t_{12}^2+t_{34}^2)+b(t_{23}^2+t_{14}^2)=c(t_{23}^2+t_{14}^2)-d(t_{13}^2+t_{24}^2) \\ C_1 &= \quad a[t_{34}^3-t_{12}^2(t_{13}+t_{23})]-b[t_{14}^2(t_{34}-t_{13})-t_{23}^3] \\ &= -c[t_{14}^2(t_{34}-t_{13})-t_{23}^3]+d[t_{24}^2(t_{34}-t_{23})-t_{13}^3] \end{aligned} \quad (16)$$

e per gli altri tre, ponendo

$$t_{23}t_{45}sen\varphi_{34}sen\varphi_{25}=a_1\,; \quad t_{34}t_{25}sen\varphi_{23}sen\varphi_{45}=b_1$$
$$t_{34}t_{25}sen\varphi_{24}sen\varphi_{35}=c_1\,; \quad t_{24}t_{35}sen\varphi_{34}sen\varphi_{25}=d_1$$

si ha

$$\begin{aligned} N_3 &= \quad a_1-b_1=d_1-c_1 \\ A_3 &= -a_1(t_{23}^2+t_{45}^2)+b_1(t_{34}^2+t_{25}^2)=c_1(t_{34}^2+t_{25}^2)-d_1(t_{35}^2+t_{24}^2) \\ C_3 &= \quad a_1[t_{45}^2(t_{35}+t_{34})-t_{23}^3]-b_1[t_{34}^3+t_{25}^2(t_{35}-t_{23})] \\ &= -c_1[t_{34}^3+t_{25}^2(t_{35}-t_{23})]+d_1[t_{35}^3+t_{24}^2(t_{34}-t_{23})] \end{aligned} \quad (17)$$

calcolo che si compie assai prontamente.

Che le equazioni (8) non possano equivalere e due equazioni distinte è chiaro da ciò che se fosse possibile ricavarne i valori di x ed y, o ciò

ch'è lo stesso i due altri $\frac{h^2}{6r_3^3}$ ed $\frac{h^3 dr_3}{4r_3^4 d\tau}$, questi alla lor volta farebbero determinare gli elementi dell'orbita (eccettuato il semiasse maggiore) elementi superiori in numero ai quattro angoli di posizione adoperati. Si dica altrettanto per le equazioni (13).

Da ciò appare che le equazioni (10) (11) (15) debbano subir modificazione ne' loro coefficienti. Rivolgendo in primo luogo l'attenzione al fattore $B_1 + B_2$ che moltiplica x^2, si rileva che B_1 non è tutta la parte che moltiplica x^2 nella prima delle (8) nè B_2 tutto il coefficiente di x^2 nella seconda delle (8) stesse. Ove ne' secondi membri delle (5) si fossero ritenuti i termini moltiplicati per le quinte potenze del tempo, termini nei quali entra come fattore $1+3F_2$ (vedi equazione (6) della mia memoria *sulle orbite planetarie* pubblicata nel 1° volume di questi Atti) scrivendo per ora la parte indipendente da F_2, avremmo trovato che ne' secondi membri delle (7) invece de' valori riportati avremmo dovuto scrivere

$$\left\{1 - t_{12}^2 x - t_{12}^2 (t_{13} + t_{23}) y + \frac{3}{10} t_{12}^4 x^2\right\} \left\{1 - t_{34}^2 x + t_{34}^3 y + \frac{3}{10} t_{34}^4 x^2\right\}$$

$$\left\{1 - t_{24}^2 x + t_{24}^2 (t_{34} - t_{23}) y + \frac{3}{10} t_{24}^4 x^2\right\} \left\{1 - t_{13}^2 x - t_{13}^3 y + \frac{3}{10} t_{13}^4 x^2\right\}$$

$$\left\{1 - t_{14}^2 x - t_{14}^2 (t_{34} - t_{13}) y - \frac{3}{10} t_{14}^4 x^2\right\} \left\{1 - t_{23}^2 x - t_{23}^3 y + \frac{3}{10} t_{23}^4 x^2\right\}$$

Da queste equazioni si ricavano i coefficienti modificati di x^2 ed espressi da

$$B_1 = t_{12} t_{34} \left\{ t_{12}^2 t_{34}^2 + \frac{3}{10}(t_{12}^4 + t_{34}^4) \right\} sen\varphi_{23} sen\varphi_{14} - t_{23} t_{14} \left\{ t_{23}^2 t_{14}^2 + \frac{3}{10}(t_{14}^4 + t_{23}^4) \right\} sen\varphi_{12} sen\varphi_{34}$$

$$B_2 = t_{23} t_{14} \left\{ t_{14}^2 t_{23}^2 + \frac{3}{10}(t_{23}^4 + t_{14}^4) \right\} sen\varphi_{13} sen\varphi_{24} - t_{13} t_{24} \left\{ t_{13}^2 t_{24}^2 + \frac{3}{10}(t_{13}^4 + t_{24}^4) \right\} sen\varphi_{23} sen\varphi_{14}$$

onde si trae

$$\frac{B_1 + B_2}{sen\varphi_{23}\, sen\varphi_{14}} = t_{23} t_{14} \left\{ t_{14}^2 t_{23}^2 + \frac{3}{10}(t_{23}^4 + t_{14}^4) \right\} - t_{13} t_{24} \left\{ t_{13}^2 t_{24}^2 + \frac{3}{10}(t_{13}^4 + t_{24}^4) \right\}$$
$$+ t_{12} t_{34} \left\{ t_{12}^2 t_{34}^2 + \frac{3}{10}(t_{12}^4 + t_{34}^4) \right\}$$

e quindi ancora $B_1 + B_2 = 0$ essendo il secondo membro identicamente eguale a zero. Il valore adunque di B_1 modificato è

$$\begin{aligned} B_1 = & \quad a\left\{ t_{12}^2 t_{34}^2 + \frac{3}{10}(t_{12}^4 + t_{34}^2) \right\} - b\left\{ t_{23}^2 t_{14}^2 + \frac{3}{10}(t_{14}^4 + t_{23}^4) \right\} \\ = & -c\left\{ t_{23}^2 t_{14}^2 + \frac{3}{10}(t_{14}^4 + t_{23}^4) \right\} + d\left\{ t_{13}^2 t_{24}^2 + \frac{3}{10}(t_{13}^4 + t_{24}^4) \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

ed operando in modo analogo si trova per B_3

$$
\begin{aligned}
B_3 = {} & a_1 \left\{ t^2_{23} t^2_{45} + \frac{3}{10}\left(t^4_{23} + t^4_{45}\right) \right\} - b_1 \left\{ t^2_{34} t^2_{25} + \frac{3}{10}\left(t^4_{25} + t^4_{34}\right) \right\} \\
= {} & - c_1 \left\{ t^2_{34} t^2_{25} + \frac{3}{10}\left(t^4_{25} + t^4_{34}\right) \right\} + d_1 \left\{ t^2_{24} t^2_{35} + \frac{3}{10}\left(t^4_{24} + t^4_{35}\right) \right\}
\end{aligned} \quad . \; . \; (19)
$$

Ad ottenere i valori completi di D_1 D_3 non bastando di ritenere ne' secondi membri delle (5) fino ai termini che moltiplicano le quarte potenze del tempo, si terrà conto dei termini successivi tenendo presenti le equazioni (5) (6) (7) della citata memoria *sulle orbite planetarie* non che le equazioni (14) (15) della seconda parte del lavoro medesimo.

Esprimendo adunque le aje n_{12} n_{23} ec. colla approssimazione richiesta dall'indole delle attuali ricerche si trova

$$
\begin{aligned}
\frac{n_{12}}{h\sqrt{p}\,t_{12}} &= 1 - t^2_{12}x - t^2_{12}(t_{13}+t_{23})y + \frac{3}{10}t^4_{12}x^2 + t^2_{12}(t_{13}+t_{23})(t^2_{12}+t_{13}t_{23})xy \\
\frac{n_{34}}{h\sqrt{p}\,t_{34}} &= 1 - t^2_{34}x + t^3_{34}y + \frac{3}{10}t^4_{34}x^2 - t^5_{34}xy \\
\frac{n_{13}}{h\sqrt{p}\,t_{13}} &= 1 - t^2_{13}x - t^3_{13}y + \frac{3}{10}t^4_{13}x^2 + t^5_{13}xy \\
\frac{n_{24}}{h\sqrt{p}\,t_{24}} &= 1 - t^2_{24}x + t^2_{24}(t_{34}-t_{23})y + \frac{3}{10}t^4_{24}x^2 + t^2_{24}(t_{23}-t_{34})(t^2_{24}-t_{23}t_{34})xy \\
\frac{n_{23}}{h\sqrt{p}\,t_{23}} &= 1 - t^2_{23}x - t^3_{23}y + \frac{3}{10}t^4_{23}x^2 + t^5_{23}xy \\
\frac{n_{14}}{h\sqrt{p}\,t_{14}} &= 1 - t^2_{14}x + t^2_{14}(t_{34}-t_{13})y + \frac{3}{10}t^4_{14}x^2 + t^2_{14}(t_{13}-t_{34})(t^2_{14}-t_{13}t_{34})xy
\end{aligned} \quad (20)
$$

Riserbandoci di dare qui appresso la ragione per cui non si vedono comparire in questi ultimi sviluppi tutti i termini che nella loro composizione darebbero luogo al coefficiente di y^2, formeremo i valori corretti di D_1 D_2 i quali sono

$$
\begin{aligned}
D_1 = {} & t_{12}t_{34}\left\{ t^2_{12}(t_{13}+t_{23})(t^2_{12}+t_{13}t_{23}) + t^2_{34}t^2_{12}(t_{13}+t_{23}) - t^3_{34}t^2_{12} - t^5_{34} \right\} sen\,\varphi_{23}\, sen\,\varphi_{14} \\
& - t_{23}t_{14}\left\{ t^2_{14}(t_{13}-t_{34})(t^2_{14}-t_{13}t_{34}) - t^2_{14}t^2_{23}(t_{34}-t_{13}) + t^2_{14}t^3_{23} + t^5_{23} \right\} sen\,\varphi_{12}\, sen\,\varphi_{34} \\
D_2 = {} & t_{23}t_{14}\left\{ t^2_{14}(t_{13}-t_{34})(t^2_{14}-t_{13}t_{34}) - t^2_{14}t^2_{23}(t_{34}-t_{13}) + t^2_{14}t^3_{23} + t^5_{23} \right\} sen\,\varphi_{13}\, sen\,\varphi_{24} \\
& - t_{13}t_{24}\left\{ t^2_{24}(t_{23}-t_{34})(t^2_{24}-t_{23}t_{34}) - t^2_{24}t^2_{13}(t_{34}-t_{23}) + t^2_{24}t^3_{13} + t^5_{13} \right\} sen\,\varphi_{23}\, sen\,\varphi_{14}
\end{aligned} \quad (21)
$$

dalle quali si ricava

$$\begin{aligned}\frac{D_1+D_2}{sen\varphi_{23}\, sen\varphi_{14}} &= t_{23}t_{14}\left\{t_{14}^2(t_{13}-t_{34})(t_{14}^2-t_{13}t_{34})-t_{14}^2t_{23}^2(t_{34}-t_{13})+t_{14}^2t_{23}^3+t_{23}^5\right\}\\ &+t_{12}t_{34}\left\{t_{12}^2(t_{13}+t_{23})(t_{12}^2+t_{13}t_{23})+t_{34}^2t_{12}^2(t_{13}+t_{23})-t_{34}^3t_{12}^2-t_{34}^5\right\}\\ &-t_{13}t_{24}\left\{t_{24}^2(t_{23}-t_{34})(t_{24}^2-t_{23}t_{34})-t_{34}^2t_{13}^2(t_{34}-t_{23})+t_{24}^2t_{13}^3+t_{13}^5\right\}\end{aligned}$$

in quest' ultima il secondo membro annullandosi pe' termini che identicamente si elidono, si ha $D_1+D_2=0$. Si ricava adunque pel valore di D_1 l'equazione

$$\begin{aligned}D_1= &\quad a\left\{t_{12}^2(t_{13}+t_{23})(t_{12}^2+t_{13}t_{23})-t_{34}^5+t_{12}^2t_{34}^2(t_{13}+t_{23}-t_{34})\right\}\\ &-b\left\{t_{14}^2(t_{13}-t_{34})\ t_{14}^2-t_{13}t_{34})+t_{23}^5+t_{14}^2t_{23}^2(t_{13}+t_{23}-t_{34})\right\}\\ =&-c\left\{t_{14}^2(t_{13}-t_{34})(t_{14}^2-t_{13}t_{34})+t_{23}^5+t_{14}^2t_{23}^2(t_{13}+t_{23}-t_{34})\right\}\\ &+d\left\{t_{24}^2(t_{23}-t_{34})(t_{24}^2-t_{23}t_{34})+t_{13}^5+t_{24}^2t_{13}^2(t_{13}+t_{23}-t_{34})\right\}\end{aligned} \quad \ldots (22)$$

Onde della equazione

$$0=N_1+A_1x+B_1x^2+C_1y+D_1xy+E_1y^2$$

si sono finora determinati tutti i coefficienti, l'ultimo eccettuato.

Similmente per trovare i valori completi di D_3 D_4 fa d'uopo introdurre nelle equazioni (12) i termini di cui non si era tenuto conto in un primo sviluppo. Ciò facendo tali equazioni diventano

$$\begin{aligned}\frac{n_{23}}{t_{23}\sqrt{p}}&=1-t_{23}^2x-t_{23}^3y+\frac{3}{10}t_{23}^4x^2+t_{23}^5xy\\ \frac{n_{45}}{t_{45}\sqrt{p}}&=1-t_{45}^2x+t_{45}^2(t_{35}+t_{34})y+\frac{3}{10}t_{45}^2x^1-t_{45}^2(t_{34}+t_{35})(t_{45}^2+t_{34}t_{35})xy\\ \frac{n_{24}}{t_{24}\sqrt{p}}&=1-t_{24}^2x+t_{24}^2(t_{34}-t_{23})y+\frac{3}{10}t_{24}^4x^2+t_{24}^2(t_{23}-t_{34})(t_{24}^2-t_{23}t_{34})xy\\ \frac{n_{35}}{t_{35}\sqrt{p}}&=1-t_{35}^2x+t_{35}^3y+\frac{3}{10}t_{35}^4x^2-t_{35}^5xy\\ \frac{n_{34}}{t_{34}\sqrt{p}}&=1-t_{34}^2x+t_{34}^3y+\frac{3}{10}t_{34}^4x^2-t_{34}^5xy\\ \frac{n_{25}}{t_{25}\sqrt{p}}&=1-t_{25}^2x+t_{25}^2(t_{35}-t_{23})y+\frac{3}{10}t_{25}^4x^2+t_{25}^2(t_{23}-t_{35})(t_{25}^2-t_{23}t_{35})xy\end{aligned} \quad (23)$$

Ricavando da queste, come si è fatto per le (21) i valori di D_3 D_4 sarà

aumentando di una unità gl' indici delle stesse (21)

$$D_3 = t_{23}t_{45}\left\{ t_{23}^2(t_{24}+t_{34})(t_{23}^2+t_{24}t_{34})+t_{45}^2t_{23}^2(t_{24}+t_{34})-t_{45}^3t_{23}^2-t_{45}^5 \right\} sen\varphi_{34}\,sen\varphi_{25}$$

$$-t_{34}t_{25}\left\{ t_{25}^2(t_{24}-t_{45})(t_{25}^2-t_{24}t_{45})-t_{25}^2t_{34}^2(t_{45}-t_{24})+t_{25}^2t_{34}^3+t_{34}^5 \right\} sen\varphi_{23}\,sen\varphi_{35}$$

$$D_4 = t_{34}t_{25}\left\{ t_{25}^2(t_{24}-t_{45})(t_{25}^2-t_{24}t_{45})-t_{25}^2t_{34}^2(t_{45}-t_{24})+t_{25}^2t_{34}^3+t_{34}^5 \right\} sen\varphi_{24}\,sen\varphi_{35}$$

$$-t_{24}t_{35}\left\{ t_{35}^2(t_{34}-t_{45})(t_{35}^2-t_{34}t_{45})-t_{35}^2t_{24}^2(t_{45}-t_{34})+t_{35}^2t_{24}^3+t_{24}^5 \right\} sen\varphi_{34}\,sen\varphi_{25}$$

qui ancora troviamo verificarsi identicamente la relazione $D_3+D_4=0$, e si ottiene

$$\begin{aligned} D_3 = &\quad a_1\left\{ t_{23}^5-t_{45}^2(t_{34}+t_{35})(t_{45}^2+t_{34}t_{35})+t_{23}^2t_{45}^2(t_{23}-t_{34}-t_{35}) \right\} \\ & -b_1\left\{ t_{25}^2(t_{23}-t_{35})(t_{25}^2-t_{23}t_{35})-t_{34}^5+t_{34}^2t_{25}^2(t_{23}-t_{34}-t_{35}) \right\} \\ = & -c_1\left\{ t_{25}^2(t_{23}-t_{35})(t_{25}^2-t_{23}t_{35})-t_{34}^5+t_{34}^2t_{25}^2(t_{23}-t_{34}-t_{35}) \right\} \\ & +d_1\left\{ t_{24}^2(t_{23}-t_{34})(t_{24}^2-t_{23}t_{34})-t_{35}^5+t_{24}^2t_{35}^2(t_{23}-t_{34}-t_{35}) \right\} \end{aligned} \quad . \; . \; (24)$$

Da ciò che finora si è esposto è chiaro che si hanno le due equazioni

$$\begin{aligned} 0 &= N_1+A_1x+B_1x^2+C_1y+D_1xy \\ 0 &= N_3+A_3x+B_3x^2+C_3y+D_3xy \end{aligned} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (25)$$

nelle quali N_1 A_1 C_1 si hanno dalle (16) B_1 da (18) e D_1 da (22). Come ancora N_3 A_3 C_3 si ottengono dalle (17), B_3 dalle (19) e D_3 da (24). Siccome fra i dati non figurano le distanze, ma solo angoli di posizione e tempi corrispondenti, tali equazioni potranno essere adoperate quando il problema si voglia risolvere impiegando sei angoli di posizione, e poi, a calcolo finito, una distanza per avere il semiasse maggiore espresso in parti di questa distanza medesima. Chiaro apparisce che un altro sistema di angoli φ_3 φ_4 φ_5 φ_6 corrispondenti ai tempi t_3 t_4 t_5 t_6 conduce ad una terza equazione della forma delle (25) potremo perciò in queste e nell' altra che puossi avere, far figurare una terza incognita (per raggiungere una soluzione meglio approssimata) incognita che potrebbe, per esempio essere la derivata seconda di r_3, o una sua funzione. Ma riserbandomi di ciò fare in altro lavoro sarò qui pago di determinare i coefficienti della terza equazione in parola.

A raggiungere tale scopo basterà dare i valori delle aje come ne' sistemi

di equazioni (20) e (23) e si troverà rammentando sempre che i sviluppi si fanno relativamente ad r_3 e derivate,

$$\begin{aligned}
\frac{n_{34}}{t_{34}\sqrt{p}} &= 1 - t^2_{34}x + t^3_{34}y + \frac{3}{10}t^4_{34}x^2 - t^5_{34}xy \\
\frac{n_{56}}{t_{56}\sqrt{p}} &= 1 - t^2_{56}x + t^2_{56}(t_{36}+t_{35})y + \frac{3}{10}t^4_{56}x^2 - t^2_{56}(t_{35}+t_{36})(t^2_{56}+t_{35}t_{36})xy \\
\frac{n_{35}}{t_{35}\sqrt{p}} &= 1 - t^2_{35}x + t^3_{35}y + \frac{3}{10}t^4_{35}x^2 - t^5_{35}xy \\
\frac{n_{46}}{t_{46}\sqrt{p}} &= 1 - t^2_{46}x + t^2_{46}(t_{36}+t_{34})y + \frac{3}{10}t^4_{46}x^2 - t^2_{46}(t_{34}+t_{36})(t^2_{46}+t_{34}t_{36})xy \\
\frac{n_{45}}{t_{45}\sqrt{p}} &= 1 - t^2_{45}x + t^2_{45}(t_{35}+t_{34})y + \frac{3}{10}t^4_{45}x^2 - t^2_{45}(t_{34}+t_{35})(t^2_{45}+t_{34}t_{35})xy \\
\frac{n_{36}}{t_{36}\sqrt{p}} &= 1 - t^2_{36}x + t^3_{36}y + \frac{3}{10}t^4_{36}x^2 - t^5_{36}xy
\end{aligned} \qquad (26)$$

e qui ponendo, a somiglianza delle notazioni ed abbreviazioni precedenti

$$t_{34}t_{56}\,sen\,\varphi_{35}\,sen\,\varphi_{36} = a_2 \quad ; \quad t_{45}t_{36}\,sen\,\varphi_{34}\,sen\,\varphi_{56} = b_2$$

$$t_{45}t_{36}\,sen\,\varphi_{35}\,sen\,\varphi_{46} = c_2 \quad ; \quad t_{35}t_{46}\,sen\,\varphi_{45}\,sen\,\varphi_{36} = d_2$$

e la equazione della quale voglionsi determinare i coefficienti sia rappresentata da

$$0 = N_5 + A_5x + B_5x^2 + C_5y + D_5xy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

avremo subito $N_5 = a_2 - b_2 = d_2 - c_2$

$$\begin{aligned}
A_5 &= -a_2(t^2_{34}+t^2_{56}) + b_2(t^2_{45}+t^2_{36}) = c_2(t^2_{45}+t^2_{36}) - d_2(t^2_{46}+t^2_{35}) \\
C_5 &= a_2[t^3_{34}+t^2_{56}(t_{35}+t_{36})] - b_2[t^3_{36}+t^2_{45}(t_{35}+t_{34})] \\
&= -c_2[t^3_{36}+t^2_{45}(t_{35}+t_{34})] + d_2[t^3_{35}+t^2_{46}(t_{34}+t_{36})] \\
B_5 &= a_2\left[t^2_{34}t^2_{56}+\frac{3}{10}(t^4_{34}+t^4_{56})\right] - b_2\left[t^2_{45}t^2_{36}+\frac{3}{10}(t^4_{36}+t^2_{45})\right] \\
&= -c_2\left[t^2_{45}t^2_{36}+\frac{3}{10}(t^4_{36}+t^2_{45})\right] + d_2\left[t^2_{45}t^2_{36}+\frac{3}{10}(t^4_{35}+t^4_{46})\right] \\
D_5 &= -a_2[t^5_{34}+t^2_{56}(t_{35}+t_{36})+t^2_{34}t^2_{56}(t_{34}+t_{35}+t_{36})] \\
&\quad + b_2[t^5_{36}+t^2_{45}(t_{34}+t_{35})(t^2_{45}+t_{34}t_{35})+t^2_{45}t^2_{36}(t_{34}+t_{35}+t_{36})] \\
&= c_2[t^5_{36}+t^2_{45}(t_{34}+t_{35})(t^2_{45}+t_{34}t_{36})+t^2_{45}t^2_{36}(t_{34}+t_{35}+t_{36})] \\
&\quad - d_2[t^5_{35}+t^2_{46}(t_{34}+t_{36})(t^2_{46}+t_{34}t_{36})+t^2_{35}t^2_{46}(t_{34}+t_{35}+t_{36})]
\end{aligned}$$

e così vengono determinati i coefficienti della equazione (27). Ove aves-

simo voluto far figurare nelle equazioni (25) e (27) anche il termine in y^2, gli sviluppi (20) (23) (26) non avrebbero forniti tutti i termini che entrano a comporre il coefficiente di y^2, e sarebbe stato necessario ricorrere fino ai termini moltiplicati per le settime potenze del tempo nelle equazioni che danno i valori delle aje n_{12} n_{23} ec. ed estesi fino ai termini che moltiplicano le seste potenze del tempo inclusivamente nella citata memoria *sulle orbite planetarie* nelle equazioni (6) e (7) della prima parte e (14) e (15) della seconda. È d'uopo intanto mostrare che in una prima approssimazione il termine in y^2 è trascurabile.

Infatti avendo indicato con h^2 la somma delle masse delle stelle componenti il sistema binario, può h^2 servir di misura allo spazio percorso con moto uniforme dalla stella satellite verso la centrale (supposta immobile) all'unità di distanza, e nell'unità di tempo che potremo assumere esser data dall'anno sidereo. Alla distanza r_3 fra le due stelle tale spazio diventa $\frac{h^2}{r_3^2}$, ammettendo che come nel nostro sistema solare la legge dell'attrazione segua, nel sistema binario, nella inversa quadrata delle distanze. Onde lo spazio percorso con moto uniformemente accelerato, nella stessa unità di tempo, cioè lo spazio di cui la stella satellite cade verso la centrale sarà $\frac{h^2}{2r_3^2}$. Ciò posto il seno verso dell'arco percorso dal satellite in un anno di tempo ed in un cerchio di raggio r_3 sarà $\frac{h^2}{2r_3^3}$, e quindi il coseno dell'arco stesso è $1-\frac{h^2}{2r_3^3}$. Chiamando adunque ω l'arco percorso, ricordando essersi fatto $x=\frac{h^2}{6r_3^3}$, avremo la relazione $x=\frac{1}{3}(1-cos\,\omega)$. Chiaro adunque apparisce che impiegandosi ordinariamente molti anni per compiersi un giro dalla stella satellite, ω è un molto piccolo angolo, e perciò x risulta molto inferiore all'unità. Altrettanto può dirsi di y ch'è una funzione della derivata di r_3 moltiplicata per x, e di cui il valore è altrettanto più piccolo quanto meno eccentrica è l'orbita nella quale la stella satellite si move. Così resta giustificato il trascurarsi le potenze superiori di x ed y.

Onde più chiaramente si scorga che y è molto piccolo non solo, ma inferiore ad x, basta riflettere che essendo r_2 r_3 due raggi vettori corrispondenti ai tempi t_2 t_3, si ha prossimamente (ove il valore di t_{23} sia abbastanza piccolo)

$$\frac{h^2}{6r_2^3}=\frac{h^2}{6r_3^3}-\theta_{23}\,d.\frac{h^2}{6r_3^3}$$

ricordando essere $\theta_{23}=h(t_3-t_2)$, $y=\frac{h^3 dr_3}{4r_3^4 d\tau}$ si trova $\frac{h^2}{6r_2^3}=\frac{h^2}{6r_3^3}+2t_{23}y$.
Posto $x_1=\frac{h^2}{6r_2^3}$, si può far vedere essere x_1 piccola quantità, e positiva come x. Verrà adunque $y=\frac{1}{2t_{23}}(x_1-x)$.

Viene in tal guisa confermato perchè nelle equazioni dalle quali si vogliono ricavare i valori di x, y, possano non figurare (per la determinazione approssimata de' medesimi) i termini con y^2, ed anche altri ne' quali si presenta $\frac{y^2}{x}$.

2. Esporrò ora brevemente le formole da adoperare nel caso che dalle osservazioni siansi forniti gli angoli di posizione φ_1 φ_2 φ_3 φ_4 φ_5 non che le distanze ρ_2 ρ_4 scelte a piacere fra le cinque. Poichè le distanze ρ_2 ρ_4 sono note è noto altresì $\frac{\rho_2}{\rho_4}$, o, ciò che torna lo stesso si conoscono i rapporti $\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1\rho_4}$, $\frac{\rho_3\rho_2}{\rho_3\rho_4}$, $\frac{\rho_5\rho_2}{\rho_5\rho_4}$. Quindi dalle equazioni (5) e loro analoghe avremo facilmente

$$\frac{t_{14}\rho_2 \, sen\, \varphi_{12}}{t_{12}\rho_4 \, sen\, \varphi_{14}}=\frac{1-t_{12}^2x-t_{12}^2(t_{13}+t_{23})y+\frac{3}{10}t_{12}^4x^2+t_{12}^2(t_{13}+t_{23})(t_{12}^2+t_{13}t_{23})xy}{1-t_{14}^2x+t_{14}^2(t_{34}-t_{13})y+\frac{3}{10}t_{14}^4x^2+t_{14}^2(t_{13}-t_{34})(t_{14}^2-t_{13}t_{34})xy}$$

$$\frac{t_{34}\rho_2 \, sen\, \varphi_{23}}{t_{23}\rho_4 \, sen\, \varphi_{34}}=\frac{1-t_{23}^2x-t_{23}^3y+\frac{3}{10}t_{23}^4x^2+t_{23}^5xy}{1-t_{34}^2x+t_{34}^3y+\frac{3}{10}t_{34}^4x^2-t_{34}^5xy}$$

$$\frac{t_{45}\rho_2 \, sen\, \varphi_{25}}{t_{25}\rho_4 \, sen\, \varphi_{45}}=\frac{1-t_{25}^2x+t_{25}^2(t_{35}-t_{23})y+\frac{3}{10}t_{25}^4x^2+t_{25}^2(t_{23}-t_{35})(t_{25}^2-t_{23}t_{35})xy}{1-t_{45}^2x+t_{45}^2(t_{35}+t_{34})y+\frac{3}{10}t_{45}^4x^2-t_{45}^2(t_{34}+t_{35})(t_{45}^2+t_{34}t_{35})xy}$$

dalle quali possono evidentemente ricavarsi tre equazioni della stessa forma delle (25) e (27). In queste assumendo per incognite x, y ed xy si vede che la soluzione si riduce a ricavare x da una equazione di secondo grado.

Resterebbe ora a mostrare come da x ed y si ricavino gli elementi dell'orbita, ma avendo in pronto altro lavoro che destinerò pel Rendiconto, e di cui ho fatto parola nel principio di questa memoria, lavoro

in cui questo argomento è trattato, me ne astengo onde evitare inutili ripetizioni. Aggiungo soltanto che se invece delle distanze ρ_2, ρ_4 fossero note le ρ_3, ρ_5 si sarebbero formate le equazioni tenendo presenti i rapporti $\frac{P_1 P_3}{P_1 P_5}$, $\frac{P_2 P_3}{P_2 P_5}$, $\frac{P_4 P_3}{P_4 P_5}$, e ciò valga perchè s' intenda il modo da tenere nelle altre combinazioni.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA
DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

DEL PERIODO DIURNO DELL' ELETTRICITÀ ATMOSFERICA E DELLE SUE ATTENENZE CON QUELLO DELLE CORRENTI TELLURICHE

MEMORIA

DEL SOCIO ORDINARIO L. PALMIERI

letta nell' adunanza del dì 11 ottobre 1864.

Quando un filo metallico isolato percorre un lungo tratto nell'aria e poscia co' suoi estremi comunichi con due lamine immerse nel suolo ad una mediocre profondità, questo filo suole essere attraversato da correnti elettriche le quali si rendono palesi mercè un galvanometro interposto nel circuito. Queste correnti talora derivano dalla disuguale ossidazione o tendenza delle lamine, spesso sono effetto dell' influsso dell' elettricità atmosferica che manifestasi in occasione delle piogge e dei temporali, ma ce n'ha di quelle che con varia intensità e costante direzione sembrano propriamente provenire dal suolo, onde si ebbero il nome di correnti telluriche. Esse si appalesano solo con fili di molta lunghezza e scemano infossando le lamine più profondamente nel suolo. Sia quale si voglia la direzione del filo, le suddette correnti non mancano: ma, poste le altre cose eguali, le variazioni sembrano maggiori nel senso de' paralleli e le intensità assolute maggiori in quello de' meridiani. Dopo le prime indagini del Macrini, il Lamont, il Matteucci, il Secchi ed altri fecero degli studii sul proposito, e quest' ultimo avuti a sua disposizione due fili telegrafici uno perpendicolare al meridiano magnetico e l'altro secondo il meridiano anzidetto, coadiuvato dal signor Jacobini, ha potuto non solo paragonare le due correnti telluriche, ma vederne il periodo diurno. Ridotte in curve le osservazioni del P. Secchi le ho

espresse nella figura A, denominando *corrente equatoriale* quella che cammina pel primo filo, e *meridiana* quella che va pel secondo. Parecchie ipotesi sonosi escogitate per dar ragione di siffatte correnti. Augusto de la Rive sperò vedervi la conferma della sua ipotesi per la quale delle correnti elettriche attraversano continuamente il globo da'poli all'equatore, ma le correnti equatoriali non favoriscono il concetto dell'illustre fisico di Ginevra. Altri ripetono le anzidette correnti delle variazioni d'intensità del magnetismo terrestre, per modo che sarebbero correnti d'induzione, senza por mente alle condizioni che si richiedono per avere siffatte correnti. Io invece son di credere; che le correnti telluriche siano una conseguenza dell'elettricità atmosferica.

Prima di tutto credo impossibile discernere le correnti puramente telluriche da quelle che direttamente procedono dall'influsso dell'elettricità atmosferica nel suo periodo diurno naturale. E se le correnti dette telluriche si perturbano co'temporali o con le piogge, ciò dinota che in siffatte congiunture il consueto periodo diurno dell'elettricità atmosferica sparisce per dar luogo a quelle manifestazioni elettriche così cospicue, secondo la legge da me annunziata. Non dico già che pe' fili non passino correnti che attraversano il suolo, perocchè mi par chiaro che il filo ed il suolo costituendo un medesimo circuito, non può in una sola parte aversi la manifestazione dell'elettricità dinamica; ma credo non esser possibile discernere correnti le quali provengano unicamente dal suolo per modo che il filo sia il semplice conduttore di derivazione di siffatte correnti. Imperciocchè l'elettricità dell'aria attua non pure il suolo, ma eziandio i fili, e però essendo il circuito chiuso, facilmente si potranno avere segni di correnti. Nel periodo diurno della elettricità atmosferica si ha nell'aria una tensione più forte di giorno, fino ad alcune ore dopo il tramonto, che di notte; e quindi le regioni diurne della terra debbono essere attuate ad elettricità negativa più forte da oriente in occidente, e però per l'equilibrio si richiede che il suolo tenda a scaricarsi di occidente in oriente quale è appunto la direzione della corrente equatoriale; con simile ragionamento si dimostrerebbe come la corrente meridiana nelle nostre latitudini debba andare da nord a sud. Quando un filo sia molto inclinato all'orizzonte sicchè si elevi sulla cima di un monte, allora è chiaro che la parte più elevata del filo e del suolo dovrà patire più forte influsso, e quindi dovrà attuarsi più fortemente ad elettricità negativa, e però la corrente avrà tendenza ad andare di basso in alto come risulta dalle recenti investigazioni del Matteucci.

Se si potessero avere de' fili talegrafici a disposizione di un osservatorio e si potessero per qualche tempo fare osservazioni orarie comparative tra la elettricità atmosferica e le correnti telluriche, risulterebbe forse chiara la dimostrazione di quello che io dico; ma siccome le osservazioni regolari di meteorologia elettrica, perchè di fresca data, non sono ancora diffuse abbastanza, e perchè sebbene le società ed i governi si giovino de' risultamenti pratici della scienza, come per esempio del telegrafo, pure non sono gran fatto disposti a favorirne l'incremento, così io ho potuto fare non pochi studî sul periodo diurno dell'elettricità atmosferica, ma non ho potuto istituire confronti con le correnti telluriche. Prendendo dunque la sola serie oraria delle correnti telluriche fatta dal P. Secchi e dal Jacobini ridotta in curve espresse dalla fig. *A*, ho potuto paragonarla con quelle fatte sulla Specola Meteorologica della nostra Università di 15 in 15 minuti con la elettricità atmosferica, ridotte parimenti a curve. E quantunque le osservazioni non siano fatte nelle stesse condizioni e sotto lo stesso cielo, pure si scorge tra il periodo delle correnti telluriche e quello dell' elettricità atmosferica una corrispondenza assai manifesta.

Dalle curve che io presento per dare un'idea del periodo diurno dell' elettricità atmosferica si vede come anche ne' giorni più calmi e sereni vi siano delle varietà e degli spostamenti, per cui una curva non somiglia mai perfettamente ad un' altra.

La fig. 1ª esprime il periodo elettrico del giorno 3 settembre di questo anno (1864) il quale fu calmo e perfettamente sereno e precedette il temporale che scoppiò la notte seguente verso le 4 a. m., sebbene parecchie ore prima si avvertisse un lento corruscare lontano sotto l'orizzonte. In essa si vede un forte massimo matutino il quale precede di un' ora e quarto il tempo in cui quel massimo suole appalesarsi.

Nella fig. 2ª è espresso il periodo diurno del dì 7 settembre, il primo giorno perfettamente sereno dopo le piogge che durarono interrotte per due giorni. Soffiava debole vento di N. E.

Il giorno seguente 8 fu calmo e sereno del pari che il giorno 9: le curve sono espresse dalle fig. 3 e 4.

La fig. 5 finalmente dinota il periodo del dì 12 che si distingue per un forte massimo di sera che annunzia le nubi e la pioggia del giorno seguente.

Dalle curve che ho riportate si vede come anche le giornate le più regolari, dominando i medesimi venti, non si rassomigliano. Il fatto più

costante è il massimo del mattino il quale sebbene tenda a manifestarsi verso le 9 pure talvolta anticipa come si vede nella figura 1ª e talvolta ritarda siccome è chiaro dalle fig. 2 e 5.

Da alcune serie di confronto tra osservazioni contemporanee fatte alla specola Universitaria ed all'Osservatorio Vesuviano risulta, che le curve sono diverse, sia per un massimo pomeridiano che al Vesuvio per lo più si mostra verso le due e mezzo, sia pel valore assoluto delle tensioni contemporanee che talvolta è maggiore al Vesuvio talvolta a Napoli.

Quello che mi pare messo fuori di ogni dubbio è , che quando a cielo sereno si hanno de' forti massimi nel corso della giornata, o che intervengono alle ore consuete o ad ore diverse, potete con sicurezza prevedere le nubi e probabilmente la pioggia. Que'massimi più cospicui che precedono le nubi possono sorgere improvisi alcune ore prima che le nubi si manifestano senza alcun riguardo di ora, e possono più o meno accostarsi alle ore consuete come si vede nelle figure 1 e 5.

---

(1) Le osservazioni sono state fatte da me, e per alcune ore dal mio coadiutore Prof. Eugenio Semmola, il quale per lo più ha osservato da mezzodì fino alle ore 3 ½ p. m.

Fig. A.

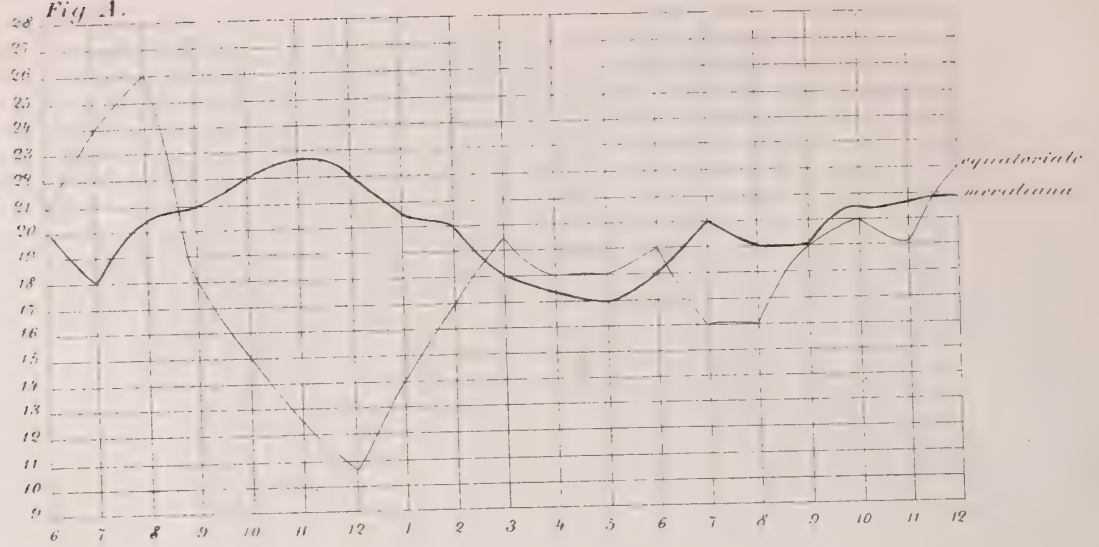



Fig. 1

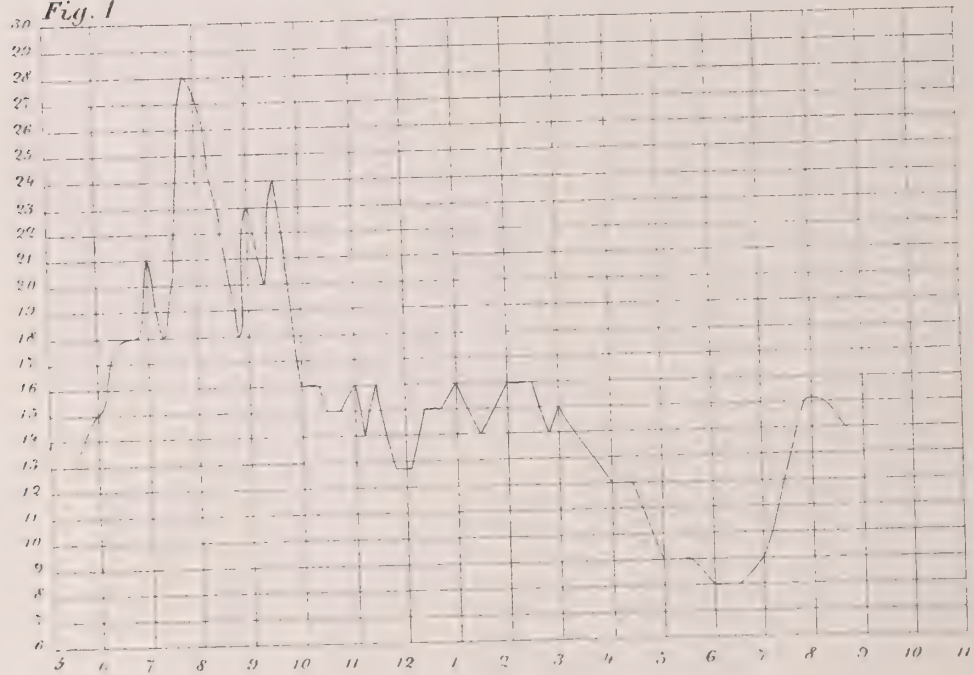
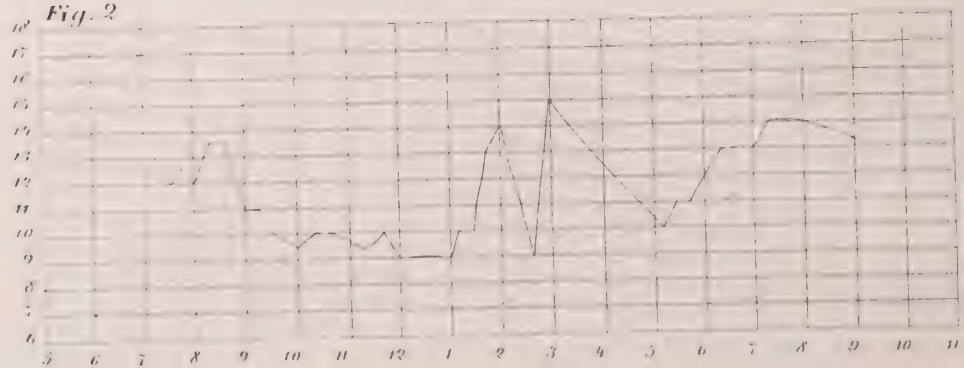
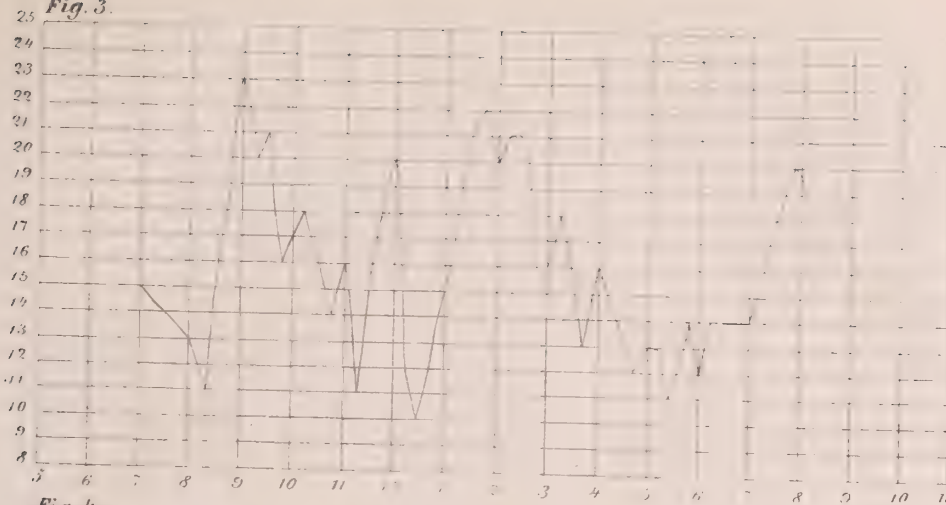
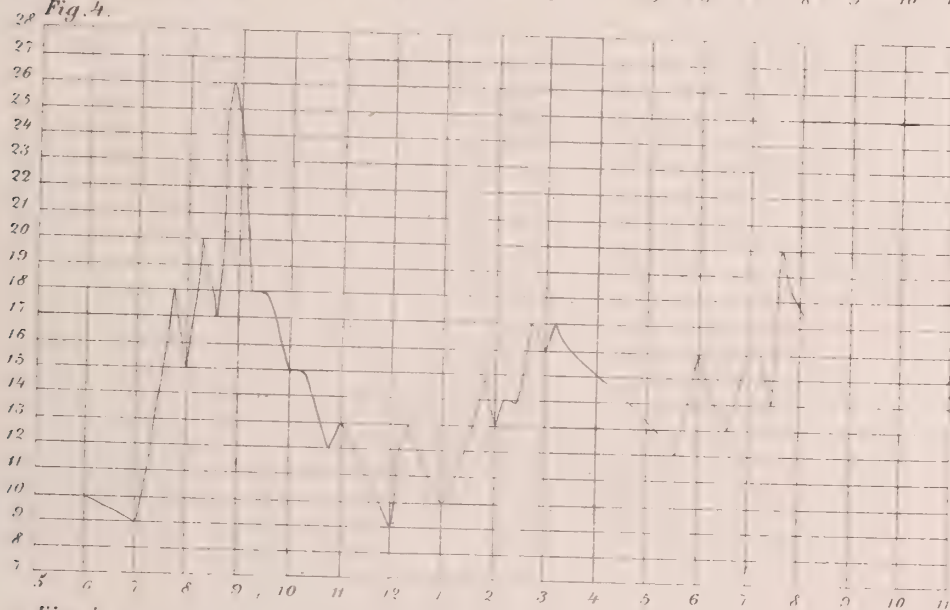
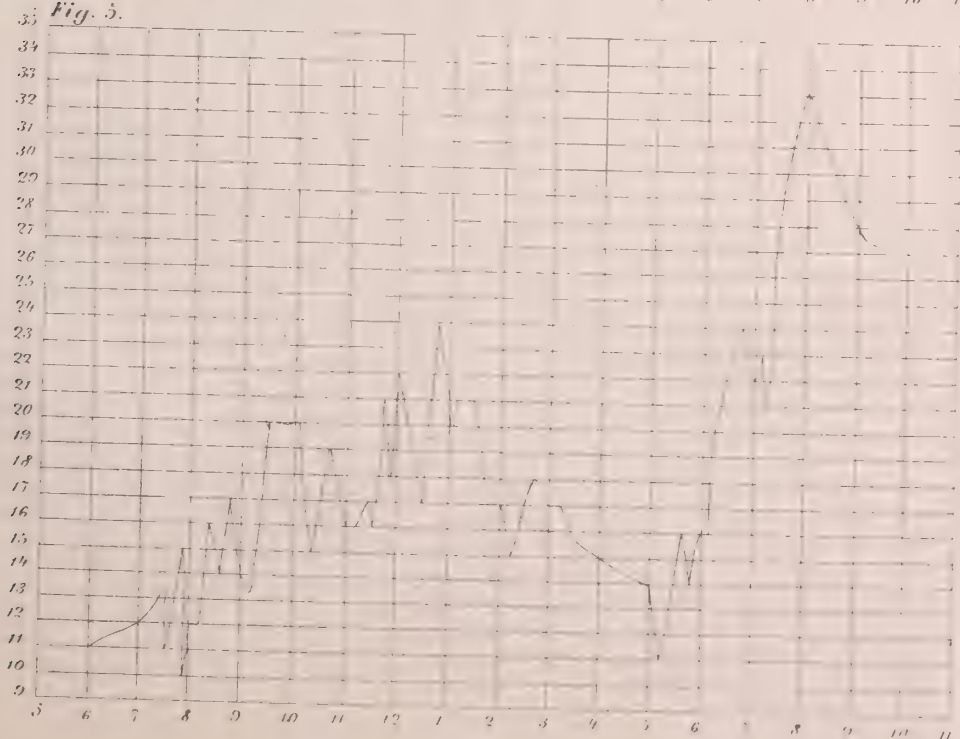



Fig. 2

Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.

Vol. II. N.° 12.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA
DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SULLA DECOMPOSIZIONE DELLE FUNZIONI FRATTE RAZIONALI

MEMORIA

DEL SOCIO ORDINARIO N. TRUDI

letta nell' adunanza del dì 22 novembre 1864.

La teoria della decomposizione delle funzioni fratte razionali in frazioni più semplici, come si usa ordinariamente di esporla, non ha quella generalità, di cui è suscettibile, e lascia molto a desiderare. In fatti in tal ricerca si mira generalmente ad ottenere delle frazioni le quali abbiano per denominatori i fattori lineari di quello della data frazione, semplici o multipli; e questo modo di decomposizione interessa certamente la integrazione de' differenziali fratti razionali. Ma la teoria di cui trattasi interessa in tante altre maniere l'algebra superiore; e molte importanti quistioni esigono che la decomposizione sia regolata diversamente.

Il problema generale di questa teoria consiste nel decomporre la frazione data in frazioni parziali, le quali abbiano per denominatori fattori assegnati di qualunque grado del suo denominatore; e ciò indipendentemente dalla conoscenza de' loro fattori lineari. Ora è questa la quistione della quale ci occuperemo nella presente memoria, la quale verrà poi seguita da una serie di applicazioni, che formeranno il soggetto di altri articoli.

La decomposizione delle frazioni sotto il punto di vista generale, testè dichiarato, e che comprende evidentemente anche la decomposizione ordinaria, non è affatto cosa nuova, essendo stata già considerata da Eu-

lero, e più tardi dal Crelle (*), il benemerito fondatore del giornale di matematiche di Berlino, così degnamente continuato dal Borchardt. Ma noi siamo stati obbligati a riprendere questo argomento per esporre dei metodi più semplici e più proprii alla decomposizione *effettiva* ed al calcolo numerico; imperciocchè trattasi di teorica cui si richiamano quistioni di pratica utilità, come si vedrà nelle applicazioni; e che perciò sembra meritevole di essere promossa nelle istituzioni algebriche.

ART. I.

Principii fondamentali

1. Si sa che ogni funzione fratta razionale di una radice di un'equazione è equivalente ad una determinata funzione intera della stessa radice, di grado inferiore a quello dell'equazione (**). Quindi, se sia data la funzione fratta $\frac{N}{M}$, dove con N ed M intendiamo funzioni intere e razionali di una variabile x, e si supponga che x debba verificar l'equazione:

$$U = k_0 x^m + k_1 x^{m-1} + \ldots + k_m = 0 \,, \tag{1}$$

in questa ipotesi la funzione fratta potrà essere trasformata in una determinata funzione intera u, generalmente di grado $m-1$; e però della forma:

$$u = a_0 x^{m-1} + a_1 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} \,.$$

Adunque la funzione intera u ha la proprietà di prendere lo stesso valore che prende la funzione fratta quando la variabile si fa uguale a

(*) Le ricerche di Eulero intorno a questo soggetto, pubblicate molto tempo dopo la sua morte, sono inserite nel Vol. I. delle *Mémoires de Pétersbourg* (an. 1809).

La memoria molto estesa del Crelle sul medesimo argomento è poi ripartita tra i volumi IX. e X. del suo giornale.

Intorno allo stesso soggetto è pure da leggersi un articolo del Clausen nel volume VIII. del detto giornale di Crelle. E da ultimo una memoria del Cayley sulla partizione de' numeri nel volume delle Transazioni Filosofiche pel 1857.

(**) Questa importante proposizione di algebra superiore è ben conosciuta. V. Serret, *Cours d'alg. sup.*, pag. 38.

qualunque radice dell'equazione (1); di modo che sussisterà l'eguaglianza:

$$\frac{N}{M} = u = a_0 x^{m-1} + a_1 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} \tag{2}$$

unicamente pe' valori di x uguali e quelle radici.

2. È chiaro intanto che per ottenere la funzione u non si ha che a determinare le m costanti $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ a condizione che per ogni radice dell'equazione (1) debba verificarsi l'uguaglianza (2), o l'altra:

$$N = (a_0 x^{m-1} + a_1 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}) M . \tag{3}$$

Questa eguaglianza non è già una identità, perchè soddisfatta da soli m valori di x. Però è da riflettere che, mediante l'equazione (1) se ne possono eliminare tutte le potenze di x di grado superiore ad $m-1$, per guisa da ridurla ad un'equazione di grado $m-1$, e quindi della forma:

$$A_0 x^{m-1} + A_1 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} = 0 ;$$

i coefficienti $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ essendo funzioni date lineari delle m costanti $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$. Ma allora questa equazione di grado $m-1$, essendo sempre verificata da m valori di x, è necessariamente identica; e ne risultano le m equazioni lineari $A_0 = 0$, $A_1 = 0, \ldots, A_{m-1} = 0$, le quali porgono i valori delle m costanti; e la funzione u resta così determinata.

Tuttavolta, posto mente alla formola (3) si vede che la trasformazione non è più possibile se qualcuna delle radici dell' equazione $U = 0$ annulla una delle funzioni N, M; ond'è che la determinazione di u esige che ciascuna di queste funzioni sia prima con la funzione U.

3. Il metodo esposto per determinare la funzione u richiede che l'equazione (3) sia ridotta al grado $m-1$, eliminandone le potenze x^m, x^{m-1}, etc., i di cui valori dovranno esprimersi mediante l'equazione (1) in funzione delle potenze di grado inferiore. Ma a tal riguardo importa di tener presente che, in generale, siffatta riduzione può essere operata molto più speditamente per via della ordinaria divisione algebrica.

4. Premettiamo che in seguito, dinotando P una funzione qualunque intera e razionale di x, se si supponga effettuata la divisione di P per U fino a che si abbia un quoziente intero, per indicare esplicitamente questo *quoziente intero* ed il *residuo*, scriveremo:

$$quo. \frac{P}{U} \quad \text{e} \quad res. \frac{P}{U} .$$

Ma ordinariamente, per rendere questa notazione più concisa, soppríme-

remo il divisore U, almeno fino a che possa intendersi chiaramente e senza equivoci, e scriveremo invece:

$$quo.\mathrm{P} \qquad \mathrm{e} \qquad res.\mathrm{P}\,.$$

5. Ecco ora un teorema sul quale è fondata la riduzione poco innanzi accennata.

Supposto che la funzione P *sia ridotta al grado* m—1 *mediante l'equazione* U=0, *dico che la funzione ridotta è identica al residuo della divisione di* P *per* U (*).

In fatti essendo identicamente:

$$\mathrm{P}=\mathrm{U}.quo.\mathrm{P}+res.\mathrm{P}\,,$$

posto U=0 si ha per immediata riduzione:

$$\mathrm{P}=res.\mathrm{P}\,; \tag{4}$$

equazione soddisfatta da m valori di x, che sono le m radici dell'equazione U=0; ma frattanto mediante la stessa U=0 il primo membro della (4) può essere ridotto ad un grado inferiore ad m; ed allora, siccome il secondo membro è anch'esso di grado minore di m, perchè residuo relativo al divisore U, che è di grado m, ne segue che la funzione ridotta è necessariamente identica a questo residuo.

6. Nel caso particolare in cui il divisore U è di 1°.grado il teorema si traduce in quest'altro:

Il valore che prende la funzione P, *quando* x *si fa uguale all'unica radice dell'equazione* U=0, *equivale al residuo della divisione di* P *per* U.

Quindi, dinotata con a questa radice; o, che torna allo stesso, supposto $\mathrm{U}=x-a$, scrivendo $(\mathrm{P})_a$ per significare il valore che prende la funzione P per $x=a$, si avrà:

$$(\mathrm{P})_a=res.\frac{\mathrm{P}}{x-a}\,.$$

Così il valore della funzione P per $x=a$ si può ottenere, com'è ben conosciuto, nel residuo della divisione di P per $x-a$. Ma a tal riguardo è mestieri di rammentare che tanto il residuo, quando il quoziente di quella divisione possono essere calcolati con un procedimento rapidissimo (**), che ordinariamente va descritto negli elementi di algebra, e

(*) Questa proprietà delle funzioni intere, così semplice e così utile, non è affatto nuova; ma abbiamo dovuto darne ragione, perchè gli scrittori di elementi di algebra sogliono dimenticarla.

(**) Questo procedimento si può riassumere in ciò che segue. Supposto il divisore della forma $x-a$, per brevità chiameremo *modulo* della divisione il numero $+a$, che è il secondo termine del divi-

che acquista importanza positiva nelle ricerche delle quali ci occupiamo imperciocchè per esso, come avremo occasione di vedere, vanno ridotti ad una semplicità inattesa, de' calcoli che in altra guisa sarebbe impossibile di condurre innanzi.

7. Tornando al caso generale faremo osservare che, se la funzione P, che si tratta di ridurre a grado inferiore a quello di U, sia un prodotto di più fattori, tra' quali ve ne siano dello stesso grado di U, o di grado maggiore, si potrà, se ciò torni opportuno, cominciare dal ridurre questi fattori, e poscia sviluppare il prodotto per compiere la riduzione. Quindi risulta che la formola (3) si può dapprima ridurre alla seguente:

$$res.\,\mathrm{N} = (a_0 x^{m-1} + a_1 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1})\, res.\,\mathrm{M}\ ;$$

ed in seguito all'altra:

$$res.\,\mathrm{N} = res.\,[(a_0 x^{m-1} + a_1 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1})\, res.\,\mathrm{M}]\ .$$

sore col segno cambiato; ed allora possiamo così enunciare un principio ben noto. *Ogni coefficiente del quoziente è uguale alla somma di quello di ugual posto del dividendo, e di quello che lo precede nello stesso quoziente moltiplicato pel modulo.* Questo principio permette di calcolare l'uno dopo l'altro tutti i coefficienti del quoziente, e lo stesso resto, che perciò si considera come un altro termine del quoziente consecutivo all'ultimo. Ora il procedimento di divisione del quale è parola, non consiste che nell'applicazione del principio enunciato, diretta convenevolmente al calcolo numerico; ed a tal'effetto l'operazione suol disporsi come nel seguente esempio, nel quale il divisore è $x-2$:

$$\begin{array}{l}
\text{Divid.} = 3x^5 - 8x^4 + 9x^3 - 16x^2 + 13x + 1 \qquad \text{Mod} = +2 \\
\qquad\qquad\quad 6 \quad -4 \quad 10 \quad -12 \quad 2 \\
\hline
\text{Quoz.} = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 6x + 1 \;\big|\; +3 = \text{Resto}\ .
\end{array}$$

I termini del quoziente ed il resto si suppongono situati per ordine al di sotto de' termini del dividendo, a cominciar dal primo. Per tanto, scritto il primo termine del quoziente, il quale è conosciuto a priori, perchè il suo coefficiente è uguale al primo coefficiente del dividendo, si moltiplicherà questo coefficiente pel modulo, che giova tenere a vista invece del divisore; e si scriverà il prodotto al di sotto del secondo coefficiente del dividendo. Addizionando questi due numeri, la somma darà il secondo coefficiente del quoziente; ed uniformemente si continueranno a calcolare tutti gli altri.

Questo procedimento diviene semplicissimo quando il divisore è $x-1$ o $x+1$. Allora è superfluo di scrivere i prodotti de' coefficienti del quoziente pel modulo; ed il principio poc'anzi ricordato si riduce a dire, che: *Un coefficiente qualunque del quoziente è uguale alla somma di quello di ugual posto del dividendo, e di quello che lo precede nello stesso quoziente, preso col segno proprio o col segno contrario, secondochè il modulo è* $+1$ *o* -1. Ecco un esempio per questo caso:

$$\begin{array}{l}
\text{Divid.} = 7x^5 - 9x^4 + 0x^3 - 5x^2 + 15x - 8 \qquad \text{Mod.} = +1 \\
\text{Quoz.} = 7x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 7x + 8 \;\big|\; 0 = \text{Resto}\ .
\end{array}$$

Qui ogni coefficiente della riga inferiore si trova addizionando quello che lo sovrasta nella riga superiore, e quello che lo precede nella stessa riga inferiore.

8. Per dare un esempio della trasformazione della quale è parola al n. 1, cercheremo la funzione intera u equivalente alla funzione fratta

$$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}=\frac{x^5+3x^4-5x^3+11x^2-2x-1}{x^4+x^3-2x^2+7x-2}\ ,$$

nella ipotesi che x debba verificar l'equazione:

$$\mathrm{U}=x^3-2x^2+3x-1=0\ .$$

Essendo U di 3° grado, u sarà di grado inferiore al 3°, e però della forma:

$$u=a_0x^2+a_1x+a_2\ ;$$

e le costanti saranno definite dall'equazione:

$$res.\,\mathrm{N}=(a_0x^2+a_1x+a_2)\,res.\,\mathrm{M}\ .$$

Siccome i residui si rapportano al divisore U, si ha

$$res.\,\mathrm{N}=x^2-3x+1\qquad,\qquad res.\,\mathrm{M}=x^2-x+1\ ;$$

e quindi l'equazione precedente diviene:

$$x^2-3x+1=(a_0x^2+a_1x+a_2)(x^2-x+1)\ .$$

Sostituendo ora allo sviluppo del secondo membro il residuo della sua divisione per U, l'equazione identica, che determina le costanti, sarà da ultimo:

$$x^2-3x-1=(a_1+a_2)x^2-(2a_0+a_1-a_2)x+(a_0+a_1+a_2)\ ;$$

ed in conseguenza i valori delle costanti medesime saranno dati dalle equazioni:

$$a_1+a_2=1$$
$$2a_0+2a_1+a_2=3$$
$$a_0+\ a_1+a_2=1\ .$$

Risolvendole si trova $a_0=0$, $a_1=2$, $a_2=-1$. Quindi risulta:

$$\mathrm{U}=2x-1\ ;$$

e perciò, quando $x^3-2x^2+3x-1=0$, si ha:

$$\frac{x^5+3x^4-5x^3+11x^2-2x+1}{x^4+x^3-2x^2+7x-2}=2x-1\ .$$

9. Quantunque il metodo esposto per determinare la funzione u sia

semplice abbastanza, pure esso ha l'inconveniente, non lieve pel calcolo numerico, di esigere la introduzione di coefficienti indeterminati, che rendono fastidiose le operazioni, e specialmente le divisioni. Esporremo quindi un altro metodo, pel quale la funzione u va direttamente determinata, fondato sul seguente principio. Essendo:

$$N = uM \tag{5}$$

e nel tempo stesso $U=0$, l'equazione (5) si potrà trasformare in un'altra, la quale, senza cessare di essere intera rispetto ad x, abbia costante il coefficiente di u.

Per operare questa trasformazione cominceremo dal moltiplicare successivamente la (5) per le potenze x^0, x, x^2, ..., x^{m-1}, ed avremo il seguente sistema di m equazioni:

$$N = uM \quad , \quad Nx = uMx \quad , \quad Nx^2 = uMx^2 \,, \ldots , \, Nx^{m-1} = uMx^{m-1} .$$

Riducendo i due membri di ciascuna al grado $m-1$ mediante l'equazione $U=0$, queste equazioni divengono:

$$\begin{aligned} res.\,N \quad &= u.\,res.\,M \\ res.\,Nx \quad &= u.\,res.\,Mx \\ res.\,Nx^2 \quad &= u.\,res.\,Mx^2 \\ \cdots & \cdots \\ res.\,Nx^{m-1} &= u.\,res.\,Mx^{m-1} \;; \end{aligned}$$

ma, dando una forma esplicita ai residui che moltiplicano la u ne' secondi membri, potremo scriverle come segue:

$$\begin{aligned} res.\,N \quad &= u(\alpha_1 x^{m-1} + \beta_1 x^{m-2} + \ldots + \lambda_1 x + \mu_1) \\ res.\,Nx \quad &= u(\alpha_2 x^{m-1} + \beta_2 x^{m-2} + \ldots + \lambda_2 x + \mu_2) \\ \cdots & \cdots \\ res.\,Nx^{m-1} &= u(\alpha_m x^{m-1} + \beta_m x^{m-2} + \ldots + \lambda_m x + \mu_m) \,. \end{aligned}$$

Ora queste equazioni, che diremo *ausiliari* per la determinazione della funzione u, porgono subito quella nella quale è costante il coefficiente

di u, bastando perciò di eliminare da'secondi membri le $m-1$ potenze $x, x^2, \ldots, x^{m-1}$, riguardate come incognite a 1° grado. In generale questa eliminazione si può compiere per via di determinanti, e quindi la funzione u sarà data dall'equazione:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & . & \lambda_1 & \mu_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & . & \lambda_2 & \mu_2 \\ . & . & . & . & . \\ \alpha_m & \beta_m & . & \lambda_m & \mu_m \end{vmatrix} u = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & . & \lambda_1 & res.\,N \\ \alpha_2 & \beta_2 & . & \lambda_2 & res.\,Nx \\ . & . & . & . & . \\ \alpha_m & \beta_m & . & \lambda_m & res.\,Nx^{m-1} \end{vmatrix}.$$

Ma si comprende che lo stesso scopo si può raggiungere per altre vie, e con tutti quei mezzi che sogliono usarsi in simili casi. Per esempio, se si elimina la più alta potenza x^{m-1} tra una delle equazioni ausiliari e tutte le altre, si ha un nuovo sistema di $m-1$ equazioni co'coefficienti di u al grado $m-2$. Eliminando in seguito la potenza x^{m-2} tra una delle nuove equazioni e ciascuna delle altre, si avrebbero $m-2$ equazioni coi coefficienti di u al grado $m-3$. E, così continuando, è chiaro che il sistema verrà ridotto ad una sola equazione col coefficiente di u indipendente da x. Del rimanente ne'casi particolari la natura de'coefficienti numerici de'secondi membri delle equazioni ausiliari suggerirà quasi sempre altre combinazioni più proprie per compiere con maggior prontezza l'eliminazione di cui si tratta. Anzi avverrà sovente, come or ora vedremo, che l'espressione di u potrà risultare da una parte di quelle equazioni ; e qualche volta anche da una.

10. È importante ad osservare che per ottenere le m equazioni ausiliari basta dividere per U i due prodotti Nx^{m-1} ed Mx^{m-1} ; essendo evidente che i primi membri di quelle equazioni si hanno negli ultimi m parziali residui della prima divisione, sgombrandoli de'fattori x^{m-1}, $x^{m-2}, \ldots, x, x^0$; mentre i coefficienti di u ne'secondi membri si avranno pure negli ultimi m parziali residui della seconda divisione, sgombrandoli de'medesimi fattori.

Tuttavolta, potendo accadere che si abbia bisogno de' quozienti che risultano dal dividere per U le due funzioni N ed M, così in questi casi si potranno prima effettuare queste due divisioni, e poscia continuare a dividere per U i due prodotti $x^{m-1} res.\,N$ ed $x^{m-1} res.\,M$.

11. Applicando il metodo che abbiamo sviluppato allo stesso esempio

del n. 4, osserveremo che, essendo la funzione u di 2° grado, si richieggono tre equazioni ausiliari, che sono in forma simbolica:

$$\begin{aligned} res.\mathrm{N} \;\; &= u.\,res.\mathrm{M} \\ res.\mathrm{N}x \;&= u.\,res.\mathrm{M}x \\ res.\mathrm{N}x^2 &= u.\,res.\mathrm{M}x^2 . \end{aligned}$$

Intanto, siccome i residui si rapportano al divisore $\mathrm{U}=x^3-2x^2+3x-1$, fatte le due divisioni, com'è detto nel n. 6, si trova

$$\begin{aligned} res.\mathrm{N} &= \quad x^2-3x+1 \quad , & res.\mathrm{M} &= x^2-\;x+1 \\ res.\mathrm{N}x &= -\;x^2-2x+1 \quad , & res.\mathrm{M}x &= x^2-2x+1 \\ res.\mathrm{N}x^2 &= -4x^2+4x-1 \quad , & res.\mathrm{M}x^2 &= 0.x^2-2x+1 \;; \end{aligned}$$

e quindi le tre equazioni ausiliari per la determinazione di u divengono

$$\begin{aligned} x^2-3x+1 &= u\;(x^2-\;x+1) \\ -x^2-2x+1 &= u\;(x^2-2x+1) \\ 4x^2-4x+1 &= u\;(\qquad 2x-1)\,. \end{aligned}$$

Nulla ora è più facile che di eliminare le potenze di x da'secondi membri di queste tre equazioni; il che può farsi in più modi. Per esempio, si può prendere la differenza delle prime due; che in tal guisa si ha l'equazione:

$$2x^2-x=ux\,, \tag{6}$$

dove, come nella terza, il coefficiente di u è di 1° grado; e quindi togliendo dalla (6), moltiplicata per 2, quella terza equazione, si ha subito, com'era già noto, $u=2x-1$. Qui però bisogna notare che non era affatto necessario di ricorrere alla terza equazione, perchè la (6) può solo essa riprodurre l'espressione di u, non avendosi che a dividerla per x. Ma da un'altra parte cade quasi sott'occhio che la terza equazione può bastare da sè sola alla determinazione di u; perchè messa nella forma

$$(2x-1)^2=(2x-1)u\,,$$

non si ha che a dividerla per $2x-1$ per ritrovare il valore di u.

ART. II.

Decomposizione generale delle frazioni

12. In ciò che segue dinoteremo con N e Δ il numeratore e denominatore della data funzione fratta a decomporre in frazioni parziali, figurando perciò questi simboli funzioni intere e razionali di x; ed ammetteremo che il grado di N sia minore di quello di Δ. Ora la quistione che si tratta di risolvere è la seguente: *supposto che Δ sia un prodotto di fattori razionali primi tra loro, decomporre la data frazione in frazioni parziali aventi que' fattori per denominatori.* Distingueremo questa quistione in due casi, secondochè i fattori di Δ sono semplici o multipli, cioè dell'una o l'altra forma:

$$U = k_0 x^m + k_1 x^{m-1} + \ldots + k_m \quad , \quad U^r = (k_0 x^m + k_1 x^{m-1} + \ldots + k_m)^r .$$

CASO 1°

Frazioni parziali nascenti da' fattori semplici di Δ.

13. Sia U un fattore di Δ ed M l'altro fattore, per modo che:

$$\Delta = UM ;$$

dico che, se U ed M sono primi tra loro, la frazione data si potrà decomporre in due frazioni aventi per denominatori U ed M, e per numeratori determinate funzioni intere di gradi inferiori a quelli de'rispettivi denominatori. In fatti, se ciò è possibile, chiamando u ed N_1 i due numeratori, dovrà essere identicamente:

$$\frac{N}{\Delta} = \frac{N}{UM} = \frac{u}{U} + \frac{N_1}{M} ;$$

e quindi dovrà ancora sussistere l'uguaglianza:

$$N = uM + UN_1 \tag{1}$$

la quale, essendo U primo con M, posto $U = 0$, si riduce ad

$$N = uM ;$$

e ne risulta che per soddisfarla bisogna prendere per u la funzione in-

tera in cui si trasforma la funzione fratta $N:M$ nella ipotesi che la variabile x debba verificare l'equazione $U=0$; funzione intera completamente determinata, di grado inferiore a quello di U, che può essere calcolata co' metodi già sviluppati.

Intorno al numeratore N_1 della frazione complementale osserveremo che da (1) si ha:

$$N_1 = \frac{N - uM}{U}; \tag{2}$$

e siccome per la natura della funzione u la differenza $N-uM$ deve annullarsi per ogni radice dell'equazione $U=0$, ne segue che quella differenza è divisibile per U, e si avrà nel quoziente l'espressione di N_1; la quale adunque è una data funzione intera.

Posto ciò dividendo per M la formola (2) si ha evidentemente:

$$\frac{N_1}{M} = \frac{N - uM}{\Delta}. \tag{3}$$

Ora il grado di N è minore di quello di Δ; inoltre essendo il grado di u minore di quello di U, sarà il grado di uM minore di quello di UM, ossia di Δ; e da ciò risulta che in ciascuno de' due membri della (3) il grado del numeratore è minore di quello del denominatore. Dunque il numeratore N_1 della frazione complementale è anch'esso una funzione intera, di grado inferiore a quello del suo denominatore M, determinata dal quoziente della divisione accennata nel secondo membro della (2).

14. Ma questo secondo membro è suscettibile di una forma molto più utile nelle applicazioni. Essendo:

$$N = U\,quo.N + res.N \quad , \qquad M = U\,quo.M + res.M ,$$

si avrà

$$N - uM = U[quo.N - u\,quo.M] + res.N - u\,res.M ;$$

e sarà quindi dividendo per U:

$$N_1 = quo.N - u\,quo.M - \frac{u\,res.M - res.N}{U} .$$

Siccome il secondo membro dev'essere una funzione intera, la divisione accennata con l'ultima frazione dovrà farsi senza resto; quindi il secondo

termine del dividendo, *res.*N, che è di grado inferiore ad U, dovrà elidersi col resto che si ottiene dividendo per U il prodotto *ures.*M. Perciò l'ultimo termine della formola precedente si riduce semplicemente al quoziente intero di questa divisione; e ne risulta:

$$N_1 = quo.N - u\,quo.M - quo.(u\,res.M) . \tag{4}$$

Questa formola è da preferirsi alla (2) pel calcolo di N_1. In fatti, siccome bisogna prima trovare la funzione u mediante l'equazione:

$$res.N = u.\,res.M ,$$

ciò importa che innanzi tutto si debbano dividere per U le due funzioni N ed M; sicchè si hanno già in pronto i tre elementi *quo.*N, *quo.*M, *res.*M; e più non resta che a calcolare l'ultimo termine della (4); cioè il quoziente intero della divisione per U del prodotto *ures.*M; divisione questa generalmente più semplice di quella imposta dalla (2), perchè i due fattori del prodotto *ures.*M sono entrambi di grado inferiore ad U.

15. Se si tratta di considerare un'altro fattore di Δ, diverso da U, e però fattore M, si potrà applicare alla frazione complementale $N_1 : M$ lo stesso modo di decomposizione sviluppato a riguardo della frazione originaria; la quale allora risulterebbe decomposta in tre frazioni parziali. Ma ora è chiaro che, in generale, la frazione data si può decomporre in tante frazioni parziali quanti sono i fattori razionali primi tra loro in cui si voglia supporre decomposto il suo denominatore. Secondo quello che precede i numeratori di queste frazioni parziali si determinano l'uno dopo l'altro, considerando ogni volta una frazione complementale; ma è evidente che ciascuno può ancora essere determinato indipendentemente da tutti gli altri, potendo applicarsi a ciascuno il metodo tenuto a riguardo del numeratore u della prima frazione.

16. Per dare un esempio prenderemo a decomporre la frazione:

$$\frac{N}{\Delta} = \frac{5x^4 - 3x^3 + 7x^2 + 8x + 10}{(x^3 - 2x^2 + 3x + 1)(2x^4 - 3x^3 + 5x^2 \quad 2x + 3)} = \frac{u}{U} + \frac{N_1}{M}$$

$$U = x^3 - 2x^2 + 3x + 1 \qquad , \qquad M = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 2x + 3 .$$

Calcolo di u. La funzione u è di 2° grado; e quindi per determinarla occorrono tre equazioni ausiliari:

$$res.\,N = u\,res.\,M \quad , \quad res.\,Nx = u\,res\,Mx \quad , \quad res.\,Nx^2 = u\,res.\,Mx^2 .$$

Fatte le divisioni per U si trova

$$\begin{array}{llll} quo.\,N &= 5x + 7 & , & quo.\,M = x + 1 \\ res.\,N &= 6x^2 - 24x + 3 & , & res.\,M = x^2 - x + 2 \\ res.\,Nx &= -12x^2 - 15x + 6 & , & res.\,Mx = x^2 - x + 1 \\ res.\,Nx^2 &= -39x^2 + 30x + 12 & , & res.\,Mx^2 = x^2 - 4x - 1 \,; \end{array}$$

e le equazioni ausiliari diverranno:

$$\begin{aligned} 6x^2 - 24x + 3 &= u(x^2 - x + 2) \\ -12x^2 - 15x - 6 &= u(x^2 - x - 1) \\ -39x^2 + 30x + 12 &= u(x^2 - 4x - 1) . \end{aligned}$$

Basta prendere la differenza delle prime due per avere l'equazione in cui è costante il coefficiente di u; sicchè, senza impiegar la terza, si ha subito

$$u = 6x^2 - 3x + 3 .$$

Calcolo di N_1. L'espressione di N_1 si ha dalla formola (4); calcolandone l'ultimo termine si trova:

$$quo.(u\,res.\,M) = quo.\,[(6x^2 - 3x + 3)(x^2 - x + 2)] = 6x + 3 \;;$$

e quindi risulta:

$$N_1 = 5x + 7 - (6x^2 - 3x + 3)(x + 1) - (6x + 3) ,$$

ossia, riducendo:

$$N_1 = -(6x^3 + 3x^2 + x - 1) .$$

Dunque si ha in fine:

$$\frac{N}{\Delta} = \frac{6x^2 - 3x + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x + 1} - \frac{6x^3 + 3x^2 + x - 1}{2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 2x + 3} .$$

CASO 2°

Frazioni parziali nascenti da' fattori multipli di Δ.

18. Sia U^r un fattore di Δ ed M l'altro fattore; sarà

$$\Delta = U^r M .$$

Ora se U ed M sono primi tra loro, la frazione data si potrà decomporre, come segue, in due frazioni:

$$\frac{N}{\Delta} = \frac{N}{U^r M} = \frac{u_0}{U^r} + \frac{N_1}{U^{r-1} M} ,$$

i numeratori u_0 ed N_1 essendo determinate funzioni intere, di gradi inferiori a quelli de' rispettivi denominatori. In fatti, se la decomposizione è possibile, dovrà sussistere l'uguaglianza:

$$N = u_0 M + U N_1 , \tag{5}$$

la quale, posto $U=0$, si riduce ad

$$N = u_0 M ;$$

e ne risulta che per soddisfare la (5) bisogna prendere per u_0 la funzione intera in cui si trasforma la frazione $N:M$ nella ipotesi di $U=0$.

Ciò premesso si ha dall'eguaglianza (5)

$$N_1 = \frac{N - u_0 M}{U} ; \tag{6}$$

ed osservando che la differenza $N - u_0 M$ si annulla semprechè $U=0$, si conchiuderà chè la medesima è divisibile per U; ed il quoziente darà l'espressione di N_1.

Dividendo ora i due membri della (6) per $U^{r-1} M$ si ottiene:

$$\frac{N_1}{U^{r-1} M} = \frac{N - U_0 M}{\Delta} ,$$

ed è facile a riconoscere che il grado di $N - u_0 M$ è minore di quello di

Δ. In fatti, per ipotesi, il grado di N è minore di quello di Δ; inoltre, essendo il grado di u_0 minore di quello di U, il grado di u_0M sarà minore del grado di UM, ossia di Δ. Dunque il grado del numeratore N_1 del primo membro dell'ultima eguaglianza, che è la frazione complementale, è pur esso minore del grado del suo denominatore $U^{r-1}M$.

19. È conseguenza di tutto ciò che la frazione complementale si può sottomettere alla stessa maniera di decomposizione della frazione proposta; e si avrà quindi

$$\frac{N_1}{U^{r-1}M}=\frac{u_1}{U^{r-1}}+\frac{N_2}{U^{r-2}M};$$

u_1 ed N_2 essendo determinate funzioni intere, la prima di grado inferiore a quello di U, da definirsi mediante le due equazioni

$$U=0 \quad , \quad N_1=u_0 M ;$$

e l'altra di grado inferiore ad $U^{r-2}M$, data dal quoziente:

$$N_2=\frac{N_1-u_1 M}{U} .$$

Quindi la frazione originaria sarà decomposta in tre frazioni:

$$\frac{N}{\Delta}=\frac{u_0}{U^r}+\frac{u_1}{U^{r-1}}+\frac{N_2}{U^{r-2}M} .$$

Ma, siccome si può ripetere lo stesso procedimento a riguardo della nuova frazione complementale, e così continuare fino a che sia ridotto a zero l'esponente di U, è evidente che si avrà da ultimo:

$$\frac{N}{\Delta}=\frac{u_0}{U^r}+\frac{u_1}{U^{r-1}}+\frac{u_2}{U^{r-2}}+\ldots+\frac{u_{r-1}}{U}+\frac{N_r}{M} . \tag{7}$$

Così il fattore multiplo U^r del denominatore della data frazione dà origine ad r frazioni parziali, che hanno per denominatori le potenze U^r, $U^{r-1}, \ldots, U$; ed i cui numeratori sono determinate funzioni, tutte di grado inferiore a quello di U.

Se si avessero a considerare altri fattori di Δ, e però di M, per compiere la decomposizione si potrà trattare la frazione complementale, quando non si preferisca di operare sulla stessa frazione originaria.

20. In quanto alla determinazione effettiva de' numeratori u_0, u_1, $u_2, \ldots, u_{r-1}$ ed N_r segue da quanto precede che essi vanno calcolati l'uno dopo l'altro mediante i due sistemi di equazioni

$$N = u_0 M \quad , \quad N_1 = u_1 M \quad , \quad N_2 = u_2 M \, , \ldots , \, N_{r-1} = u_{r-1} M \; ;$$

ed

$$N_1 = \frac{N - u_0 M}{U} \, , \quad N_2 = \frac{N_1 - u_1 M}{U} \, , \quad N_3 = \frac{N_2 - u_2 M}{U} \, , \ldots , \, N_r = \frac{N_{r-1} - u_{r-1} M}{U} \; ;$$

il primo de'quali va congiunto all'equazione $U = 0$, e si riduce all'altro:

$$res.N = u_0 res.M \quad , \quad res.N_1 = u_1 res.M \quad , \quad res.N_2 = u_2 res.M \, , \quad \text{etc:}$$

mentre al secondo può sostituirsi il seguente:

$$(8) \qquad \begin{aligned} N_1 &= quo.N - u_0 \, quo.M - quo.(u_0 res.M) \\ N_2 &= quo.N_1 - u_1 \, quo.M - quo.(u_1 res.M) \\ &\text{etc:} \qquad \text{etc:} \qquad \text{etc:} \end{aligned}$$

21. È da osservare che se U è di primo grado, i numeratori $u_0, u_1, \ldots, u_{r-1}$ saranno costanti al pari di *res.*M. Allora in ciascuna delle (8) l'ultimo termine sarà nullo, e quelle formole diverranno:

$$\begin{aligned} N_1 &= quo.N - u_0 \, quo.M \\ N_2 &= quo.N_1 - u_1 \, quo.M \, . \\ &\text{etc:} \qquad \text{etc:} \qquad \text{etc:} \end{aligned}$$

22. Applicando questo metodo ad un esempio, considereremo la seguente decomposizione:

$$\frac{N}{\Delta} = \frac{3x^8 + 3x^7 + 10x^6 - 7x^3 + x^2 + 4}{(x^2 + x + 1)^3 (x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 6x + 3)} = \frac{u_0}{U^3} + \frac{u_1}{U^2} + \frac{u_2}{U} + \frac{N_3}{M} \, ,$$

$$U = x^2 + x + 1 \quad , \quad M = x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 6x + 3 \, .$$

Essendo U di 2° grado, i numeratori u_0, u_1, u_2 saranno lineari, e perciò definiti dalle tre coppie di equazioni ausiliari:

$$\begin{aligned} res.N &= u_0 res.M \quad , \quad res.N_1 = u_1 res.M \quad , \quad res.N_2 = u_2 res.M \\ res.Nx &= u_0 res.Mx \quad , \quad res.N_1 x = u_1 res.Mx \quad , \quad res.N_2 x = u_2 res.Mx \end{aligned}$$

dove i valori di N_1, N_2 sono dati dalle formole (8).

Calcolo di u_0 *ed* N_1. Fatte le divisioni abbiamo:

$$quo.N = 3x^6 + 7x^4 - 7x^3 + 1 \quad , \quad res.N = -x + 3 \quad , \quad res.Nx = 4x + 1 \; ,$$
$$quo.M = x^3 + 2x^2 + 3x + 4 \quad , \quad res.M = -x - 1 \quad , \quad res.Mx = 1 \qquad ;$$

qui si può osservare che, essendo $res.Mx = 1$, nelle tre coppie di equazioni ausiliari le prime restano inutili, perchè le seconde si riducono ad

$$u_0 = res.Nx \quad , \quad u_1 = res.N_1x \quad , \quad u_2 = res.N_2x \; ,$$

ed i valori di u_0, u_1, u_2 si avranno immediatamente ne' secondi membri di queste tre ultime equazioni. Così dalla prima si ha senza più:

$$u_0 = 4x - 1 \; .$$

quindi

$$quo.(u_0\, res.M) = quo.[(4x-1)(-x-1)] = -4 \; ;$$

e si ha in conseguenza dalla prima delle formole (8):

$$N_1 = 3x^5 - 7x^4 - 7x^3 - 1 - (4x-1)(x^3 - 2x^2 - 3x - 4) - 4$$
$$= 3x^5 - 3x^4 - 16x^3 - 14x^2 - 19x - 1 \; .$$

Calcolo di u_1 *ed* N_2. Effettuendo le divisioni si trova:

$$quo.N_1 = 3x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 16x - 1 \quad , \quad res.N_1x = 4x + 2 \; ;$$

e si ha perciò:

$$u_1 = 4x + 2 \; .$$

In seguito avremo:

$$quo.(u_1\, res.M) = quo.[(4x+2)(-x-1)] = -4 \; ,$$

e quindi, per la seconda delle formole (8):

$$N_2 = 3x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 16x - 1 - (4x-2)(x^3 - 2x^2 - 3x - 4) - 4$$
$$= -(x^4 + 13x^3 + 13x^2 + 38x + 5) \; .$$

Calcolo di u_2 *ed* N_3. Le divisioni danno:

$$quo.N_2 = -(x^2 + 12x) \quad , \quad res.N_2x = 21x + 26 \; ;$$

dunque:

$$u_2 = 21x + 26 \; .$$

Dopo ciò si ottiene:

$$quo.(u_2\, res.\, M) = quo.[(21x+26)(-x-1)] = -26;$$

e la terza delle formole (8) darà in conseguenza:

$$N_3 = -(x^2+12x) - (21x+26)(x^3+2x^2+3x+4)+26$$
$$= -(21x^4+68x^3+116x^2+174x+83 .$$

Così risulta in fine:

$$\frac{N}{\Delta} = \frac{4x+1}{(x^2+x+1)^3} + \frac{4x+2}{(x^2+x+1)^2} + \frac{21x+26}{x^2+x+1} - \frac{21x^4+68x^3+116x^2+174x+83}{x^5+3x^4+6x^3+9x^2+6x+3} .$$

23. Le funzioni $u_0, u_1, \ldots, u_{r-1}$, numeratori delle r frazioni parziali provvenienti dal fattore multiplo U^r di Δ, possono essere determinate con altro metodo, talvolta preferibile a quello che abbiamo esposto. Riducendo ad una queste r frazioni si ha dapprima

$$\frac{N}{\Delta} = \frac{u_0+u_1U+u_2U^2+\ldots+u_{r-1}U^{r-1}}{U^n} + \frac{N_r}{M}$$

e quindi facendo sparire i fratti risulta:

$$N = (u_0+u_1U+u_2U^2+\ldots+u_{r-1}U^{r-1})M + U^rN_r : \tag{9}$$

equazione la quale sussiste per qualsivoglia valore di x, unitamente alle sue derivate. Ora questa equazione e le sue successive derivate fino a quella dell'ordine $r-1$ possono determinare l'una dopo l'altra le r funzioni $u, u, \ldots, u_{r-1}$, ponendo in ciascuna $U=0$. Si osservi intanto che nell'equazione (9) e nelle sue derivate fino a quella dell'ordine prescritto, la ipotesi di $U=0$ fa sparire il termine U^rN_r, e tutto ciò che ne risulta mediante la derivazione; di modo che è assolutamente inutile di tenerne conto; e quindi la detta equazione si può ridurre all'altra:

$$N = (u_0+u_1U+u_2U^2+\ldots+u_{r-1}U^{r-1})M . \tag{10}$$

Ciò premesso, posto $U=0$, si ha l'equazione

$$N = u_0M ,$$

la quale determina senza più la funzione u_0. Inoltre derivando la (10), e ponendovi in seguito U=0, risulta

$$N' = u_0 M' + u'_1 M + u_1 U' M ;$$

e questa equazione determina l'altra funzione u_1, imperocchè, essendo conosciuta la funzione u_0, lo è pure la sua derivata u'_0. Trovata l'espressione di u_1, per avere quella di u_2 si prenderà la seconda derivata dalla (10), e vi si porrà U=0; e così continuando è chiaro che si perverrà a determinare tutte le r funzioni $u_0, u_1, \ldots, u_{r-1}$.

Questa ricerca si rende più semplice ponendo:

$$(11) \qquad u = u_0 + u_1 U + u_2 U^2 + \ldots + u_{r-1} U^{r-1}.$$

Allora la (10) diviene $N = uM$; e quindi prendendo le successive derivate col noto teorema di Leibnitz si ha subito il sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} N &= uM \\ N' &= uM' + u'M \\ N'' &= uM'' + 2u'M' + u''M \\ N''' &= uM''' + 3u'M'' + 3u''M' + u'''M \\ \text{etc:} & \quad \text{etc:} \quad \text{etc:} \quad \text{etc:} \end{aligned}$$

le quali dovranno poi ridursi mediante l'equazione U=0, al pari de' valori di u, u', u'', etc., che verranno dati dalla formola (11).

ART. III.

Frazioni parziali ordinarie

24. Chiamiamo frazioni parziali ordinarie quelle i di cui denominatori sono della forma $U^r = (x-a)^r$, e quindi $U = x - a$. Supposto che Δ abbia il fattore U^r, essendo U funzione di 1° grado, un tal fattore darà origine ad r frazioni parziali aventi per denominatori le potenze $U^r, U^{r-1}, \ldots, U$, e per numeratori delle costanti, che ora, invece di $u_0, u_1, \ldots, u_{r-1}$, preferiamo di indicare con $A_0, A_1, \ldots, A_{r-1}$. Queste r costanti ed il nume-

ratore N_r della frazione complementale possono, come risulta dal n° 21, determinarsi mediante i due seguenti sistemi di formole:

$$\begin{array}{ll}
res.N = A_0\, res.M \quad , & N_1 = quo.N - A_0\, quo.M \\
res.N_1 = A_1\, res.M \quad , & N_2 = quo.N_1 - A_1\, quo.M \\
res.N_2 = A_2\, res.M \quad , & N_3 = quo.N_2 - A_2\, quo.M \\
\cdots\cdots\cdots , & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
res.N_{r-1} = A_{r-1} res.M \quad , & N_r = quo.N_{r-1} - A_{r-1} quo.M\,.
\end{array}$$

Ma siffatta quistione si può risolvere con un metodo più semplice, mediante una formola, la quale fa dipendere il valore di una costante A da' valori di quelle che la precedono $A_0, A_1, \ldots, A_{i-1}$.

Per trovare questa formola osserviamo esser lecito di supporre (n° 19)

$$\frac{N}{\Delta} = \frac{A_0}{U^r} + \frac{A_1}{U^{r-1}} + \ldots + \frac{A_{i-1}}{U^{r-i+1}} + \frac{N_i}{U^{r-i}M}\,;$$

e se si moltiplica per $U^{r-i}M$ verrà

$$\frac{N}{U^i} = A_0 \frac{M}{U^i} + A_1 \frac{M}{U^{i-1}} + \ldots + A_{i-1} \frac{M}{U} + N_i\,.$$

Essendo N_i funzione intera, se si effettuano le divisioni indicate in questa formola, i residui dovranno elidersi, e rimarranno i soli termini affetti da' quozienti interi, talchè potremo scrivere:

$$(1) \qquad quo\,\frac{N}{U^i} = A_0\, quo.\frac{M}{U^i} + A_1\, quo.\frac{M}{U^{i-1}} + \ldots + A_{i-1}\, quo.\frac{M}{U} + N_i\,,$$

avvertendo che qui non era possibile di sopprimere i divisori, perchè per ciascuna divisione il divisore, anzichè essere la semplice funzione U, è una diversa potenza di questa funzione.

Faremo intanto osservare che i quozienti interi risultanti dal dividere la funzione M per le potenze successive U, U^2, U^3, etc., si possono calcolare senza sviluppare le potenze, bastando perciò di dividere più volte di seguito la funzione M per U; vale a dire dividere M per U; indi il quoziente dividerlo per U; poscia il nuovo quoziente dividerlo per U; e così di seguito. Di questi quozienti il primo è quello che va indicato con la notazione *quo.*M; ma ora converranno d' indicarlo scrivendo *quo'.*M; e

quindi scriveremo $quo''.M$, $quo'''.M$, etc. per indicare rispettivamente i quozienti della seconda divisione, della terza; etc. Uniformemente, per dinotare il primo residuo, il secondo, il terzo, etc. scriveremo $res'.M$, $res''.M$, $res'''.M$, etc.

In conseguenza di queste convenzioni si ha in generale:

$$quo.\frac{M}{U^p}=quo^{(p)}.M\ ;$$

e quindi l'eguaglianza (1) si muta in quest'altra:

$$(2)\qquad quo^{(i)}.N=A_0\,quo^{(i)}.M+A_1\,quo^{(i-1)}.M+\ldots+A_{i-1}\,quo'.M+N_i\ .$$

Ponendovi $U=0$, ogni termine si riduce al residuo che si ottiene dividendolo per U; ma, in generale, il residuo risultante dal divider per U il quoziente della p^{esima} divisione è il residuo della $(p+1)^{esima}$ divisione; dunque, tenendo presente che:

$$res.N_i=A_i\,res.M\ ,$$

l'eguaglianza precedente diverrà:

$$res^{(i+1)}.N=A_0\,res^{(i+1)}.M+A_1\,res^{(i)}.M+\ldots+A_{i-1}\,res''.M+A_i\,res'.M\ .$$

Questa formola, nella quale i residui sono costanti, perchè relativi al divisore U di primo grado, vale a determinare tutte le r costanti A_0, $A_1, \ldots, A_{r-1}$; dappoichè ponendovi successivamente $i=0, 1, 2$, etc., si hanno le equazioni:

$$(3)\qquad\begin{cases} res'.\ N=A_0\,res'.\ M \\ res''.\ N=A_0\,res''.\ M+A_1\,res'.\ M \\ res'''.\ N=A_0\,res'''.\ M+A_1\,res''.\ M+A_2\,res'.\ M \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

per le quali le dette costanti restano senza più determinate.

Conosciuti i valori delle costanti, quello di N_r si avrà quindi dalla formola (2), la quale, fatto $i=r$, porge:

$$(4)\quad N_r=quo^{(r)}.N-(A_0\,quo^{(r)}.M+A_1\,quo^{(r-1)}.M+\ldots+A_{r-1}\,quo'.M)\ .$$

25. È noto che i residui, risultanti dal dividere più volte di seguito per

$x-a$ una funzione intera e razionale, esprimono i valori che prendono per $x=a$ la funzione istessa e le sue successive derivate, queste ultime ordinatamente divise per 1, 1×2, $1\times2\times3$, etc: Dunque:

$$res'.\mathrm{N}=(\mathrm{N})_a \quad , \quad res''.\mathrm{N}=(\mathrm{N}')_a \quad , \quad res'''.\mathrm{N}=\frac{(\mathrm{N}'')_a}{1.2}, \text{ etc:}$$

$$res'.\mathrm{M}=(\mathrm{M})_a \quad , \quad res''.\mathrm{M}=(\mathrm{M}')_a \quad , \quad res'''.\mathrm{M}=\frac{(\mathrm{M}'')_a}{1.2}, \text{ etc:}$$

gli accenti ne'secondi membri significando derivazioni; ed in conseguenza le equazioni (3) diverranno:

$$(5) \quad \begin{cases} (\mathrm{N})_a=\mathrm{A}_0(\mathrm{M})_a \\ (\mathrm{N}')_a=\mathrm{A}_0(\mathrm{M}')_a+\mathrm{A}_1(\mathrm{M})_a \\ \frac{(\mathrm{N}'')_a}{1.2}=\mathrm{A}_0\frac{(\mathrm{M}'')_a}{1.2}+\mathrm{A}_1(\mathrm{M}')_a+\mathrm{A}_2(\mathrm{M})_a \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Queste equazioni non sono nuove nella teoria della decomposizione delle frazioni; sicchè pel caso delle frazioni ordinarie ci troviamo di aver raggiunto una soluzione conosciuta, che suol dedursi da altri principii. Ma, quantunque i coefficienti delle (3) equivalgano a quelli delle (5), pure, in generale, conviene di calcolarli come residui di divisioni col metodo già descritto (nota al n° 6); il quale, anche ne'casi più complessi riesce a darli con la più grande faciltà; mentre il mezzo della derivazione impegna quasi sempre a calcoli lunghi e fastidiosi. È preferibile la derivazione solo se si trattasse di residui relativi a funzioni monomie.

Inoltre, se la derivazione dà i residui, non può dare i quozienti delle successive divisioni per $x-a$. Così, seguendo questa via, non si può profittare della formola (4) per ottenere il numeratore della frazione complementale; e converrà cercarlo direttamente:

26. Aggiungiamo due esempii relativi a frazioni parziali ordinarie.

Es.° I. $$\frac{\mathrm{N}}{\Delta}=\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{U}^5\mathrm{M}}=\frac{x^6-9x^5-30x^4+42x^3-23x^2-21x+35}{(x-2)^5(x^5-6x^4+2x^3+51x^2-117x+81)}$$

$$=\frac{\mathrm{A}_0}{\mathrm{U}^5}+\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{U}^4}+\frac{\mathrm{A}_2}{\mathrm{U}^3}+\frac{\mathrm{A}_3}{\mathrm{U}^2}+\frac{\mathrm{A}_4}{\mathrm{U}}+\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{M}}.$$

Gli elementi, dei quali si ha bisogno in questo caso, sono i quozienti e re-

sidui nascenti dal dividere cinque volte di seguito le funzioni N ed M per $U = x - 2$; ed applicando il solito metodo, si trova:

quo'. $N = x^5 - 7x^4 + 16x^3 - 10x^2 + 3x - 15$, *quo'*. $M = x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 39x - 39$

quo''. $N = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 2x + 7$ *quo''*. $M = x^3 - 2x^2 - 10x + 19$

quo'''. $N = x^3 - 3x^2 + 0x + 2$ *quo'''*. $M = x^2 + 0x - 10$

quo^{IV}. $N = x^2 - x - 2$ *quo*^{IV}. $M = x + 2$

quo^{V}. $N = x + 1$ *quo*^{V}. $M = 1$

res'. $N = 5$, *res''*. $N = -1$, *res'''*. $N = 11$, *res*^{IV}. $N = -2$, *res*^{V}. $N = 0$

res'. $M = 3$, *res''*. $M = -1$, *res'''*. $M = -1$, *res*^{IV}. $M = -6$, *res*^{V}. $M = 4$.

Quindi le equazioni che determinano le costanti saranno

$$\begin{aligned} 5 &= 3A_0 \\ -1 &= -A_0 + 3A_1 \\ 11 &= -A_0 - A_1 + 3A_2 \\ -2 &= -6A_0 - A_1 - A_2 + 3A_3 \\ 0 &= 4A_0 - 6A_1 - A_2 - A_3 + 3A_4 \end{aligned}$$

e, risolvendole, ne risulta:

$$A_0 = \frac{5}{3}\,,\quad A_1 = \frac{9}{2}\,,\quad A_2 = \frac{116}{27}\,,\quad A_3 = \frac{338}{81}\,,\quad A_4 = \frac{254}{243}\,.$$

(*) Il procedimento di divisione descritto nella nota al n.° 6 acquista una vera importanza quando trattasi di calcolare il sistema de' quozienti e residui nascenti dal dividere più volte di seguito una stessa funzione per $x - a$. In questo caso per maggiore semplicità si può ridurre il calcolo ad un quadro formato co' soli coefficienti della funzione e de' successivi quozienti, sopprimendo da per tutto le potenze della variabile. Allora ecco, a ragion di esempio, per intero il calcolo necessario per avere i cinque quozienti, ed i cinque residui relativi alle successive divisioni della funzione proposta N per $x - 2$;

Coeff. di . . . N , 1 — 9 + 30 — 42 + 23 — 21 + 35 . Mod = 2
2 — 14 32 — 20 6 — 30

» *quo'*. N , 1 — 7 + 16 — 10 + 3 — 15 | + 5 = *res'*. N
2 — 10 12 4 14

» *quo''*. N , 1 — 5 + 6 + 2 + 7 | — 1 = *res''*. N
2 — 6 0 4

» *quo'''*. N , 1 — 3 + 0 + 2 | + 11 = *res'''*. N
2 — 2 — 4

» *quo*^{IV}. N , 1 — 1 — 2 | — 2 = *res*^{IV}. N
2 2

» *quo*^{V}. N , 1 + 1 | 0 = *res*^{V}. N .

In quanto ad N_5, posto nella formola (4) $r=5$, si ha:

$$N_5 = quo^{v}.\,N-(A_0\,quo^{v}.\,M+A_1\,quo^{iv}.\,M+A_2\,quo'''.\,M+A_3\,quo''.\,M+A_4\,quo'.\,M)\;;$$

e però fatte le debite sostituzioni, verrà:

$$N_5=(x+1)-\frac{5}{3}-\frac{2}{9}(x+2)-\frac{116}{27}(x^2-10)-\frac{338}{81}(x^3-2x^2-10x+19)$$
$$-\frac{254}{243}(x^4-4x^3-6x^2+39x-39)\;,$$

o, riducendo:

$$N_5=\frac{1}{243}(-254x^4+2x^3+2508x^2+423x+810)\;.$$

Dunque in fine:

$$\frac{N}{\Delta}=\frac{5}{3(x-2)^5}+\frac{2}{9(x-2)^4}+\frac{116}{27(x-2)^3}+\frac{338}{81(x-2)^2}+\frac{254}{243(x-1)}$$
$$+\frac{-254x^4+2x^3+2508x^2+423x+810}{243(x^5-6x^4+2x^3+51x^2-117x+81)}\;.$$

Questo esempio è tratto dalla memoria del Crelle. Lo abbiamo recato perchè si vegga il grandissimo divario che corre tra il metodo, che Egli propone come il più opportuno, e quello da noi seguito.

Es.° II. Come un altro esempio considereremo la frazione:

$$\frac{x^{14}}{(x-1)^5 M}\,,$$

dove M dinota il polinomio reciproco:

$$M=x^{10}+4x^9+9x^8+15x^7+20x^6+22x^5+20x^4+15x^3+9x^2+4x+1\;;$$

e cercheremo solamente i numeratori delle cinque frazioni parziali provvenienti dal fattore $(x-1)^5$: numeratori che, come al solito, intendiamo figurati con A_0, A_1, A_2, A_3, A_4. In questo modo avremo semplicemente bisogno de' cinque residui risultanti dal dividere cinque volte di seguito per $x-1$ le due funzioni N ed M, essendo $N=x^{14}$. Intanto siccome la funzione N è un monomio, e si cercano i soli residui, è il caso,

come lo abbiamo avvertito (n°25), da preferire la derivazione; e quindi, essendo:

$$N=x^{14}\quad,\quad N'=14x^{13}\quad,\quad N'''=12.13.14.x^{11}$$
$$N''=13.14x^{12}\quad,\quad N^{IV}=11.12.13.14x^{10}\quad,$$

posto $x=a=1$, avremo:

$$(N)_a=res'.N=1\quad,\quad (N')_a=res''.N=14\quad,\quad \frac{(N''')_a}{1.2.3}=res^{IV}.N=364\quad,$$
$$\frac{(N'')_a}{1.2}=res'''.N=91\quad,\quad \frac{(N'''')_a}{1.2.3.4}=res^{V}.N=1001\quad.$$

In quanto ai cinque residui relativi alla funzione M converrà cercarli col solito metodo; e quindi tenendo presente un'osservazione già fatta a riguardo del divisore $x-1$, (nota al n° 6) ecco per intero, senza toglier nulla, il calcolo richiesto per tale oggetto.

Coeff. di M ,	1	4	9	15	20	22	20	15	9	4	1	
	1	5	14	29	49	71	91	106	115	119	120	$=res'.M$
	1	6	20	49	98	169	260	366	481	600	$=res''.M$	
	1	7	27	76	174	343	603	969	1450	$=res'''.M$		
	1	8	35	111	285	628	1231	2200	$=res^{IV}.M$			
	1	9	44	155	440	1068	2299	$=res^{V}.M$.				

Nulla è più semplice della formazione di questo quadro; imperciocchè ogni numero, che vi è iscritto, si trova addizionando i due che lo precedono, uno orizzontalmente, l' altro verticalmente. Altronde abbiamo ancora potuto sopprimere i segni, perchè i coefficienti della funzione M sono tutti positivi.

Dopo ciò per determinare i cinque numeratori si hanno le equazioni:

$$1=120A_0$$
$$14=600A_0+120A_1$$
$$91=1450A_0+600A_1+120A_2$$
$$364=2200A_0+1450A_1+600A_2+120A_3$$
$$1001=2299A_0+2200A_1+1450A_2+600A_3+600A_4\ ;$$

e ne risulta:

$$A_0=\frac{1}{120}\ ,\ A_1=\frac{9}{120}\ ,\ A_2=\frac{407}{12.120}\ ,\ A_3=\frac{202}{3.120}\ ,\ A_4=\frac{50651}{6(120)^2}\ .$$

La frazione considerata in questo esempio appartiene a quella classe

di frazioni da cui dipendono i problemi relativi alla partizione de' numeri, le quali hanno sempre al denominatore fattori della forma $(x-1)^r$. Essendo nostro proposito di applicare a siffatti problemi l'esposta teoria, abbiamo voluto mostrar da ora a qual punto di semplicità si può condurre la ricerca de' numeratori delle frazioni parziali, provvenienti dal fattore suddetto: ricerca la quale d'altra parte era il punto il meno agevole della quistione.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA
DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

OSSERVAZIONI SUL CAMMINO DI UN MICELIO FUNGOSO NEL FUSTO VIVENTE DELL' *ACACIA DEALBATA*

MEMORIA

DEL SOCIO ORDINARIO G. GASPARRINI

letta nella tornata del dì 10 gennajo 1865

È noto a tutti come tanti funghi di differenti ordini nascono sui tronchi morti, sul legno e su qualsivoglia parte vegetale in disfacimento; ed inoltre non pochi funghi vengono sugli alberi viventi. Ma in questo caso ove nasce il fungo ci ha sempre magagna nella corteccia, e principalmente nel legno sottostante, in cui la radice filamentosa del fungo, conosciuta generalmente col nome di micelio, stabilisce sua sede e prende il nutrimento. Se questo micelio penetrato nel legno occupi uno spazio ristretto, o si distenda all' insù ovvero all' ingiù, o da ogni parte, e quanto possa allontanarsi dal sito ove spunta il fungo, non so che sia stato particolarmente indagato. Tuttavolta ad una domanda di simil fatta la risposta è agevole a prima giunta, cioè che le essenze fungose lignicole essendo diverse, e di differente durata, l'allungamento dei loro micelii nella matrice legnosa non può essere uniforme. In un senso generale così sta il fatto; e nondimeno non pare senza interesse il sapere fin dove, e per quali vie, possa penetrare un micelio nel tronco sano di qualche albero vivente.

A tale proposito vogliamo esporre alcune osservazioni non ha guari fatte nell' orto botanico sopra un arboscello della Nuova Olanda, *Acacia dealbata*, il quale dalla bellezza del portamento e per quella dei fiori è ammirato da tutti. Esso era alto sei metri circa; il tronco nudo quasi

cilindrico, lungo poco meno quattro metri, misurava alla base dieci centimetri in diametro, ed otto alla sommità ove cominciavano i primi più grossi rami. Questo arbuscello, avea bella cima, fronzuta, ramosa, in piena vegetazione, senza verun segno esteriore di patimento, senza grave magagna apparente nel fusto sopra terra; tranne in un punto verso la metà della sua lunghezza, ove mancava una sottile striscia di corteccia nella estensione di un pollice, e percui l'alburno superficiale in corrispondenza erasi riseccato. A dì 29 novembre un leggier vento di tramontana avendolo schiantato rasente il suolo, il cuore del legno, da quel punto in su per un tratto di due decimetri e mezzo, si trovò fracido, polveroso, fragile, nerastro, mentre la corteccia e l' alburno erano sani. Poco più sopra si potè noverare nella sezione trasversale ventidue zone legnose, dodici di alburno dal colore bianco secondo la volgare distinzione; le altre brune formavano il così detto cuore del legno. L'esame al microscopio scuopriva nella parte legnosa disfatta, come di sopra si è detto, un micelio brunastro, ramoso, articolato, che pareva esservisi introdotto dal terreno circostante, o sottoposto, per qualche fessura o magagna della corteccia insieme all' alburno; il quale per grande estensione intorno intorno, a livello del suolo, era sano. Può anche credersi che lo stesso micelio ivi arrivato fosse stato causa di quel male.

Reciso il fusto all'altezza di tre decimetri sopra la base, presentava il cuore del legno compatto *(fig. 9-10)* di aspetto sano; se non che il colore poco differente da quello disfatto a livello del suolo, fè credere che ancora in tal sito fosse infetto dallo stesso micelio: e l'esame confermava il sospetto. Più in alto, senza interruzione, lo si rinvenne in tutta la lunghezza del tronco, infino alla sommità, ove cominciava a ramificarsi, cioè all' altezza di quattro metri circa; e sempre nel cuore del legno, successivamente più giovine, meno colorato, senza alcun segno sensibile di alterazione in qualsivoglia punto. Siamo passati infine all' esame dei rami. I più grossi misuranti tre centimetri circa in diametro, aventi nove zone *(fig. 11)* legnose, nelle tre centrali di colore brunastro esisteva similmente il micelio fungoso: il quale diminuendo e assottigliandosi a grado a grado salendo, mancava o non appariva nei rami di minor grossezza, anche dove il loro legno nel centro fosse alquanto imbrunito. Tuttavolta non pare ci sia stretta relazione tra il colore del legno e la presenza del micelio; poichè questo in taluni rami esisteva alla faccia interna delle zone centrali non per anco divenute brunastre: il che, forse, ha luogo in principio, quando il micelio non ancora vi si fosse multiplicato. Eccoci alla

cima dell' arbuscello distante poco men che cinque metri dal suolo, quanto è stato il cammino del micelio.

Si vorrebbe ora sapere se il micelio rinvenuto alla sommità del fusto e ne' rami più grossi sia lo stesso di quello alla base; e, dove fosse diverso, se abbia potuto ivi introdursi attraverso la corteccia e l'alburno. Rispondendo alla prima domanda diciamo esser difficil cosa, sovente impossibile, indicar caratteri distintivi, sensibili e precisi per tanti micelii appartenenti a funghi diversi. E pel caso presente se ci contentiamo dell'aspetto, della uniformità dei filamenti micelici, risguardo al colore, all'esser ramosissimo, confervoideo, ed al suo cammino, tutto questo insieme inducono a doverlo ritenere come lo stesso, dovunque si è trovato, a principiar dalla base del pedale infino dentro ai rami, senza interruzione. In tutta la lunghezza del fusto la corteccia era sana, tranne in pochi punti molto ristretti per morte o taglio di qualche ramo, a parte l' angusta ferita di sopra menzionata nella corteccia, percui l'alburno superficiale ivi scoperto era divenuto bruno e duro. In que' punti l' alburno esteriore era affatto sano, o appena alterato: ma da per tutto l'alburno interno che fascia il cuore del legno, sanissimo a perfezione, non conteneva filamenti micelici di sorta, non altrimenti che quello di qualsi voglia altro sito del fusto, affatto intiero vivente e sano, coperto dalla corteccia. Nè anche se ne rinvennero nella zona rigeneratrice, e tra foglietti corticali.

Quindi il micelio in discorso viene dalla base del pedale, probabilmente passatovi dal terreno, sale pel cuore del legno sano, ed entra nei rami. Il cuore del legno ha più zone legnose, ciascuna formata di fibre e grossi vasi punteggiati; vi sono pure i raggi midollari, e la midolla nel centro. Nè in questa s' intromette il micelio, nemmeno entra ne' vasi spirali che la circondano, non si accompagna con le cellule fibrose, nè diverge lunghesso i raggi midollari; la sua via sono i vasi *(fig. 12-m)* punteggiati, con i quali cammina di conserva, ramificandosi da ogni banda. Col microscopio non si è potuto scorger chiaro se striscia alla superficie di que'vasi traendone il nutrimento per contatto e passaggio di ciò che vi circola, ovvero se sale per la loro parete interna. Nondimeno questa seconda via ci pare più agevole e naturale. Perchè ivi, nell'ampia cavità di un vase punteggiato, non manca l'aria, nè l'umidità, anzi abbonda la linfa nella pienezza della vegetazione, massime ne' primi anni, e ci ha lo spazio; in somma tutte le condizioni al vegetare ed al progredire di un micelio; cui la superficie del medesimo vase, essendo in contatto stretto con

le cellule fibrose circostanti, non darebbe adito facile a potervisi stendere intorno. Ciò non potrebbe avvenire senza aver prima lo stesso micelio distrutta quella coesione mercè un' azione chimica sua propria. In altre piante si son visti micelii passar fuor fuora le membrane cellulari promuovendone la dìsorganizzazione, consumar l'amido e la materia legnosa contenuta nelle cellule fibrose. Pruovano questo le indagini di molti osservatori, tra chimici e fisiologi, e l'anno scorso veniva confermato dallo Schacht in una scrittura apposita col titolo «sulle mo« dificazioni prodotte dai funghi nelle cellule vegetali che hanno ces« sato di vivere » *(v. Bullettin de la Société botanique de France, tome onzième 1864).* L'autore parla di funghi non parasiti, i quali nel legno morto, o presso a morire, trovano l' ossigeno, l' umidità e gli altri materiali necessarii alla loro esistenza. Ma vi sono inoltre funghi veramente parasiti, che attaccano le piante in istato di sanità perfetta, penetrando co' loro micelii dalla parte esterna, sia dalla superficie della radice o del rizoma, sia dal fusto o dalle foglie, fin nei tessuti più riposti, sovente molto lontani dal sito ove dapprima si aprirono la via, ingenerando da per tutto nel loro passaggio alterazioni svariate più o meno sensibili. Nei succiatori di alcune epatiche abbiamo trovato un micelio molto sviluppato, e visto poscia che s' introduce in quelle cavità tubulate dalla parte esteriore. Giulio Kühn ha osservato che l' ustilaggine e la carie nelle piante cereali germogliando sulle radici, o alla base del fusto, il loro micelio penetra in quegli organi e sale in alto, infino alle parti fiorali, per ivi produrre i proprii germi o spore. Perfino ci ha qualche fungo entofito che vive nelle piccolissime cavità microscopiche delle cellule in certi tessuti di alcune piante, come la *Schinzia cellulicola* scoperto dal Näegeli nelle radici di alcune *Iris.* In quelle dell'*Iris Nota* ed *I. foetidissima*, esaminate in fine di dicembre, abbiamo rinvenuto un micelio finissimo, bianco, in certi punti del parenchima corticale, ch'è ben grosso, ed ove le cellule qua e là vedevansi attraversate da quello. In corrispondenza di tali punti alla superficie della radice, e perfino su qualche succiatore, strisciavano filolini micelici, forte aderenti alla epidermide. Se quelli esistenti nel parenchima corticale appartengono alla *Schinzia* del Näegeli, non par dubbio che tale entofita non venga dall'esterno.

Non pare che il micelio rinvenuto nella parte legnosa dell'*Acacia dealbata* appartenga a qualche fungo veramente parasito, che non potesse cioè altrove vegetare che nella pianta vivente e sana. Se così fosse, introdottosi alla base del fusto, avrebbe ivi disfatto il legno, e si sarebbe

poscia avviato verso la cima come di sopra si è detto. Ma in questo caso lascerebbe le tracce della sua presenza con qualche alterazione sull'organo entro cui cammina; il che non si è avvertito, forse per essere leggiero e non per anco riconoscibile. Può stare adunque, e questo sembra più probabile, che i filamenti micelici si sieno introdotti e distesi per lungo tratto entro i vasi punteggiati, come avrebbero fatto nelle cavità di un legno morto, ovunque ci ha le condizioni al loro vegetare.

La presenza e l'azione chimica di un micelio, d'ordinario si annunzia col cangiamento di colore del tessuto legnoso; e si è visto nel castagno cavallino *(Aesculus hypocastanum)*. Un tronco dell' eta di circa venti anni, grosso in diametro un palmo, reciso per traverso, non presentava diversità notabile nel colore fra le zone legnose centrali, e quelle esteriori più recenti; la compattezza però era maggiore nelle prime. Le quali nella spaccatura longitudinale del medesimo tronco erano qua e là magagnate, disfatte, imbrunite, ma senza alcun micelio, quantunque non mancassero fessure, comunicanti coll'aria esterna, lasciate dai rami recisi. In tanto in altri siti del tronco spaccato lungo il mezzo, parecchie zone di alburno in varii punti offrivano delle macchie, e delle strisce più o meno estese di color piombino, senza la minima apparente alterazione nel tessuto fibroso. Ma in tali siti così colorati esisteva un micelio nei vasi rigati, ne'vasi porosi, tra le fibre legnose, tra le cellule dei raggi midollari, perfino nella zona rigeneratrice e tra le fibre del libro, onde probabilmente era passato all' alburno, dopo avere primamente attraversato la corteccia.

Un micelio, si è già detto, non essere che l'organo vegetativo e propriamente la radice di un fungo perfetto, che a tempo e luogo da quella nascerà. Ma qual sia o possa essere il nostro fungo ignoriamo affatto. Il legno in cui si è trovata la sua radice, bagnato e tenuto sotto campana, non ha dato nello spazio di un mese che alcune mucedinee comuni, che nascono ovunque, standovi un organo vegetale morto, come *Ascophora Mucedo*, *Penicillum glaucum* ec. con intorno una certa umidità.

Ne'funghi entofiti, infino a pochi anni addietro, qualche sostenitore della generazione spontanea trovava buone ragioni in pro di quella teorica, dappoichè non si sapeva come alcuni esseri di tal ordine potessero dalla parte esteriore penetrare in certi organi, per esempio la Schinzia, l'ustalagine, la carie. Ma ora che si sa come i due ultimi arrivano ai fiori delle piante cereali, essi e tanti altri non verrebbero più a proposito per l'argomento della generazione spontanea, le cui pruove, se mai ci

sieno, si hanno a cercare altrove che nel campo degli entofiti nominati.

Scrivendo la presente nota pensava sovente al dubbio, se gli entofiti, oltre al modo testè indicato di vegetazione, con introdurre, germinando alla superficie degli organi, i loro filolini micelici nelle parti interne; le spore di qualcuno di essi, o i conidii, o altro germe riproduttivo potesse, intiero, penetrare insieme alla linfa nel corpo della radice, ivi germinare, o in altra parte, condotto dalla stessa linfa in circolazione. Che ciò non possa aver luogo è chiaro, considerando per poco il fatto dell'assorbimento per parte della radice, nella quale non entra che l'acqua con quelle sostanze di qualsivoglia natura che fossero in essa perfettamente disciolte. Anche le minimissime particelle non percettibili alla vista naturale, e sovente nè meno al microscopio, essendo solo sospese, non già disciolte nell' acqua, non penetrano nelle radici. Come mai adunque vi entrerebbero le spore intiere, aventi una dimensione misurabile, piccolissime si volessero immaginare, ed in organi mancanti di boccucce capaci a riceverle? Si può obbjettare che le minime particelle del plasma, o delle membrane disfatte di un entofita, non incontrerebbero difficoltà, forse, a cacciarvisi dentro, massime per que' punti scoperti ove sieno morte alcune cellule superficiali o fibrilline radicali da qualsivoglia causa. Ma i punti così magagnati offrono sempre in fondo un tessuto più o men fitto, non già un canale aperto, ove la spora troverebbe solo luogo adatto a germinare. E che le tenuissime particelle di un plasma fuori il campo della cellula sua matrice, o quelle risultanti dalla decomposizione della stessa membrana cellulare avessero facoltà riproduttiva, come fossero altrettanti germi, non si vede sopra quali fatti sia ammessibile, anche in termini probabili.

Un tempo pareami possibile in certi casi, sebbene rari, l'entrata di alcune spore nei canali vascolari della radice, e passar oltre almeno per breve tratto, trascinate della linfa, dietro la seguente osservazione. Sul finire di marzo, l'*Allium nigrum* Lin. *(fig.1)* entrato già in vegetazione nell'albereto dell'orto botanico di Pavia, avea messo molte nuove radici alla base dei bulbi, in numero variabile; in uno se ne noverarono 107 in altro 165. Esse, semplici, cilindriche, alquanto flessuose, lunghe da quattro a sei pollici, mancavano da per tutto di succiatori. Le più giovani, lunghe circa un pollice, aveano la spongiola intiera, le altre in molto maggior numero ne mancavano. Dalla estremità troncata di queste, come corrosa da qualche insetto, sporgeva un poco l'unico filetto fibroso vascolare, grosso un sesto di millimetro circa, misurando la radice un millime-

tro in diametro. Questo filetto è costituito di cinque canali *(fig. 4-5)* o vasi spirali e di cellule fibrose che li circondano: quello del centro, il doppio più ampio degli altri quattro posti intorno, ha una capacità uguale ad $\frac{1}{20}$ di millimetro. La stessa cosa allora occorreva nella *Tulipa praecox* Ten., *(fig. 7)*, *Tulipa Gesneriana* Lin., nel giacinto generalmente coltivato, *Hyacinthus orientalis*, e nel *Narcissus pseudo-Narcissus*, senza veruna diversità rilevante, rispetto al solo fatto della spongiola mancante. La *Lachenalia pendula* in fiore, coltivata in vase, presentava qualcuna delle sue lunghissime, cilindriche, semplici radici, fornite di molti succiatori, similmente disfatta o troncata all'estremità; il che si osservò ancora nel *Galanthus nivalis*, e nella maggior parte di quelle del *Muscari racemosum*. In maggio tutte le radici di un *Allium* non fiorito, con foglie come quelle dell'*Allium vineale*, mancavano di spongiola. Il *Narcissus poeticus* in fiore avea pochissime radici con spongiola intiera, ma intenerita, giallastra, corriva a disfarsi, o in atto proprio di disfacimento, mentre nelle altre in maggior numero essa non più esisteva. Nelle gigliacee, nelle Amarillidee tal fatto occorre, forse, più di frequente che non si crede.

Ritorniamo al primo esempio, cioè all'*Allium nigrum*, dove si è vista l' apertura del grosso vase centrale agguagliare $\frac{1}{20}$ di millimetro. Ora i germi d' un grandissimo numero di funghi di differenti ordini, per non dire di tutti, quanto non sono più piccoli di quella capacità? E dove nel terreno si trovassero in contatto con le estremità troncate delle radici, non sembra egli naturale poter essi cacciarvisi e camminare, almeno un certo tratto, con la linfa? Eppure non può esser così. Se la radice pescasse nell'acqua, e l'attirasse come fa la canna di una tromba, allora sì che non solo i germi di funghi e di alghe vi passerebbero, ma ancora qualunque particella in quel liquido sospesa; mentre ognuno sa che nel terreno l' assorbimento ha luogo per parte della radice mediante un azione ch'essa da tutta la superficie, dove più dove meno forte, esercita sulla umidità in quello contenuta, e che passa e si trasfonde dentro attraverso le membrane cellulari, non già per forellini o boccucce percettibili che vi fossero. Quindi ciò che non è disciolto nell'acqua non può penetrare nelle radici, alla cui superficie resta deposto: e però gli entofiti parasiti non hanno altro modo di passare nei tessuti vegetali che germogliando alla superficie di questi, onde poscia i loro filolini micelici s'introducono alle parti interne.

Spiegazione delle Figure

1. Bulbo dell' *Allium nigrum* di naturale grandezza, di cui la giovane radice *a* con altre due in alto hanno la spongiola, mentre le rimanenti ne mancano, essendosi disfatta.

2. Due radici, l'una intiera l'altra senza spongiola, di grandezza naturale vedute isolatamente.

3. Estremità di una radicetta senza spongiola ingrandita alla semplice lente per mostrare il filetto fibroso vascolare sporgente alquanto oltre l' orlo della parte corticale.

4. Sezione trasversale del filetto fibroso vascolare figura precedente osservata all' ingrandimento di 180 diametri; essa mostra i cinque vasi spirali, di cui il centrale è più grande, circondati da cellule fibrose.

5. Sezione longitudinale del medesimo filetto fibroso vascolare, nella quale vedesi la posizione e la grandezza rispettiva dei vasi laterali verso il centrale.

6. Bulbo della *Tulipa praecox* di grandezza naturale, le cui radici più lunghe, come in *c*, mancano di spongiola, mentre questa esiste ancora in poche radicette *a* più giovani, siccome nell'*Allium nigrum*; *x* bulbetto lungamente peduncolato proveniente dal girello; il vero bulbetto è nella estremità *s*.

7. Sezione trasversale del filetto fibroso-vascolare radicale della stessa *Tulipa praecox* mostrante un gran vase spirale centrale prismatico con intorno altri quattro fascetti vascolari, di simil natura, ciascuno formato di tre vasi.

8. Bulbetto *s*. fig. precedente reciso per mezzo onde farne vedere le tuniche e la loro direzione; esse provengono dalla sommità interna dell' ingrossamento.

9. Sezione trasversale del fusto dell'*Acacia dealbata*, a poca distanza dal suolo, ove finiva il legno disfatto; vi si può noverare le zone legnose interne imbrunite e quelle dell' alburno.

10. Sezione trasversale dello stesso fusto a maggiore altezza, ove le

zone legnose son sane, e le interne contengono il micelio ne' loro vasi punteggiati.

11. Sezione trasversale di un ramo misurante tre centimentri in diametro, distante dal suolo poco più di quattro metri; le zone legnose interne contenevano il micelio.

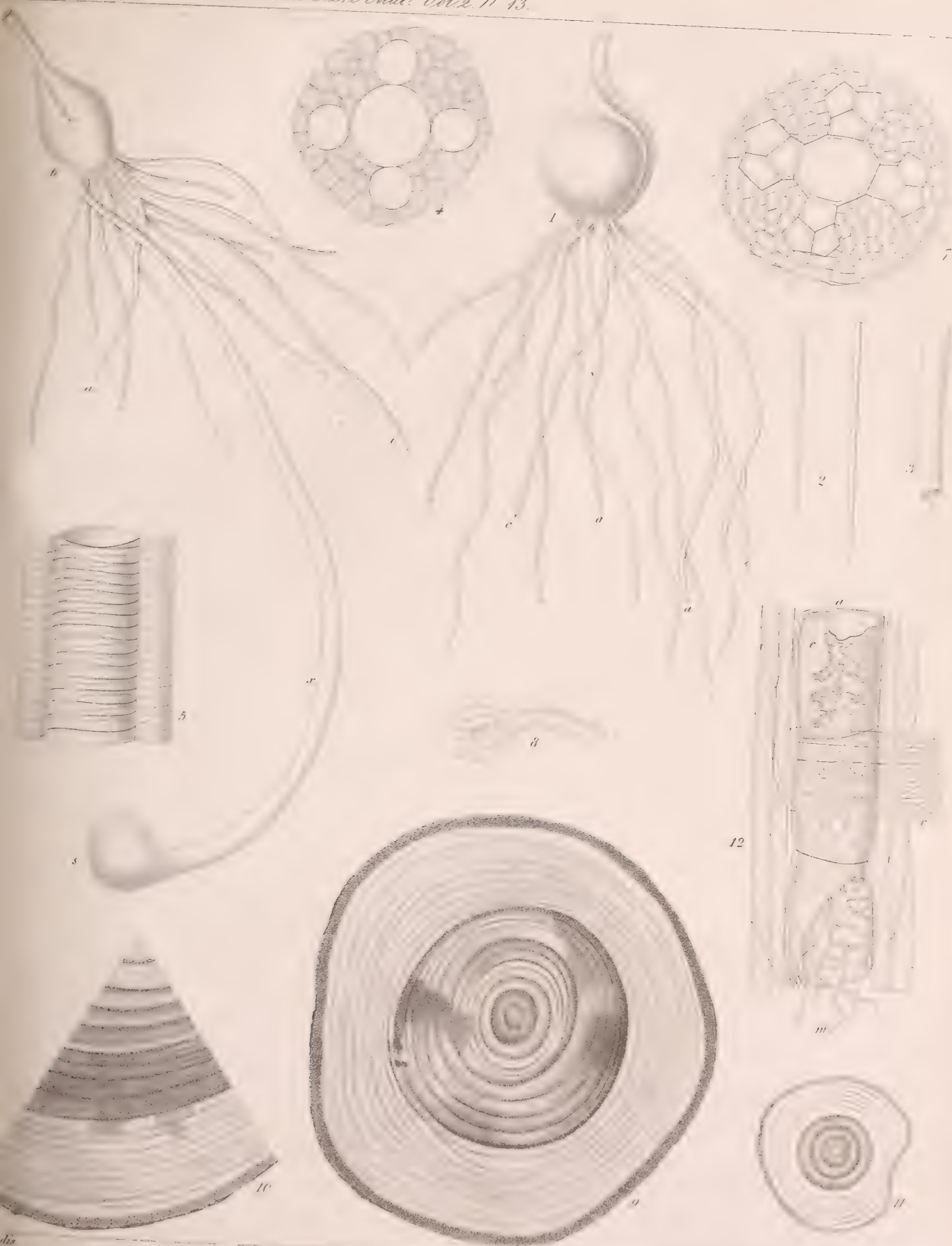
Le tre figure 9-10-11 sono di grandezza naturale.

12. Sezione longitudinale nella parte legnosa interna, imbrunita, del ramo figura 11 per mostrare un vase punteggiato, con intorno cellule fibrose longitudinali, e per traverso raggi midollari. Dentro al quale vase esiste il micelio *m* sporgente dalla estremità inferiore del detto canale punteggiato. Nell'altra estremità, il rasojo nel punto *c* avea portato via solo la membrana esteriore del vase, su cui principalmente esistono le depressioni in sembianza di pori o di punti trasparenti, bislunghi. La membrana interna *c* era liscia, o appena finamente striata, nè mostrava le impressioni dei punti descritti sull'altra membrana. Particolarità che si sono rinvenute anche nella vite.

Atti della R. Accad. delle Scienze Fis. e Mat. Vol. 2 N° 13.

dis

G. Imperato inc.

Vol. II. N.° 14

ATTI DELLA R. ACCADEMIA
DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

RICERCHE GEOMETRICHE O GRAFICHE DELLE MINIME E DELLE MASSIME DISTANZE *ASSOLUTE* FRA PUNTI, LINEE, E SUPERFICIE QUALUNQUE, COMBINATE A DUE A DUE IN TUTTI I MODI POSSIBILI

MEMORIA

DEL SOCIO ORDINARIO F. P. TUCCI

letta nell' adunanza del dì 14 febbrajo 1865

Le quistioni relative ai massimi e ai minimi ànno sempre attirata in modo speciale l'attenzione dei geometri; e senza dubbio, non solo nelle Matematiche pure o applicate, ma in tutti i diversi rami dello scibile son quelle che piccano maggiormente la curiosità, a prescindere dai casi nei quali sono ancora le più utili. Così vediamo che Apollonio, il gran geometra dell'Antichità, dettava un intero libro (il V.° dei suoi Conici) su i massimi e i minimi relativi alle curve coniche; libro il quale, credutosi perduto, diede origine alla Divinazione che ne fece il Viviani, e che forma una delle più belle glorie scientifiche d' Italia. Or fra tutte le quistioni geometriche intorno ai massimi e ai minimi, e specialmente ai minimi, la più semplice e insieme la più importante, si riferisce alle *distanze assolute* fra punti, linee e superficie qualunque, combinate a due a due in tutti i modi possibili. Con la qualificazione di minime distanze *assolute* intendiamo limitarci ai cammini più corti che nello spazio possono menare da un luogo geometrico (punto, linea o superficie che sia) ad un altro; talchè la specie della richiesta minima distanza torna determinata dalla natura stessa della quistione, non potendo essere che una *linea retta*, e in conseguenza non restando a trovarne altro che la posizione.

I molti e svariati problemi, che appartengono a questo argomento,

potendosi ridurre a tre classi diverse, noi ne formeremo il soggetto di altrettante Memorie: la 1ª per quelli nei quali uno dei due dati luoghi geometrici è un punto (sebbene il punto non possa dirsi veramente *luogo geometrico)*, e l'altro una linea o pure una superficie; la 2ª pei casi nei quali uno dei luoghi geometrici è una linea, e l'altro parimente una linea o pure una superficie; la 3ª finalmente quando ambidue i luoghi geometrici son superficie.

Nelle prime due Memorie se i punti e le linee date giacessero in una data superficie curva, e su questa dovesse anche giacere la minima distanza cercata, questa non più sarebbe la minima distanza *assoluta*, ossia il minore di tutti i cammini *possibili*, ma soltanto il minore di tutti quelli che si possono tracciare sulla data superficie curva. Potrebbesi perciò questo minimo cammino qualificare col nome di minima distanza *relativa*, e la ricerca analitica ne apparterrebbe al *Metodo delle Variazioni*. Essa distanza generalmente parlando è una curva *storta*, e gode la proprietà che tutti i suoi *piani osculatori* son normali alla superficie su cui giace; ma noi prescindiamo in queste Memorie dalla determinazione grafica della medesima. Infine dichiariamo che le nostre ricerche sono meramente geometriche, e intendono a soltanto scuoprire le operazioni conducenti a risolvere il problema, rimettendoci per la loro effettiva esecuzione ai noti procedimenti della *Geometria Descrittiva*. Le ricerche analitiche relative al medesimo argomento nello stato attuale della scienza altra difficoltà non avrebbero se non la risoluzione dell'equazioni, e inoltre sarebbero limitate ai casi nei quali possono esprimersi con equazioni le curve e le superficie date; laddove per le ricerche puramente geometriche basta che le curve siano date soltanto pei loro disegni se *piane*, e pei disegni delle loro projezioni se *storte;* e in quanto alle superficie basta che le loro *direttrici* e *generatrici* siano date nel detto modo, e che insieme sia data la legge della loro generazione.

Sulla massima e sulla minima distanza di un punto da una linea o da una superficie qualunque

1. Nel caso in cui la linea è retta o circolare, e nel caso in cui la superficie è piana o sferica la soluzione del problema è notissima ed antica quanto la Geometria; poichè allora la massima e la minima distanza non differiscono dalle normali condotte dal punto a quelle linee o superficie; anzi per questi luoghi geometrici si verifica eziandio la proposizione inversa, non essendovi normale ad esse da un punto, la quale non sia un minimo o pure un massimo.

2. Inoltre, siccome ogni curva può riguardarsi come un poligono d'infiniti latercoli fra loro inclinati sotto angoli ottusissimi, e del pari ogni superficie curva può riguardarsi come un poliedro a faccette piane tra esse inclinate sotto angoli infinitamente ottusi, ne risulta che le richieste distanze massime o minime siano pure *generalmente parlando* normali alla curva od alla superficie curva. Non senza ragione però trattandosi di linea o di superficie curva abbiamo aggiunte le parole *generalmente parlando;* 1° perchè in questi casi non sempre si verifica (siccome vedremo) la proposizione inversa; cioè a dire, non sempre la normale trovasi essere un minimo o pure un massimo; 2° perchè qualche volta (benchè assai di rado) può darsi che la distanza minima o massima non sia neppur normale alla curva o alla superficie curva (1). Ma posti da un canto questi minimi e massimi *straordinarî* o *singolari*, gli ordinarî debbono cadere sulle normali alla linea o superficie; perchè le linee curve e le superficie curve possono riguardarsi come poligoni e come poliedri, giusta ciò che innanzi dicevamo; e perchè sotto il nome di massime o di minime distanze intendiamo nel senso *tecnico* della parola, quelle che son maggiori o minori non di tutte le possibili (come accade nelle linee

(1) Si verifica questo caso quando la curva presenta qualche punto di *regresso di 1ª specie* poichè allora *(fig. 11)* la congiungente il punto P col punto di regresso M è un massimo o un minimo secondo che l'angolo PMT, formato da PM con la tangente MT, è ottuso o acuto.

*

rette o circolari, e nelle superficie piane o sferiche) ma soltanto delle *immediatamente* vicine. Or siccome la condizione di condurre una retta normale ad una linea o ad una superficie da un dato punto è sufficiente a determinarne la posizione, così la prima e vera difficoltà del problema si riduce a condurre pel punto dato tutte le normali possibili alla curva o alla superficie.

3. Determinata che sia una normale ad una curva da un punto dato fuori di questa per conoscere se la medesima sia un massimo, o pure un minimo, o pure nè l'uno nè l'altro rispetto alle rette adiacenti menate dallo stesso punto, bisogna distinguere varie ipotesi.

Se la curva nel punto d'incontro con la normale oppone la convessità al punto *dato*, da cui parte, è di tutta evidenza *(fig. 1)* che la normale sia un minimo al paragone delle rette che per lo stesso punto dato si possono condurre ai punti della curva adiacenti da ambe le parti (almeno *immediatamente)* al detto incontro.

4. Non così nella ipotesi che la curva nel punto d'incontro con la normale oppone la concavità al punto *dato* per cui questa si conduce, potendo allora verificarsi tre casi ben distinti. À luogo il 1° quando il cerchio avente per centro il punto dato e per raggio la normale è come *esterno* alla curva, e per così dire l'abbraccia (almeno per la estensione di archi piccolissimi) da ambe le parti dell'incontro *(fig. 2)*: allora la normale è un *massimo*, perchè a simiglianza di questi raggi eccede le porzioni di essi, terminate alla curva. Il 2° caso à luogo quando al contrario il detto cerchio è *interno* alla curva da tutte due le parti dell'incontro *(fig. 3)*, almeno per un tratto comunque piccolo; nel qual caso la normale dee ritenersi un minimo, perchè a simiglianza dei raggi adiacenti è minore di questi raggi prolungati sino alla curva. À luogo finalmente il 3° caso, affatto singolare, quando il consueto cerchio intersega propriamente la curva nel punto comune, sebbene l'uno e l'altra abbiano quivi una stessa tangente *(fig. 4)*. Allora la normale è minore dei raggi vettori della curva lungo il tratto dove il cerchio è interno ad essa, ed è maggiore dei raggi vettori della curva nel tratto dove il cerchio è ad essa esteriore; ondechè in sostanza non si può dire nè *massima* nè *minima* nel senso preciso o tecnico di queste voci (1).

(1) Essendo notissimo che in quest'ultimo caso la normale non differisce dal raggio del *cerchio osculatore* della curva, si rende palese che una normale sia un *massimo* quando

5. Per rispetto alle curve *storte* ossia di doppia curvatura, bisogna distinguere la ipotesi in cui la normale giace nel *piano osculatore* della curva nel punto di loro intersezione dalla ipotesi in cui giace fuori di cotal piano, il quale supponghiamo cognito pei metodi grafici di *Geometria descrittiva*. Nella prima ipotesi tornano in essere i tre casi dianzi noverati per le curve piane, e le conseguenze che ne abbiamo desunte. Ma nella seconda mi sembra non potersi fare ammeno di tracciare in due piani distinti il cerchio avente per raggio la normale, nel piano cioè della tangente mm *(fig. 6)* alla curva nel punto preciso M d'incontro con la normale e della tangente consecutiva nn, discosta dalla prima non più di quanto basta ad essere graficamente ben diversa da essa; e nel piano della stessa tangente primitiva mm, e dell'altra ll che la precede, e che pur n'è lontana sol quanto basta ad essere sensibilmente diverse una dall'altra. Nel primo di questi piani può stimarsi giacere l'archetto $M\nu N$ della proposta curva AMB, e nel secondo può supporsi giacere l'archetto $M\lambda L$; quindi, se in ambe le posizioni del cerchio un archetto di questo, contato da M, sarà interno ai detti piccoli archi MN ed LM della curva, ciò indicherà che la normale PM sia un minimo; se in ambedue le posizioni gli archetti circolari saranno esteriori ai piccoli archi MN ed ML, la normale dovrà stimarsi un massimo; e non sarà nè un minimo nè un massimo quando un dei due archetti circolari sarà interno e l'altro esterno alla curva nelle adiacenze immediate del punto M.

6. Passando a considerare la normale da un punto ad una superficie curva, distingueremo primamente il caso (per verità singolare) in cui questa nel punto dove la normale la incontra è *non convessa*, cioè tale che il piano quivi *tangente* la intersega ed ha con essa un contatto di secondo ordine; ed il caso in cui è propriamente *convessa*, non avendo di comune che un punto solo col piano *tangente*. Nel primo caso è evidente

è *maggiore* di cotal raggio, sia un *minimo* quando n'è *minore*, e non sia *generalmente parlando* nè l'uno nè l'altro quando gli è uguale. E diciamo *generalmente parlando* perchè se il punto della curva fosse per avventura un *vertice* o pure un *umbilico* di essa, la normale divenuto raggio osculatore tornerebbe un massimo o un minimo a seconda che avrebbe luogo il 1° e il 2° caso, tanto pel vertice quanto per l'umbilico. La normale è pure un minimo quando nel punto dove incontra la curva, questa subisce una *inflessione*. Infatti *(fig. 5)* avendo la curva nel punto N un contatto di 2° ordine con la tangente il cerchio descritto col centro P e raggio PN non può cadere tra la curva e la tangente epperò resta al di sotto di un arco $m\ N'\ m'$ abbastanza piccolo.

che la normale è un minimo, come per la normale ad una curva in un punto d'*inflessione* di questa.

7. Nel secondo caso poi bisogna distinguere due ipotesi: quella in cui la superficie nell'incontro con la normale oppone la convessità al *punto dato* da cui parte questa normale; e l'altra in cui gli oppone la concavità. Nella prima ipotesi è di tutta evidenza che la normale sia un minimo, rispetto almeno alle rette che dal punto dato arrivano ai punti della superficie immediatamente vicini all'incontro.

8. Ma nell'altra ipotesi mi sembra indispensabile il considerare la superficie sferica avente per raggio la normale e per centro il punto dato. Se coi procedimenti grafici della *Geometria descrittiva* si trovi aver luogo il caso (anche singolare) che la superficie proposta e la sferica s'intersegano secondo una linea che passa per l'incontro della normale con la prima di esse, cioè pel contatto delle due superficie, la normale non sarà certamente nè un minimo nè un massimo; ma per fermo vi sarà l'uno o pur l'altro a seconda che avrà luogo il primo o il secondo dei due altri casi: cioè, che la superficie sferica, nelle adiacenze almeno del contatto, sia *interna o pure esterna* alla superficie data (1).

9. Laddove finalmente avesse luogo la ipotesi (vieppiù singolare) che le due superficie si tocchino in una linea che passa per l'incontro o contatto primitivo, anche sarà d'uopo osservare se qualche punto della superficie sferica, non esistente nella linea di contatto sia interno o pure

(1) Un bell'esempio in cui si verificano insieme tutti tre questi casi è quando si prendono per la superficie data una ellissoide a tre assi differenti, e pel punto dato il centro. Allora infatti tutti tre gli assi trovansi normali alla superficie, ma il *maggiore* essendo ancora il più grande di tutti i diametri dell'ellissoide, le distanze del centro dagli estremi del medesimo sono due vere distanze massime del centro alla superficie. E del pari l'asse *minore* essendo il più piccolo diametro della superficie, le due distanze degli estremi di esso dal centro son veramente minime. Ma in quanto all'asse *medio* ciascuna delle sue metà non è una distanza nè massima nè minima, non solo rispetto all'intera superficie, ma nè anche rispetto ai punti adiacenti; essendo maggiore dei semidiametri coll'ellisse i cui assi sono il *minore* e il *medio* della superficie, ed essendo minore dei semidiametri dell'ellisse avente per assi il *medio* e il *maggiore* della superficie. Coerentemente a ciò, delle tre sfere concentriche all'ellissoide ed aventi per diametri rispettivi i suoi tre assi, la maggiore è interamente circoscritta alla medesima, la minore l'è interamente iscritta, laddove la media l'intersega senza lasciar per questo di toccarla (nel senso geometrico della parola) negli estremi dell'asse medio, come la sfera maggiore e la minore negli estremi del maggiore e del minore degli assi.

esterno alla superficie data. Nel primo caso la normale sarà un minimo, e sarà un massimo nel secondo; in amendue però nel senso più ristretto, che nel primo non sia minore e nel secondo non sia maggiore di veruna delle rette adiacenti, condotte alla superficie dal punto donde parte la normale, ma non nel senso ordinario che sia maggiore o minore di tutte le adiacenti (1).

10. Dopo tutto ciò che abbiam detto dal n° 3 sin quì possiamo, senza più, sostituire alla ricerca grafica delle minime e delle massime distanze di un punto ad una linea o ad una superficie quella delle normali condotte dall'uno alle altre: che è quanto andiamo a fare nel resto di questa Memoria.

PROBLEMA PRIMO

Condurre le normali da un punto ad una linea

A parte il caso di un punto e di una retta, e l'altro di un punto e di un cerchio, di soluzioni cognite ed antiche quanto la geometria, il primo che si presenta è quello di un punto e di una curva posti in un medesimo piano. Allora se la curva è data solo pel disegno che la rappresenta, e le richieste normali vogliensi anche trovare con procedimento meramente grafico, questo potrebbe essere come segue e si legge nella *Scienza del Disegno* di Vallée al n° 477.

Supponendo esser P il punto dato ed $ABCD$ la data curva *(fig. 7)* si prendano su questa i successivi punti A, B, C,..... e condotte *graficamente* per essi le tangenti Aa, Bb, Cc,... dal punto P si conducano alle medesime le perpendicolari Pa, Pb, Pc,... È chiaro che i piedi a, b, c,...

(1) Si verifica quest'altro caso quando per esempio la superficie data è di rotazione, e il punto dato trovasi sull'asse, chè allora la sfera avente per centro il punto, e per raggio la normale condotta da esso alla curva generatrice e insieme alla superficie tocca quest'ultima lungo tutto un *parallelo;* onde se la normale è una distanza massima o minima rispetto alla curva lo sarà benanco rispetto alla superficie, ma sarà un massimo od una minima della mentovata specie singolare. In questo medesimo esempio se l'asse incontra la superficie la parte compresa tra l'incontro e il punto dato è un massimo o pure un minimo ordinario anche quando l'asse incontra la curva generatrice sotto un angolo diverso dal retto; nel qual caso vi à di singolare la circostanza che la distanza massima o minima non è normale alla superficie, e può esserle anche tangente.

di queste perpendicolari apparterranno ad una curva ausiliaria *abc*... in cui giacerà il punto x esistente nella dimandata normale, il quale per ciò sarà quello che risulta comune alle due curve. Se non che, la curva ausiliaria dovendo per la legge della sua descrizione toccar la proposta nel punto cercato x, questo non risulterà determinato con la debita precisione. Ma non è difficile ottenere lo stesso punto con una curva secante: infatti, conducendo per A, B, C,... le normali indefinite alla curva data, e tagliando in esse le parti Aa', Bb', Cc',... uguali rispettivamente alle Aa, Bb, Cc,... in modo però che quelle di tali parti che giacciono in sensi opposti rispetto ai punti A, B, C,... sieno pure collocate in sensi opposti rispetto alla curva ABC..., nascerà la nuova curva ausiliaria $a'b'c'$..., che dovrà passare per x e quivi intersecare la curva data.

11. Quando il punto dato P non giace nel piano della data curva ABC... *(fig. 8)* supponendo essere P' la projezione ortogonale su questo piano, e da questa projezione conducendo, come nel caso precedente, la normale $P'x$ alla curva data, ossia la perpendicolare alla tangente nel contatto x, anche la Px per un teorema conosciutissimo di geometria sarà perpendicolare a questa tangente, e quindi normale in x alla curva.

12. Anche quando la curva data è *storta* o, come ordinariamente si dice, *di doppia curvatura*, e quindi a simiglianza del punto non è data che per le sue projezioni, a me sembra che la ricerca grafica della normale condotta ad essa per questo punto possa procedere in modo analogo a quello dianzi esposto per le curve *piane*. La quale simiglianza di procedimento esige che siccome in un caso così nell'altro la normale Aa' *(fig. 7)* sia in uno stesso piano, e quindi parallela alla Pa; e così del pari Bb' parallela a Pb, Cc' parallela a Pc,...; senza la quale, od altra equivalente condizione, sarebbe incerto l'andamento della cura ausiliaria $a'b'c'$..., che dee onninamente intersecare la curva data ABC... nel richiesto punto estremo x della normale (*e*).

(*e*) Questa soluzione e la compagna del n° 10 esigono che si sappia menare la tangente alla curva data in ogni suo punto. Or questo problema si tiene generalmente risolvibile con sufficiente esattezza grafica mercè tale applicazione di una riga alla curva nel punto dato, sicchè un piccolissimo arco della curva nel cui mezzo si trova il punto esista sulla direzione della riga. Del rimanente, sotto il punto di vista della teoria questo problema può dirsi che sia stato risoluto con vero procedimento geometrico dal chiarissimo *Hachette* nella sua *Geometria a tre dimensioni, numeri 56, 57 e 58.*

13. Nel caso medesimo delle curve *storte* presentasi come spontanea un'altra maniera; ma temo che la si troverà più elaborata della precedente (che lo è pure abbastanza pel continuo variare dei piani PAa, PBb, ...) avvegnachè per essa riducasi la quistione al caso delle curve piane.

Supponendo unito il dato punto con quelli della curva data nasce una superficie conica, la quale à per vertice il punto e per *direttrice* la curva; talchè il problema riducesi a trovare qual lato di questa superficie sia normale alla direttrice. Or siccome nello *spianamento* o *sviluppo* di una superficie conica rimane immutata la lunghezza di ogni linea giacente in essa, nè variano grandezza gli angoli che nei suoi diversi punti forma coi lati del cono, avverrà che il lato normale alla curva direttrice si cangerà quando la superficie si spiana, in un *raggio* (come suol dirsi) normale alla trasformata di quella curva; epperò il problema si sarà ridotto al caso della normale a condursi da un punto ad una curva esistente nel *piano di sviluppo:* dopo di che sarà facile il ritorno alla data curva primitiva, per la corrispondenza dei punti di questa e i punti della sua trasformata.

PROBLEMA SECONDO

Concernente le normali da un punto ad una superficie

14. La ricerca delle normali che per un punto dato si possono condurre ad una data superficie presenta ancor essa varî casi, che noi tratteremo successivamente, omettendo quelli in cui la superficie è piana o sferica, di facilissime e notissime soluzioni.

Quando la superficie è di *rotazione* riflettendo esser proprietà della medesima che ogni sua normale incontra l'*asse* ne viene in conseguenza che il problema riducesi a condurre pel punto dato le normali al *meridiano* della superficie posto nel piano determinato dal punto e dall'asse.

E un' altra proprietà delle superficie di rotazione consistendo in ciò: che tutte le normali ad essa procedenti dai punti di un medesimo *parallelo* incontrano l' asse in un medesimo punto, si desume che quando il punto dato esiste nell' asse della superficie, le lunghezze delle normali possano aversi conducendo in qualunque piano menato per l'asse le nor-

mali al meridiano prodotto nella superficie; non risultando però determinato rispetto alla superficie, se non le loro inclinazioni all'asse.

15. Quando la superficie è *cilindrica* nel senso più generale di questa voce, basta condurre pel punto dato un piano perpendicolare ai lati della superficie, e trovar poi le normali che pel punto si possono menare alla risultante *sezione retta*. Ed in vero, ciascuna di queste normali essendo nel tempo stesso perpendicolare, nel punto dove incontra la sezione, alla tangente di questa (perchè normale), ed al lato della superficie (perchè esiste nel piano della sezione retta), sarà perpendicolare nel punto medesimo al piano di tali due rette, ossia al piano tangente della superficie: ch'è quanto dire sarà normale alla superficie.

16. Quando la superficie è *conica* nel senso più generale della parola il problema si annunzia come più malagevole, e tale infatti sarebbe se le superficie coniche (al pari delle cilindriche e in genere di tutte le superficie sviluppabili) non ammettessero piani normali ad esse lungo tutta la estensione dei loro singoli lati, o generatrici rettilinee; ma per questa loro proprietà, e per la circostanza che la soluzione acconcia per la superficie conica devesi ridurre a quella già data per la superficie cilindrica quando si cangia una superficie nell'altra col supporre infinita la distanza del vertice del cono dal punto dato, il problema si riduce pure facilmente a dover condurre per quel punto le normali ad una data curva piana. Da ciò infatti si scorge che alla sezione retta praticata nel cilindro debba corrispondere nel cono la sezione QyR *(fig. 9)* prodottavi dal piano perpendicolare alla congiungente PV di quei punti. Or supponendo condotte dal punto P le normali a questa sezione, cioè le perpendicolari alle sue tangenti nei punti di contatto, e dinotandone una con Py, il piano PyV sarà un piano normale alla superficie conica lungo tutto il lato Vy: ed in vero, essendo Py perpendicolare alla tangente yT della sezione (perchè normale a questa sezione), per un teorema notissimo di geometria sarà pure Vy perpendicolare ad yT e quindi normale alla curva QyR; onde il piano PyV di tali due rette sarà un piano normale in y alla curva, e quindi ancora alla superficie in cui giace. Trovato poi così, mediante il punto y, un piano PyV normale alla superficie conica lungo un lato Vy di essa, la perpendicolare Px a questo lato sarà una normale in x alla superficie.

17. Quando la superficie non è cilindrica o conica, nè di rotazione, il chiarissimo Vallée propone qual mezzo generale di soluzione il con-

durre pel dato punto due serie distinte di piani, e descritte le sezioni che producono nella superficie menar le normali ad esse da quel punto. In siffatta guisa gli estremi delle normali alle due serie di sezioni costituiranno due curve, le quali coi loro scambievoli incontri determineranno le normali possibili a condursi dal punto dato alla superficie.

18. È facile però lo scorgere che questo mezzo di soluzione possa rendersi più generale, e quindi assai volte più agevole non assoggettando i piani a passare pel dato punto, ma preferendo le sezioni più facili ad essere descritte con esattezza, sopratutto quando i loro piani potessero esser paralleli; non essendo guari più difficile menar la normale ad una curva piana da un punto fuori del piano che da un punto del piano (n° 11). Sarebbe anche lecito far uso di curve storte giacenti nella superficie se non fosse, generalmente parlando, più malagevole il condurre ad esse le normali dal punto dato; e in tutti i casi la ragione di tal procedimento si trova nel riflettere che per essere una retta normale ad una superficie in un punto di questa, basta esser certo che sia quivi normale a due linee che s'intersegano ed esistono nella superficie, perchè ciò equivale ad esser perpendicolare alle tangenti delle due linee e quindi al piano di esse, il quale coincide, siccome è noto, col piano tangente alla superficie nel punto stesso.

19. Questa maggiore estensione per noi data al metodo proposto dal Vallée agevola molto la soluzione del problema quando si tratta di quelle tra le superficie di secondo grado che non sono cilindriche, o di rotazione. Infatti ciascuna di tali superficie (ad eccezione della *Paraboloide iperbolica* di cui tratteremo più tardi) ammette due serie distinte di sezioni circolari e parallele, i cui centri esistono in due diametri della superficie. Quindi torna facilissimo condurre le normali a queste due serie di circonferenze, e i loro piedi costituendo due luoghi geometrici dell'estremo della richiesta normale alla superficie, questo estremo resterà determinato da ciascuna intersecazione dei due luoghi.

Supponiamo per esempio che si tratti di una ellissoide a tre assi disuguali AA', BB', CC' *(fig. 10)*, e per fissare le idee ammettiamo che il medio in grandezza sia BB'. Allora nell'ellisse $CAC'A'$ applicando il semidiametro medio OB in $O\beta$ e in $O\beta'$, le sezioni $BO\beta$, $BO\beta'$ saranno circolari, e circolari parimente saranno tutte le sezioni parallele ad esse, come le $DQ\delta$, $ER\varepsilon$,... (che son parallele alla prima) ed avranno i centri nei diametri $O\gamma$, $O\gamma'$ rispettivamente conjugati dai due $O\beta$, $O\beta'$. Dun-

que abbassando dal punto dato P la perpendicolare indefinita al piano $BO\beta$, e supponendo che incontri in o, q, r,... questo piano e i suoi paralleli $DQ\delta$, $ER\varepsilon$,... con tirare le oO, qQ, rR,... si avranno tali punti b, d, e,... sulle rispettive circonferenze, che uniti con P le congiungenti sarebbero normali alle medesime, ondechè la curva bde... contenendo gli estremi delle normali condotte dal punto dato ad una serie di curve giacenti nella superficie, sarà un luogo geometrico dell'estremo di una delle normali conducibili dal punto alla superficie.

Praticando il simile rispetto all'altra serie di circonferenze parallele alla sezione $BO\beta'$, avrebbesi un secondo luogo geometrico di quel medesimo estremo, il quale perciò resta determinato dalle intersezioni dei due luoghi.

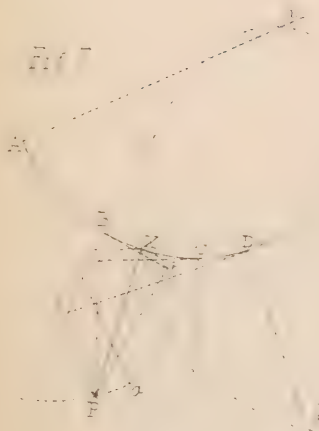
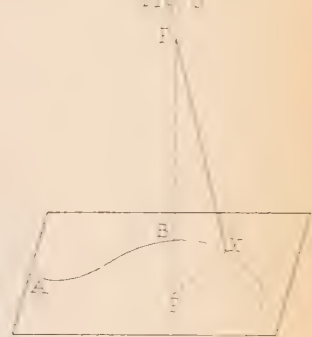
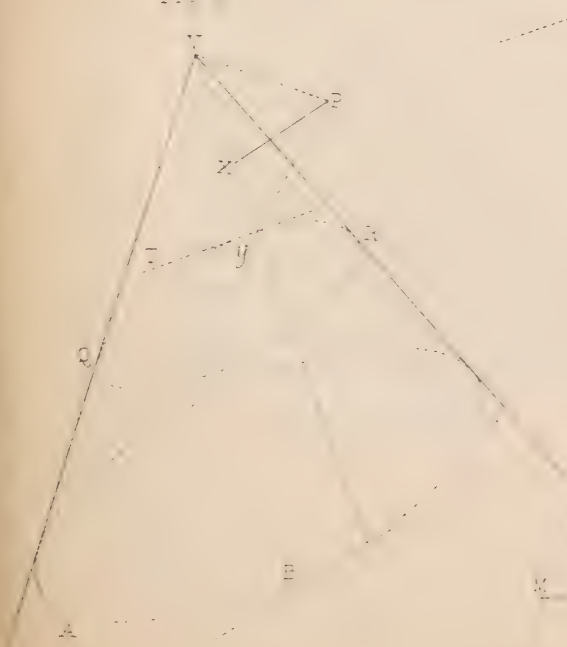
20. Ci sembra utile osservare che la superficie costituita dalle rette oO, qQ, rR,... sia una paraboloide iperbolica; perchè queste rette esistono nei piani $BO\beta$, $DQ\delta$, $ER\varepsilon$,... paralleli tra loro, e si appoggiano a due rette non esistenti in un medesimo piano, cioè al diametro $O\gamma$ luogo dei centri O, Q, R,... ed alla retta perpendicolare a quei piani dal punto dato. E valendo lo stesso per la superficie nascente dal considerare l'altra serie di sezioni circolari, può tenersi che la ricerca delle normali da un punto dato ad una data ellissoide rimane per noi effettuata mediante la combinazione della ellissoide e di due paraboloidi iperboliche.

21. Questa combinazione vale per tutte le superficie di 2° grado, eccetto le cilindriche, le rotonde, e la paraboloide iperbolica la quale non ammette sezioni circolari; ma per le superficie coniche ci sembra più semplice la soluzione contenuta nel n.° 16; e siccome la paraboloide iperbolica ammette due serie di generatrici rettilinee, così menando le perpendicolari dal punto dato alle rette di ciascuna serie, gli estremi di esse forniranno due curve, che nelle loro intersecazioni daranno quelli delle normali conducibili dal punto alla paraboloide. Le quali curve sono anche facilissime a descriversi nei disegni effettivi, perchè le rette di ciascuna serie son parallele ad un medesimo piano, come le due serie delle sezioni circolari che appartengono alle altre superficie di 2° grado non cilindriche nè rotonde (1).

(1) Le soluzioni che per le superficie di 2° grado si desumono da questo e dai n. 19 e 20 se non sono molto semplici, neppure si troveranno gran fatto complicate ove si ponga mente che quelle fornite dall'Analisi conducono ad equazioni determinate di 6° grado, quando la

22. Finalmente il mezzo di soluzione adoperato per la paraboloide iperbolica vuol esser tenuto presente in tutte le superficie *rigate*, sieno sviluppabili sieno storte: superficie che ammettendo una serie di generatrici rettilinee, un primo luogo geometrico dell'estremo di ciascuna normale dal punto alla superficie sarà la curva che passa pe' termini delle perpendicolari dal punto ad esse generatrici. Descritta poi questa curva (che generalmente sarà storta) potrà compiersi la soluzione del problema cercando le normali ad essa dal medesimo punto con uno dei metodi esposti nei numeri 12 e 13, se pure la superficie non ammetta per altre sue generatrici una serie di sezioni piane facili a descrivere (come per esempio si verifica nel *Conoide di Wallis*, nel *Cilindro storto*, ec.) nel qual caso potrebbesi avere senza molta difficoltà un secondo luogo geometrico della estremità di ciascuna normale nella curva risultante dai termini delle normali condotte dal punto dato a quelle sezioni.

---

superficie non è cilindrica o conica o di rotazione; talchè il problema è allora *ipersolido* nel linguaggio degli antichi geometri. Diviene di 4° grado o *solido* quando il punto dato ritrovasi in alcuno dei così detti tre *piani principali* della superficie non conica nè cilindrica, come pure quando la superficie è conica o cilindrica senza essere di rotazione, o viceversa quando è di rotazione senza essere conica o cilindrica o sferica; e finalmente divien *piano* quando il punto dato giace in alcuno degli *assi principali* della superficie è una delle tre elementari di rotazione. Le quali tutte particolarità si desumono pure facilmente da semplici considerazioni geometriche, osservando che i piani principali sono dappertutto normali alle superficie, del pari che sono gli assi principali nei punti dove le incontrano.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA
DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

NUOVO ANEMOGRAFO ELETTROMAGNETICO

MEMORIA

DEL SOCIO ORDINARIO L. PALMIERI

letta nella tornata del dì 11 aprile 1865.

Ho fatto eseguire da qualche anno un apparecchio da me immaginato per registrare la velocità e direzione del vento in tutto il corso del giorno del pari che la quantità di pioggia con tutte le sue fasi come la intensità, la durata ec. La parte risguardante la pioggia fu descritta già e pubblicata ne' nostri Atti col nome di udografo; vengo ora a descrivere la parte che riguarda i venti.

Velocità del vento. Un molinello alla Robinson (fig. 2 Tav. I) fatto in modo da compiere un giro per ogni dieci metri di velocità del vento, porta nella parte inferiore dell'asta verticale un cilidretto sporgente in guisa che ad ogni giro esercitando una leggierissima pressione sopra un tasto *m* chiude il circuito di una pila. Il tasto porta una punta di platino la quale scende in un pozzetto di ferro che contiene del mercurio e così mentre il contatto è sicuro non si richiede alcuno sforzo per averlo. Dobbiamo ora vedere come si registri la velocità del vento mentre il tasto *m* chiude il circuito ad ogni giro del mulinello. Nella figura espressa nella seconda tavola vedesi un cilindro *rr* che gira intorno del suo asse in 24 ore mercè l'orologio congiunto con esso. Sopra questo cilindro è tesa una carta divisa in zone orarie. Nel chiudersi il circuito la leva *ll* alla quale è unita l'ancora dell'elettrocalamita *C* urtando il braccio *d* della leva zancata *df* fa che il braccio *f* prema sul braccio *oo* del rettangolo *oozz*, e quindi il lato *zz* urti la parte superiore dell'astuccetto *ii* il quale

porta inferiormente una matita. Per molle antagoniste il rettangolo e la matita si rialzano quando il circuito s'interrompe onde la matita farà un punto sulla carta. Ma la matita col suo astuccio è portata da una maniera di carretto *r r* a quattro ruote lungo quanto il cilindro è munito di denti nella parte superiore. Questo carretto ad ogni attacco dell'elettrocalamita è obbligato a camminare per l'intervallo di un dente, giacchè la leva *l l* porta nel suo estremo superiore una branca o arpione *g* appoggiato a' denti del carretto. Per la qual cosa, la matita farà una linea di punti lungo il cilindro tutti ad eguali distanze, sia quale si voglia la velocità del vento i quali punti corrispondono al numero di giri del mulinello. Se dunque il moto del carretto duri per un tempo determinato, per esempio un minuto, si saprà quanti giri avrà fatto il mulinello in questo tempo, e quindi si conoscerà la velocità del vento. Bisognerà dunque dopo di quel dato tempo interrompere il circuito, rimandare indietro il carretto e poi ricominciare una seconda ordinata o linea di punti corrispondente alla eguale durata. Il carretto ritorna indietro giacchè l'orologio mercè un eccentrico fa salire e scendere l'asta *h* e questa nel salire eleva l'arpione *g* ed il carretto libero da questo retrocede per un contropeso legato a due fili di seta. L'asta *h* porta un appendice *p* la quale nello scendere preme per un determinato tempo sull'estremo *q* di un tasto il quale mantiene la comunicazione della corrente col mulinello. Nell' apparecchio da me fatto eseguire la velocità è segnata quattro volte l'ora, ma ognuno intende che quest'intervalli possono variare ad arbitrio. A capo di 24 ore dunque si avrà la curva della velocità le cui ordinate hanno valori assoluti (fig. 3 Tav. I).

Direzione del vento. — La direzione del vento suolsi generalmente indicare mercè una banderuola girevole intorno ad un asse verticale; ma volendo per tal modo registrare le direzioni del vento nascono parecchie difficoltà. Prima di tutto se la forza del vento dovrà essa stessa fare operare il congegno segnalatore, l'anemoscopio non sarà capace d'indicarvi i venti molto deboli e la banderuola rimanendo diretta secondo il vento che fu l'ultimo a muoverla, l' osservatore registrerà non il vento che spira ma quello che spirava alcun tempo prima. In secondo luogo co'venti gagliardi che soffiano a buffi o ad ondate di varie intensioni la banderuola oscilla incerta e spesso non può fermarsi in una direzione determinata: se questi suoi moti si traducono in segni permanenti, questi non potranno avere un significato preciso. Questi ed altri inconve-

nienti erano stati già avvertiti, e furono proposti altri modi per segnare la direzione del vento senza l' uso della banderuola. Ora io descriverò il congegno che mi è sembrato opportuno come segnalatore sensibilissimo ed infallibile della direzione de' venti, e dopo dirò come essi vengono registrati sul cilindro *rr* dell'apparecchio scrivente.

AB (fig. 1 Tav. I) è una gabia di lamine metalliche a quattro facce verticali (1); in ciascuna di queste ci ha un cono tronco de' quali la figura ne mostra due *C* e *D*. La parte stretta di ciascuna di queste cavità coniche è chiusa da una coppa di lamina metallica *E*, *F* fissata all'estremo di una leva *g*, *h*: basta il più leggiero soffio entro una delle cavità coniche per far staccare la coppa che chiudeva l' orifizio interno. Sopponiamo che per vento di *S* la coppa *F* si distacchi l' altro braccio della leva *h* muoverà il tasto *l* e chiuderà il circuito. Se l' acqua delle piogge spinta dal vento entrasse nella coppa è provveduto in modo che per apposito canale se ne vada fuori. I tasti si possono intendere dalla figura; il contatto si ha per punte di platino in vasellini di vetro coperti. I quattro tasti e tutto quello che si vede scoperto è chiuso in una cassa cilindrica più stretta della gabbia *AB*, quantunque nella figura sembri dover essere eguale, perchè a far meglio intendere il meccanismo de' tasti *h* ed *l* si son messe divergenti le leve *g* ed *h*. Per tal modo parrebbe che si potessero solo indicare i quattro venti cardinali, ma ognuno intende che se ne debbono indicare otto, giacchè se spira un vento collaterale si muoveranno due tasti nello stesso tempo, e vedremo che la scrittura sulla carta ne fa discernere sedici. Se la gabbia si facesse ottagonale, si potrebbero avere primitivamente sedici direzioni, e 32 per lo modo come si veggono registrati dall' apparecchio scrivente.

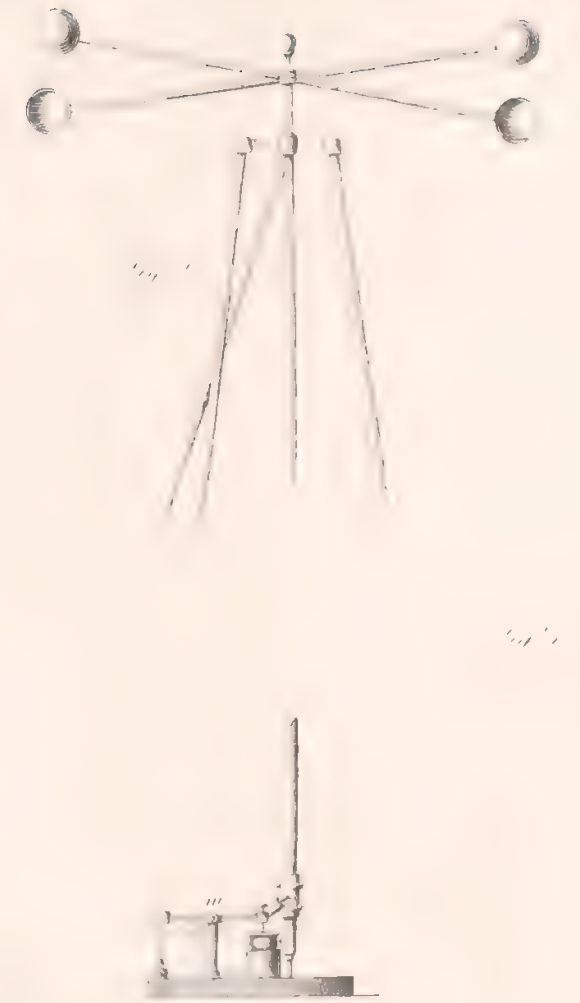
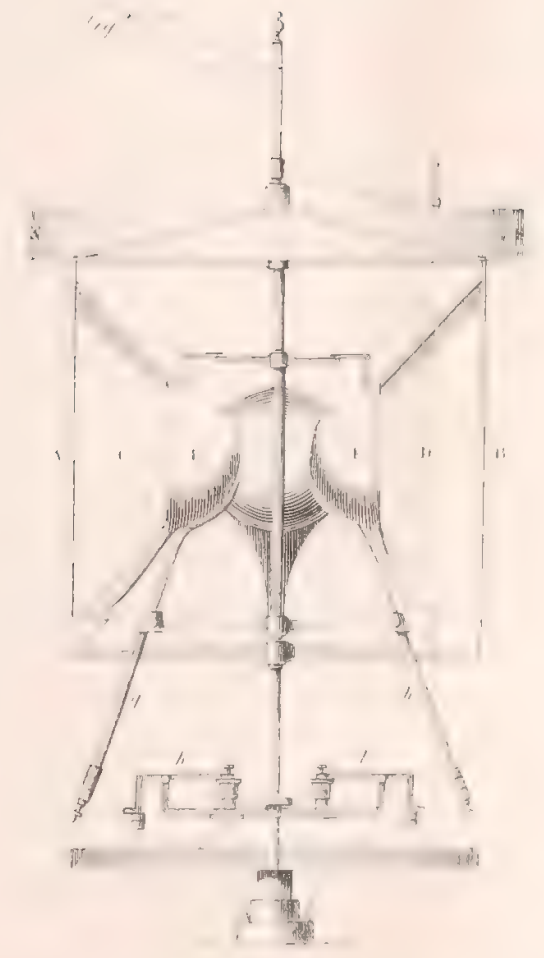
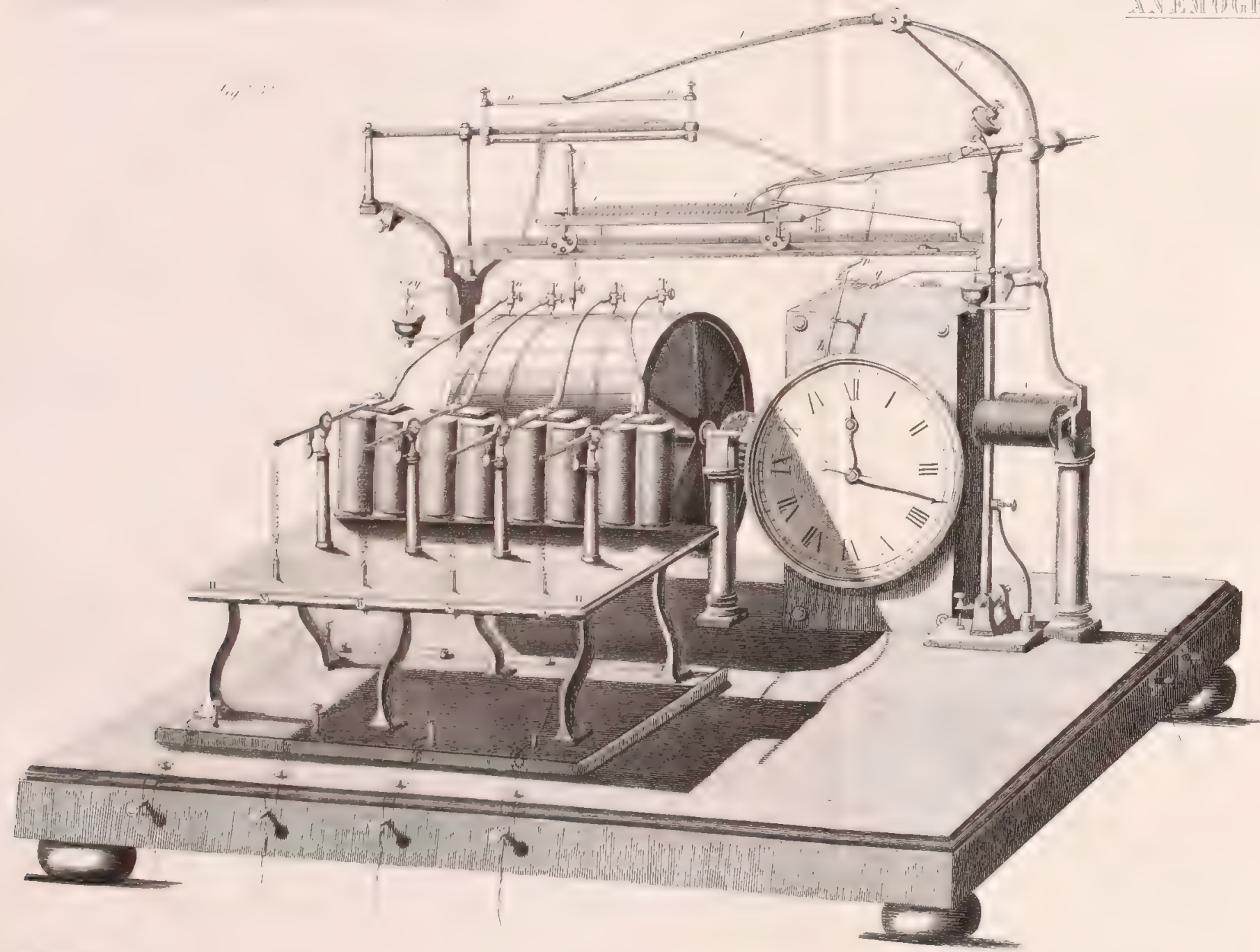
Vediamo ora come la direzione del vento venga registrata sulla carta del cilindro *rr* (Tav. II). Ciascuna delle leve dell' apparecchio di sopra descritto ossia ciascun tasto è destinato a chiudere il circuito con una delle quattro elettrocalamite posta sulla tavoletta *H H*, le quali perciò corrispondono a'venti N, E, S ed O. Ogni ancora di queste elettromagneti è legata ad una leva ed all' estremo di questa trovansi le matite colorate *n*, *e*, *s* ed *o* le quali quando una o due elettrocalamite sono in azione, perchè i tasti superiori chiudono il circuito, segnano sulla carta il vento che spira. Per un vento collaterale si avranno due segni contemporanei

(1) Potrebbero essere otto.

di pari intensità, ma se il vento non sia giusto intermedio tra due cardinali e sia per esempio un SSO si vedranno i segni del S forti, e deboli quelli dell'O, e così con quattro elettromagneti si leggono 16 venti.

La direzione del vento è segnata quattro volte l' ora immediatamente prima di segnare la velocità e per un tempo più lungo il che si ottiene mercè la punta di platino *s* ch'è spinta nel mercurio del vasellino *v* mercè la leva *sss'* alzata dall'asta *h* dell' orologio.

Avrei potuto fare uso di una carta continua sul cilindro *rr*, ma ho voluto obbligare l' osservatore a visitare lo strumento ogni giorno.

ANEMOGRAFO

ATTI DELLA R. ACCADEMIA
DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

STUDJ SOPRA I TERRENI AD ITTIOLITI DELLE PROVINCIE NAPOLITANE DIRETTI A STABILIRE L'ETA' GEOLOGICA DE' MEDESIMI

PARTE SECONDA

MEMORIA

DEL SOCIO ORDINARIO O. G. COSTA

presentata nell' adunanza del dì 11 aprile 1865.

Calcarea stratosa di Pietraroja

Dopo la presentazione della prima parte di questi miei *Studî* alla Reale Accademia delle Scienze, e durante l'impressione di quella, le vicissitudini politiche sopravvenute, avendo occasionato ancora mutamenti e coordinamento nuovo di questa scientifica istituzione, e chiamato ancor me a funzioni ed occupazioni svariate e molteplici, n'è proseguito il considerevole intervallo passato fra la prima e questa seconda parte del mio lavoro.

Nella prima parte, venuta alla luce nel 1862, quasi dopo quattro anni della presentazione, si trattò degli *Scisti bituminiferi di Giffoni*, dimostrando com'essi fossero di origine lacustre, e di una età posteriore alla formazione di quei monti. La qual cosa poi è stata più ampiamente dimostrata nelle mie *note geologiche e paleontologiche sui monti picentini*.

In questa parte seconda si versa quindi sulla *calcarea stratosa di Pietraroja*: alla quale seguiranno la terza e quarta parte, che riguardano la *calcarea ad ittoliti di Torre d'Orlando presso Castellammare*, e la *calcarea tenera a grana fina di Lecce*, o il così detto *lecciso*. Le quali altre due parti mi propongo compiere senza interruzione, se da forze maggiori non ne vengo impedito.

CAPITOLO I.

§ 1. *Etimologia del nome Pietraroja*

Pietraroja, *Pretaroya*, *Pretarogia*, e *Pietraroccia*, sono i diversi modi coi quali trovasi scritto in antiche carte legali e pergamene il nome del villaggio di cui si vien discorrendo.

Pietraroja scrivesi comunemente ne' giorni nostri, e da più tempo è usato così.

Pretarogia trovasi scritto su due pergamene del 1400 (3, luglio), contenenti atto di compra-vendita; le quali due pergamene sono conservate dall'Arciprete D. Domenico Varrone dello stesso villaggio.

Pretaroya trovasi scritto negli atti di nascita del 1613, mutata essendosi cioè l'*i* in *y* greco.

Pietraroccia è il modo più comunemente usato nelle antiche scritture di compra-vendita, e di altro genere.

Ora, tutti e quattro questi diversi modi di scrittura convengono in ciò, che si compongono di due elementi; uno costante, ch'è il sostantivo *pietra* o *preta* (modo volgare), il cui significato non è dubbio: l'altro variabile, e soggetto ad interpretazione, ch'è l'aggettivo *roja*, *rogia*, *roya*, e *roccia*. Quest'ultimo sembra uno di quegl' idiotismi introdotti da insipienti, che credono emanciparsi dalla comune degli uomini, permutando qualche cosa de' nomi generalmente usati: come *lona* per *luna*, *porcaccio* per *procaccio*, *Catterina* per *Caterina* ecc. Ma chi non si accorge essere un pleonasmo *pietra* e *roccia*, e quindi non esser questo il nome originario di quel luogo?

Se mal non mi avviso, quel *roya* dev'essere il vero aggettivo del sostantivo *pietra*, il cui significato sembra ben esprimere la natura di quella calcarea su cui siede il villaggio. Comunemente nelle nostre contrade più meridionali, con l'aggettivo *roja* s' intende qualificare la cosa inugualmente dura, aspra, erosa; e potrebbe essere stato introdotto dagli spagnuoli; perocchè in lingua Castellana *royo* e *roydo* significa *rosso*.

Lo stesso aggettivo trovasi appo noi impiegato per una sorta di uva duracina, a grossi acini, di color rosso ineguale, e di tarda maturità.

Non è poi apprezzabile il mutamento dell'*y* in *j*, essendo ciò dovuto

agli amanuensi, ed a quelli che ànno pensato di abolire l'y greco, e scriverlo all'italiano modo coll'*j* lungo.

Che che ne sia, abbiasi questa interpetrazione come mia opinione; ma certo corrisponde appuntino alle condizioni della roccia sulla quale il villaggio di Pietraroja risiede.

§ 2. *Posizione dell' abitato*

Si pretende che il villaggio originariamente sedesse là dove al presente si trova; ma questa credenza non à in suo sostegno che la semplice tradizione orale, non trovandosi appoggiata a verun fatto storico nè monumentale.

Pel contrario risulta dalla Storia di un tremuoto, registrato in una cronaca ufficiale, che l'abitato, nel 1688, sorgeva dappresso al Castello ducale, là propriamente ove tuttora esiste una chiesetta dedicata a S. Anna; val quanto dire nella parte più eminente di quel ripiano, stando la chiesetta alla parte inferiore, ma in luogo saldo. Il tremuoto di quell'anno, avvenuto ai cinque del mese di giugno, lo diroccò per intero, e molti ruderi furono traghettati fin là dove attualmente riedificata si trova Pietraroja; sul declivio cioè di quel piano, rivolto a S-E. Dalla fedele ed ingenua descrizione di quel luttuoso avvenimento si deduce, che gli strati calcarei, sopra de'quali i casolari erano eretti, subirono un sensibile spostamento, e sdrucciolando per la china del monte portarono seco loro gli avanzi fondamentali degli abitacoli (1).

L'aja occupata dagli strati ad ittioliti, ben distinta dalla roccia sedimentaria primitiva, à una inclinazione dal N. al S. di 8 a 12 gradi (2). Cresce questa inclinazione sul cominciar delle case attuali dai 20 ai 25 gr., e questo accrescimento è dovuto a spostamento successivo, come apparisce dai marchi di frattura che ànno sofferta gli strati là dove la inclinazione si muta bruscamente crescendo.

(1) Trovando di qualche importanza la descrizione di quel tremuoto, registrata dal Parroco di quel tempo negli annali o cronache scritte da lui, non sarà discaro che sia qui riferita in nota. Vedi in fine.
Noteremo inoltre, che il villaggio in quell'epoca non contava più di 1700 abitanti: ora ne possiede 2287. In meno di due secoli è cresciuta quasi di un terzo.

(2) Questa inclinazione è stata da me valutata sopra gli strati inferiori che si trovano nello stato normale in fondo degli scavi praticati di due metri allo in circa di profondità.

§ 3. *Posizione geografica.*

Uno de' più alti monti del Sannio è il Matese. Esso succede in terzo luogo dopo il Gran Sasso d'Italia e la Majella, che appartengono agli Abruzzi. La parte più eminente del colossale Matese è *Monte Miletto*; il cui acrocoro si estolle sul livello del mare per 2056 metri.

Al S-O del suo prolungamento sorge il Monte Botria, Mutria o Mutolo (1), la cui maggiore elevatezza segna 1711 metri sull'attuale pelo delle acque del Mediterraneo.

Al piede di questo monte, ed al suo lato meridionale, succede un altipiano, sul quale fu edificato il villaggio di Pietraroja. Un vallone, detto dell'*acqua calda*, in fondo del quale scorre un ruscello, divide l'altipiano di Pietraroja dal piede del Botria. L'altezza di Pietraroja sull'attuale livello del mare è di metri 714.

Dista 20 miglia da Piedimonte d'Alife, 5 da Cerreto e 20 da Benevento, Capitale della provincia, alla quale oggi appartiene.

Il ruscello che scorre sul *vallone dell'acqua calda* à la sua origine da tre fonti, due delle quali sgorgano dal versante occidentale del *Lamaturo*, e la terza dallo stesso Botria. Il fiumicello scarica le sue acque sul lato occidentale, scorre al piede del declivio meridionale di Pietraroja, animando un molino, e va a congiungersi con l' altro fiumicello che scorre rasente Cusano, e così riuniti costituiscono il fiume torrente della Valle di Cerreto per tributare le sue acque al Volturno.

Capitolo II.

§ 1. *Condizioni speciali della roccia.*

Si è detto nel precedente capitolo che gli strati ad ittioliti di Pietraroja sono ben distinti dalla roccia di sedimento primitivo. Vi sono dun-

(1) Mutolo è il nome meno comune e più volgare. Nondimeno esso ben esprime la condizione orografica sua, volendosi dire *scantonato*.

Botria forse vien dal greco, *βοθριον*, *fossetta*.

que due maniere di roccia, l'una ben diversa dall'altra, ed appartenenti a due epoche diverse.

Il Prof. Arcangelo Scacchi si avvertiva di tale differenza, come apparisce dalle note ch'esso prendeva nel suo viaggio sul Matese, a me gentilmente comunicate in lettera. *Nelle vicinanze di Pietraroja*, dice egli, *le rocce sembrano appartenere parte alla formazione giurassica e parte alla cretacea compreso il macigno*. E poco appresso, discorrendo della calcarea ittiolica dice, ch'essa *offre i caratteri mineralogici della formazione cretacea avendo frequenti rognoni ed anche sottili strati di piromaco. Vi notava un Pettine di notevole grandezza d'ignota specie, impressioni somiglianti a fucoidi o anellidi (lumbricarie)—incerte tracce di Nerinee e d'Ippuriti.*

Ora è ben importante scendere nelle maggiori particolarità per ben separare le due formazioni in un punto stesso, tanto considerandole dal lato mineralogico, per quanto il comporta la loro natura calcarea, quanto dalla struttura e da' fossili che ciascuna racchiude.

In generale la roccia di quel monte è una calcarea compatta, dura, uniforme, bianca, a frattura netta, liscia, poco irregolare. È senza dubbio stratosa, ma gli strati ànno una spessezza considerevole, i cui limiti di rado sono discernibili con la vista ordinaria, e che neppure con le esplotazioni sempre si manifestano. Quà e colà si mostra sommamente silicea, di color cenerino, o di un bianco sudicio, con frattura concoide nettissima.

I fossili ch'essa racchiude sono assai scarsi. Io vi ò trovato i seguenti:

1. *Pecten cristatus* n...... — Trovasi sovente aggruppato, e nella calcarea silicea; è però raro.
2. *Bulla gigas*, Cos. (1)
3. *Acteonella globosa*, n.
4. *Requienia plicata*, n.
5. *Hippurites*

(1) La semplicità di struttura delle conchiglie di tal genere, e specialmente trattandosi de' loro moduli interni, contrasta con la numerosa serie delle specie fossili denominate dai Paleontologi. Io non trovo, ne' moduli di Pietraroja, altro carattere distintivo eccetto le sue dimensioni, giungendo fino a 0,11 di lunghezza, mentre somiglia in tutt'altro a diverse altre specie. Quindi lo specifico nome che le ò imposto è da tenersi come semplice distintivo.

La stessa protesta anticipo per quelle altre delle diverse località di queste meridionali provincie italiane, delle quali sarà discorso nel proprio luogo.

6. *Echinus*...	Piccolo segno di ambulacri, ma molto ben distinti.
7. *Thetiolites Tenorii*	Gruppo numeroso d'individui.

L'altra calcarea stratosa ad ittioliti è di color rosseggiante o bruna, variabile nella sua composizione mineralogica, trovandosi strati marnosi, fragili, con frattura irregolare o piana; altri son poi di calcarea silicea; e spesso uno strato stesso marnoso o calcare dapprima, passa a mano a mano ed insensibilmente al calcareo-siliceo, bianco dapprima e poi cenerino, ed un poco trasparente.

Questa roccia fiutata rende manifesto odore argilloso. Sovente fra gli strati si trovano fioriture di sostanza bianca, facile ad ammollirsi e distaccarsi, ed incrostazioni sottilissime stalagmitiche.

Frangesi la roccia come il vetro ed in tutti i sensi. Gli strati sono segnati da vene, rime, risalti, e nodosità irregolarissime.

Gli strati sono quì ben distinti, facili a separarsi, talvolta con minuta sabbia frapposto tramezzo; tal'altra fiata con incrostazione stalagmitica.

Le ripetute esplorazioni mi ànno dimostrato una differenza siffatta negli strati, che ne trovi di 5 a 6 millimetri, di due a tre decimetri, e di 12 a 15. I primi sono più rari, di una tessitura e grana assai fina ed omogenea, nè racchiudono mai corpo straniero. Circostanza molto importante da tenersi presente nelle nostre conclusioni.

Epperò attentamente esaminando gli strati molto doppi non è difficile avvertirsi, ch'essi constano di più strati sottilissimi, molto bene tra loro riuniti, sicchè l'occhio nudo e la vista ordinaria di rado a primo colpo d'occhio se ne avvede.

Ed è fra questi grossi strati per lo appunto che si trovano interposti quei noduli di piromaco più o meno alterato allo esterno; ed altri di marna litoide col nucleo di piromaco quasi sempre. Di questi ne ò trovati frequenti nell'undecimo strato, dal quale fu estratto quel grande e bello ittiolito, a cui imposi il generico nome di *Coeus.*

Nè la loro presenza è senza importanza, come vedremo; ond'è che io gli effigiai col *Coeus* medesimo nella loro diversa forma e giacimento.

Frequenti sono in questi strati gli ittioliti di generi diversi, e per la maggior parte ignoti. Coi pesci vi ò pur trovato Rettili, Anellidi, Nerinee, e frustoli di Gorgonie. I Rettili, i Pesci ed i Veri Anellidi sono stati già descritti ed effigiati nella nostra Paleontologia Napolitana, alla

quale rimando il lettore. Quì mi limiterò a darne solo il catalogo, aggiungendovi qualche specialità, e talune osservazioni interessanti il nostro argomento. Esibirò eziandio la immagine e la descrizione dei rimanenti soggetti, de'quali non è stato ancora discorso altrove, a fine di ben completare la serie dei fossili, e farsi ognuno giusto criterio del carattere paleontologico di questa formazione o deposito.

Gli strati più spessi, come quelli di 4 a 12 centimetri e più, sogliono essere cristallini, si trovano composti di altri strati di svariata spessezza, ma talmente accollati da non potersi ben separare, ed a bistento discernere : nè mai fra questi, come nei precedenti, s'incontrano fossili di sorta alcuna.

Quegli strati le cui pagine sono ineguali, ondolose, irregolari e scabrose, portano costantemente ittioliti, ed altri organici avanzi. È tra questi ancora che si trovano nuclei o noduli di calcarea-piromaca.

Le quali cose tutte convengono per dimostrare, che quando il deposito terroso ebbe luogo placidamente e lentamente, gli strati si successero delicati e ben uniti tra loro, nè v'intervennero corpi estranei alla materia terrosa che le acque tenevano sospesa. Per opposto, quando le acque vi deposero precipitosamente il materiale più grossolano, eterogeneo, ed abbondante che portavano seco loro, il deposito risultò maggiore, ineguale, e scabroso. In tal circostanza concordemente concorsero le agitate onde del mare, e vi depositarono l'eterogeneità loro, quindi i pesci, semivivi, morti, o disfatti (1).

In uno scavo praticato fino a 34 centimetri di profondità ò trovato, dopo il primo strato informe e terroso, uno strato di calcarea dura, silicea, e della spessezza di 12 centimetri; succede a questo altro di 0,08, ma di grana più fina ed omogenea; indi uno straticello di calcarea bianca, meno compatta della precedente, ed apparentemente quasi che fosse calcinata: questo non è più spesso di 8 millimetri. Il quarto strato è di 3 centimetri, e di calcarea silicea, che frangesi come il vetro, con frattura netta e concoide, e di color grigio. Il quinto, di maggiore doppiezza, à 4 centimetri; la superficie è aspra ed ineguale, di color cenerognolo, e frangibile come la precedente. Succede il sesto strato di un centimetro di spessezza, ineguale, e portante vari frammenti organici di pesci, qualche *nerinea* ecc. Il settimo porta ittioliti e nodoli di calcarea gialliccia, la cui doppiezza, essendo maggiore di quella dello strato, la parte estu-

(1) Vedi Cenni pel 1857, pag. 6.

berante trovasi immersa nello strato sottoposto di 2 cent., al quale aderisce con una spezie di peduncolo. Il successivo ottavo strato, portante ancor esso ittioliti *(Notagogus)*, à lo spessore di 3 centimetri. Nel nono strato si trovarono insieme il *Kometokadmon Fitzingheri*, i due *Salamandrini*, ed i due esemplari dell'*Astiages effossa:* la qual cosa importa che tutte queste specie terrestri e di acqua dolce furono colà traghettate e deposte in un medesimo tempo, e per una medesima ragione; un alluvione cioè.

§ 2. *De' Noduli calcarei.*

Nella medesima tavola in cui trovasi inciso il *Cœus Leopoldi* si sono rappresentate cinque diverse forme di tali noduli, che frequentemente ò incontrati in quel medesimo strato ittiolitico. Com'essi si sono generati dapprima è cosa ormai conosciuta. Sono delle stratificazioni successive intorno ad un nocciolo più duro, e d'ordinario siliceo, o altro corpo eterogeneo. Consumati indi gli straticelli dall'acqua scorrente, il nodulo è rimasto tondeggiante od ellittico; e poscia ricoperto novellamente dal deposito successivo che su quello strato ànno operato le acque.

Questo fatto concorre dunque, con la presenza de' corpi organici terrestri, lacustri e fluviali a rafforzare la mia conghiettura, che ivi scorreva un torrente od un fiume reale: e che contro di esso, nel versare le sue acque, ora nelle piene, ora nelle secche, in un piccolo seno di mare, le onde di questo, nelle alte maree e nelle sue agitazioni vi rigettassero i cadaveri in esse contenuti, deponendoli su quel letto fluviale. Le piene successive del fiume torrente le ricopriva, e poscia ne lasciava a secco novellamente il suo letto.

Di questi noduli ve ne sono di figura quasi circolare, e dei più o meno ovali; siccome ne incontri di grandezza diversa.

(1) Nelle Transazioni Filosofiche di Londra, 1855, vol. 145, par. 1.ª pag. 149, trovasi una Memoria de' sigg. Giuseppe Calton Hooker e Eduard William Binney, dal titolo: *Struttura di certi noduli racchiusi* in una roccia bituminosa, *Coal, e descrizione de' Trigonocarpi che vi si contengono.*

Sembra però che la definizione o descrizione de' *trigonocarpi* sia arbitraria!

Si trovano di simili *noduli* nella arenaria di Montesarchio, ove vien dato loro il nome molto proprio di *Cipolle*; tali mostrandosi all'occhio comune per la configurazione e per la struttura quasi fogliacea, perchè stratosa.

(2) Si consulti intorno a ciò La Bàche, Geological Researchs, pag 95 — e Geolog. Observ. 1851, pag. 686 — Lyell. Istit. pag. 60.

FOSSILI DISCOPERTI FINORA NEGLI STRATI AD ITTIOLITI

Rettili

Chometokadmon Fitzingheri, Cos.	Paleont. P. II.
Salamandra apennina, Cos.	ivi
Triton megacephalus, Cos.	ivi

Pesci

Ganoidi

Belonostomus crassirostris, Cos.	Opera citata, P. II.
— *tenuirostris*, Cos.	
Aspidorhynchus	Rostro di specie innominata.
Lepidotus Maximiliani, Ag.	ivi
— *minor*, Ag.	. . . Veggansi le illustrazioni seguenti:
— *exiguus*, Cos.	
Pycnodus grandis, Cos.	Op. cit.
— *rhombus*, Ag.	ivi
— *rotundatus*, Cos.	ivi
— *Achillis*, Cos.	ivi
Glossodus Heckeli, Cos.	ivi
— *angustatus*, Cos.	ivi
— . . . ?	ivi
Notagogus Pentlandi, Ag.	ivi, e più oltre.
— . . . ?	
Coeus Leopoldi, Cos.	ivi, ed Ittiologia fossile italiana.
Chirocentrites? Cavolini, Cos.	ivi
Oeonoscopus Petrarojae, Cos.	ivi, ed Ittiologia fossile italiana.

Cicloidei

Sauropsidium laevissimum, Cos.	Individuo completo, effigiato nella Tav. 1.
— *angusticauda*, Cos.	Op. cit.
Ichthyus Sebastiani, Cos.	ivi, ed Ittiologia fossile italiana.

CTENOIDEI

Andreiopleura esimia, n.	Tav. II.
Tinca . . . . ?	Paleont. nell'Appendice I, Tav. VI, fig. 4.
Pleuronectes	ivi, Specie indeterminata.

PLAGIOSTOMI

Rhinobatus obtusatus, Cos.	Tav. III.
Centronotus lividus, Cos.	Pal. P.

GENERI D'INCERTA SEDE

Histiurus elatus, Cos.
— *serioloides*, Cos.
Megastoma apenninum, Cos.
Sarginites pygmaeus, Cos.
Rhynchoncodes macrocephalus, Cos.
Piotisoma minor, Cos.

CROSTACEI

Astiages effossus, Cos.	
? . . .	Forsi specie congenere alla precedente. Vedi.
Trichyurus Monticellianus, Cos.	Tav. IV, fig. 10.

GASTEROPODI

Nerinea lanceolata, n.

ANELLIDI

Sarconota proboscidata, Cos	Paleont. III, pag. 354.

ECHINODERMI

Fascolosoma?	Vedi appresso.

ZOOFITI

Gorgonia anomala, n.	
Tethyolites Tenorii, Cos.	Atti dell'Accad. Pont. dicembre 1861.

SPECCHIO COMPARATIVO TRA I FOSSILI DI CERIN E QUELLI DI PIETRAROJA.

RETTILI

Cerin		Pietraroja	
Atoposaurus Jourdani,	H. v. Mayer	*Kometokadmon Fitzingheri*,	Cos.
Saphosaurus Thiollerei,	H. v. Myr.	— ? . . . . . . ?,	Cos.
frammenti.		*Salamandra apennina*,	Cos.
Chelone Meyeri,	Thioll.	*Triton megacephalus*,	Cos.

PESCI

Cerin		Pietraroja	
* *Spatobatis Bugesiacus*,	Thioll.	*Rhinobatus obtusatus*,	Cos.
Microdon elegans,	Ag.	» »	
— *hexagonus*,	Ag.	» »	
* *Belemnobatis Sismondae*,	Thioll.	» »	
* *Phorcynus catulina*,	Id.	*Centronotus lividus*,	Cos.
Pycnodus Sauvanausi,	Id.	*Pycnodus grandis*,	Cos.
— *Itieri*,	Id.	— *Achillis*,	Cos.
— *Bernardi*,	Id.	— *rhombus*,	Agas.
— *Wagneri*,	Id.	— *rotundatus*,	Cos.
— *Egertoni*,	Id.	» »	
Gyrodus macrophthalmus,	Agas.	» »	
Undina striolaris,	Müns.	» »	
— *cirinensis*,	Thioll.	» »	
Macrosemius rostratus,	Ag.	» »	
— *Helenae*,	Thioll.	» »	
* *Disticholepis Fourneti*,	Id.	» »	
Notagogus imi-montis,	Id.	*Notagogus Pentlandi*,	Agas.
» »		— *crassicauda*,	Cos.
» »		— *erytrolepis*,	Agas.
» »		— *gracilis*,	Cos.
Lepidotus notopterus,	Ag.	*Lepidotus minor*,	Agas.
— ..... *sp. indet.*		— *Maximiliani*,	Agas.
Pholidophorus micronyx?	Ag.	— *exiguus*,	Cos.
— ?		» »	
— ?		» »	

(1) Le specie segnate con asterisco sono esclusive di Bugay.

Caturus latus,	Münst.	*Çoeus Leopoldi,*	Cos.
— *furcatus,*	Ag.	» »	
— *elongatus,*	Ag.	» »	
— *velifer,*	Thioll.	» »	
— *Driani,*	Id.	» »	
Amblisemius Bellovacinus,	Thioll.	» »	
* *Callopterus* . . . . . . ?		» »	
Ophiopsis macrodus,	Id.	» »	
Eugnathus praelongus,	Id.	» »	
* *Oligopleurus esocinus,*	Id.	» »	
Megalurus Idanicus,	Id.	» »	
Thrissops salmoneus,	Ag.	» »	
— *furcatus,*	Ag.	» »	
— *cephalus,*	Id.	» »	
Leptolepis sprattiformis,	Id.	» »	
— ?		» »	
Belonostomus sphiraenoides,	Id.	*Belonostomus crassirostris,*	Cos.
		— *tenuirostris,*	Cos.
— *Munsteri,*	Id.	*Aspidorhynchus platycephalus*	Cos.
Holochondrus,		*Platyrhynchus,*	Cos.
» »		*Sphaerodus gigas,*	Ag.
		— *anularis,*	Id.

CROSTACEI

Eryon speciosus,	Müns.	*Astyages effossus,*	Cos.
— *Cuvieri,*	Desm.	*Trichoceros Monticellianus,*	Cos.
		. . . . . . ? . . . . ?	

ANELLIDI

» »		*Sarconota proboscidata,*	Cos.

MOLLUSCHI

Ammonites biplex,	Sow.	*Nerinea lanceolaris,*	Cos.

RADIARÎ

Aculei di Echini,		Ambulacri di Echino	
» »		*Fascolosoma?*	Cos.

PIANTE

Quattro specie innominate		» »	

TEZIÒLITI

» »		*Tethyolites Tenorii,*	

GORGONIE

» »		*Gorgonia anomala,*	Cos.

Da questo specchio comparativo evidentemente risulta, che tra i fossili di Cerin e quelli di Pietraroja occorrono parecchie somiglianze e moltissima analogia. Nella classe de' pesci si trovano anzi molte identità generiche; e se tra quelli di Cerin v' à un maggior numero di generi e di specie, ben si può attribuire alla estensione delle esplotazioni, colà frequenti per ragione della calcarea litografica, che quotidianamente si cava e si mette in commercio. In Pietraroja per opposto tutto quello che finora si è scoperto è frutto delle mie speciali ricerche, e di appositi cavamenti in varie volte colà praticati. Nulla meno le analogie per ora evidenti delle diverse classi, come di rettili, di crostacei, molluschi e radiarii, ispirano confidenza di poter pervenire un giorno a maggiori rapporti tra le due formazioni, se per avventura si proseguiranno colà, in Pietraroja, le accurate ricerche.

Or se tanta concordanza si trova fra queste due località; se da questi dati si parte, come gran parte de' geologi pretende, per definire l'età di un terreno; e se il terreno di Cerin si vuole giurassico per la natura dei fossili che racchiude; ne risulta logicamente, che la calcarea stratosa ad ittioliti di Pietraroja debba anche tenersi per giurassica.

Ma se la roccia sottoposta a quegli strati, la quale costituisce l'ossatura del monte, si vuole esser cretacea; ne proseguita la conseguenza che il giurassico sovrastasse al cretaceo. Se ciò possa regere è facile giudicarlo. In contrario deve conchiudersi, o che la calcarea dell'ossatura non appartenghi al cretaceo, o che la stratosa ad ittioliti non debba tenersi per giurassica, malgrado i fossili che racchiude, pretesi come caratteristici di siffatto terreno.

Capitolo III.

§ 1. *Critico esame del genere* Pycnodus *e delle sue diverse specie.*

Allorquando l'Agassiz, tracciando le prime linee delle sue *Recherches sur les Poissons fossiles*, fondava il genere *Pycnodus*, non ebbe sotto gli occhi altro che due sole specie, il *P. rhombus* ed il *P. platessus* (*Coriphaena apoda* della Ittiol. Veronese). Dopo quell'epoca il numero delle specie è andato successivamente crescendo, a seconda delle ricerche più estese, e del numero degli scrutatori di Ittiologia fossile. Lo stesso

lodato autore annunziava altre 19 specie da lui possedute e non ancora pienamente studiate, onde poterle pubblicare a norma del suo sistema (Op. c. vol. II, pag. 199). Più tardi il signor Thiollier ne à descritte cinque altre specie; e se non ò errato anch'io ne ò distinte due. Onde si à per ora la complessiva cifra di 28 specie. Le specie già descritte sono le seguenti:

1.	*Pycnodus rhombus*, Agas.	Castellammare	18
2.	— *platessus*, Ag.	Bolca	
3.	— *notabilis*, Wagner.	Baviera (1)	
4.	— *Preussii*, Münft.	Bugey, Cirin	
5.	— *Itieri*, Thiol.	Cirin 1852	
6.	— *Wagneri*, Thiol.	Scisti litografici della Baviera	1853
7.	— *Egertoni*, Thiol.	Cirin	1853
8.	— *Bernardi*, Thiol.	ivi	1850
9.	— *Sauvanausi*, Thiol.	ivi	1852

I Picnodi vissero nell' epoca giurassica; e se le norme prescritte dai geologi moderni sono ben fondate, la loro esistenza si protrasse fino all'epoca cretacea.

Nella prima età acquistarono il maggiore loro sviluppo, tanto nel moltiplicarsi, quanto nello accrescimento delle loro dimensioni. I denti di Picnodo, che isolatamente s'incontrano nella calcarea giurassica, accennano a specie veramente gigantesca.

Quello che io posseggo, proveniente dai nostri Appennini di Terra di Lavoro (*Monte di Fontecardegna*), fatta proporzione con li corrispondenti del *P. grandis*, doveva appartenere ad individuo di più che mezzo metro lungo. Perocchè, ove la grandezza del pesce fosse costantemente proporzionata, e nella ragion diretta de'propri denti; posto a confronto col maggiore dei denti del nostro *P. grandis*, di cui si trova nel mio gabinetto un ben intero esemplare, ci rende le seguenti proporzioni:

Pycnodus grandis. Lung. de' denti. 0,011 — del pesce = 0,343
Pycnodus gigas. — 0,018 — del pesce = 0,561 $^{1}/_{3}$

(1) Pesci fossili degli Scisti litografici della Baviera. Tav. 3.

11:343::18:561 $^{1}/_{3}$; lunghezza che doveva avere l'individuo al quale quel dente appartenne; e ciò nella ipotesi che fosse il maggiore di tutti.

In quanto alla successione dello sviluppo loro, si trova una sensibile degradazione da epoca in epoca.

Appo noi, del *P. gigas* non si è trovato fin quì che il solo dente di cui è stata fatta parola più volte, nell'Appennino di Terra di Lavoro, confinante con quelli degli Abruzzi. Del *P. grandis* non di rado si trovano esemplari di età diversa, essendo però sempre più rari i piccoli, nella calcarea di Pietraroja.

Pel contrario, il *P. rhombus* è frequente nella calcarea stratosa di Castellammare, ma sempre piccoli individui, rari essendo gli esemplari che giungono ad un decimetro di lunghezza.

Gl'individui più piccoli misurano 45 millim., ed i loro maggiori denti non oltrepassano un mezzo millimetro.

Un tal fatto viene in comprova della formazione successiva de'terreni di coteste località. Nè vale l'invocazione del principio che gli strati inferiori siano, e debbano esserlo, di epoca anteriore a quella degli strati superiori, come forsi taluno si farebbe a credere quelli di Castellammare.

§ 2. *Ulteriori osservazioni sull'armatura dentaria de' Picnodi e quindi sopra quella del nostro genere* GLOSSODUS.

Denti. Il signor Thiollier, nella sua *terza notizia intorno al deposito di pesci fossili giacenti nel Giura* (dipartimento dell'Ain), à pure riconosciuto l'errore in cui cadde l'Agassiz, considerando come armatura dentaria del vomere dei Picnodi tutte quelle cinque serie longitudinali, che io ò constatato essere un'armatura linguale. Il Thiollier dissente giudiziosamente dal concetto dell'Agassiz; e riporta ancora le analoghe osservazioni dell'Heckel; ma non cessano entrambi dal considerare siffatte armature dentarie come proprie della mascella superiore.

L'Agassiz ebbe a credere ancora che quelle piastre dentarie composte

(1) *Pycnodus* — Apparato dentario di tal genere, trovato in diverse località nel cretaceo, ed in Neuchatel nel calcare giallo. — Memoria della Soc. Geol. di Francia, vol. V. p. 33 nel quadro — Tav. XVIII. f. 6 — Leymerie.

È un *Glossodus* con 5 serie di denti più grandi ed un poco diversi in figura dai nostrali otto denti nella prima serie mediana — 11 nella suprema — 10 nelle intermedie, che sono le minori.

di 5 serie di denti, simmetricamente disposti secondo le diverse loro grandezze, appartenessero all'armatura del vomero, e perciò impare.

Wagner per opposto vorrebbe ch'esse appartenessero agli ossi mascellari: quindi appajate.

Thiollier in questo si associa all'Agassiz, ritenendo come un gruppo impare quello di cui è quistione.

Wagner e Thiollier convengono esser 4 le serie di denti che armano le mascelle de'Picnodi, contrariamente a quello che ne disse l'Agassiz, esser cioè talvolta 4 e tal'altra 5 le serie.

Io posso affermare, sempre più convinto, che niuno di questi dotti paleontologi siasi imbattuto in documenti così evidenti, come sono quelli per me raccolti, i quali, senza equivoci dimostrano esser caduti in fallo tutti e tre i sullodati autori.

La figura 7 ed 11 della Tav. III, che accompagna la II^a^ Parte della nostra Paleontologia Napolitana, offrono la prova dei due ossi palatini congiunti per sinfisi, sopra ciascuno de'quali si trovano 3 a 4 serie di denti normalmente disposti, e, per anomalie facili ad intendersi, talvolta anche cinque (fig. 11. della Tav. citata).

Contemporaneamente ò potuto senza artifizii constatare, che la faccia interna di ciascuna mandibola è armata di 3 serie di denti, come la si vede nella fig. 8. della medesima tavola, la quale presenta le due mandibole di sbiego, riunite per la estremità, e con le loro branche divaricate.

E quando poi si offre il documento di una lingua posta tramezzo alle mandibole, non è più contestabile, che l'apparato dentario attribuito al vomero, appartiene decisivamente alla lingua medesima. Ciò dimostra il fatto espresso dalla fig. 4 della medesima Tavola.

Ultimo documento inappellabile è poi una lingua isolata, coperta di denti, come tutte le armature dentarie effigiate dall'Agassiz, e quelle da me rappresentate nella citata tavola III, fig. 12, 13, e 15.

Laonde, senza ricorrere ad argomentazioni, nè ad ipotesi e ristauri artifiziali di parti staccate, ma poggiando su documenti di organi interi, normali e palpabili, risulta evidente quanto di sopra ed altrove si è cercato dimostrare.

Vertebre. Dichiara recisamente il signor Thiollier, che i Picnodi, *come tutti o quasi tutti i veri Ganoidi della stessa epoca (giurassica) non ànno punto corpo di vertebre distinto ed ossificato*; e che, *l'asse dello scheletro è rappresentato, in tutti gli esemplari trovati nei nostri depositi, da*

uno spazio vuoto , che si estende dall' occipite alla pinna codale, e che separa assai nettamente la rastrelliera delle apofisi spinose superiori da quella delle apofisi inferiori e delle costole. L'intervallo mediano è stato occupato, senza alcun dubbio, durante la vita, da una corda dorsale continua e gelatinosa, che, nella fauna attuale, trovasi negli storioni (1): son queste le sue parole.

Che la colonna vertebrale sia cartilaginea, o che la ossificazione fosse incompleta, sembra vero; ma che mancasse del tutto il corpo vertebrale viene il fatto a smentirlo. Il corpo delle vertebre dei Picnodi è cilindrico, molto breve, liscio, e rilevato sensibilmente sul perimetro dell'una e dell' altra faccetta articolare, talchè nel loro incontro si forma un cordone. Nelle vertebre cervicali ed in quelle della pinna codale, il corpo vertebrale si trova così ben distinto in taluni de' nostri maggiori esemplari , da non lasciare dubbio veruno : come apparisce in quello rappresentato nella Tav. III, fig. 1 , di sopra citata. Le apofisi spinose sono sopra il corpo impiantate per una molto sensibile biforcazione.

Il sig. Heckel crede , che i *Picnodonti giurassici avessero delle mezze vertebre*; cioè *de' bulbi o scudi ossificati alla base delle apofisi delle costole, sia alla faccia dorsale, sia alla faccia addominale, mentre i Picnodonti dei terreni più recenti o più antichi offrono gradi di ossificazione vertebrale inferiore o superiore a quelli delle specie del Giura.*

Così egli trova che nel *Platysomus* dello Zecstein mancano affatto i rigonfiamenti ossei nella base delle apofisi, biforcandosi semplicemente queste per far luogo al passaggio della corda dorsale: e per opposto nel *P. platessus* del Bolca, non solo gli scudi si trovano come nei congeneri di Solenofren , e di Cerino , ma dippiù , tali specie di mezze vertebre tendono a saldarsi tra loro, sia lateralmente, sia da sopra in sotto, per lo mezzo di prolungamenti dentellati che s' ingranano tra loro.

Questa dottrina non parmi poggiata sopra basi ben assodate di organamento animale. Che la stessa generazione di viventi perdesse o acquistasse talune facoltà organiche parziali, senza mutamenti sensibili in tutto il resto, e ciò per la sola successione di tempo, sembrami un poco strano. Ma quando ciò si volesse provare, sarebbe necessaria la comparazione fra individui identici in ogni altra parte, e differenti solamente per essere gli uni di una età incontestabilmente anteriore o posteriore

(1) Thiol. Annal. di Scienze Fisiche e Naturali di Lione; vol. 4 (2 ser.) pag. 384.

all'altra. Perchè non attribuire più tosto all'età degl'individui la differenza della ossificazione delle loro vertebre, il che è semplice, naturale, e constatato da molteplici fatti? Noi possediamo Picnodi di Pietraroja e di Castellammare. Tra i primi ne abbiamo grandissimi e picciolissimi. Nei maggiori, come nel *grandis*, l'ossificazione vertebrale è quale si è detto di sopra; nei secondi è inosservabile. È tale pur si trova in quelli di Castellammare, che sono sempre di piccola dimensione: e come sarà dimostrato nella terza parte di questo lavoro, questi ultimi devono appartenere ad una età posteriore a quella di Pietraroja. Dunque le differenze stanno nella età degl'individui, e non già in quella della formazione della roccia.

§ 3. *Delle differenze specifiche de'* PICNODI.

Nella prima parte della nostra Paleontologia, pag. 105, si è fatto notare che in taluni esemplari del nostrale *Pycnodus rhombus* lo spostamento del capo rende alle impronte tal diversa fisonomia da destare l'idea di una vera diversità di specie. Bene analizzando però ogni cosa, si trova che niuna differenza organica può giustificarne la loro separazione. E lo stesso spostamento genera una più o meno notevole differenza di proporzione tra la lunghezza e l'altezza del corpo, l. c. pag. 102. Ho creduto pure che lo sviluppo delle pinne verticali dovesse seguire la ragion dell'età; onde neppur queste sono, rigorosamente parlando, valevoli a giustificare da sè sole la specifica differenza l. c. in nota. Alle quali osservazioni aggiungesi ora, che trattandosi d'ordinario d'impronte, ne'piccoli individui, essendo i raggi anche più molli e delicati, non lasciano di loro intera l'impronta, spezialmente mancando ne'margini estremi. Lo stesso avviene per la pinna codale.

Ora a tutto questo devesi aggiungere che, tanto nella calcarea di Castellammare, quanto in quella di Pietraroja, non si ànno de' Picnodi che impronte scheletriche, ad eccezione di un solo esempio (1). Belle e nitide son quelle di Castellammare, ma tutte d'individui piccoli; sicchè il maggiore che noi conosciamo non oltrepassa la lunghezza di 4 centimetri; mentre da Pietraroja si sono ottenuti esemplari di 34 centimetri e più.

(1) Vedi *Pal. ont. del Regno di Napoli*. P. I., pag. 105.

E s'egli è vero che anche il sesso imprime differenze, non di rado notevoli, tra maschio e femmina, non potendo ciò verificarsi nei fossili, può ben da questo derivare l'errore di assumere o riguardare come distinte specie due individui di sesso diverso ma d'una specie medesima.

L'Agassiz riguarda il *Pycnodus gigas* come caratteristico del calcare del Giura Svizzero, detto dagl'Inglesi *Portlandiano*, perchè simile a quello di Portland. Il sullodato A. stabiliva queste caratteristiche in seguito delle sue prime e semplici asserzioni. Laonde, per aver trovato denti sì grandi da doversi riferire a specie gigantesca, e ciò nel calcare del Giura svizzero, lo assumeva come caratteristico di tale formazione. Nondimeno, egli medesimo afferma, di aver trovato di tali denti nel Museo di Stutgart, in quello di Soleuvra, e di Neuchatel; i quali non si sa da qual terreno provengano.

Da parte mia posso ora aggiungere alle altre località il calcare dei nostri Appennini, che non saprei dire se sia giurassico o speciale.

Riunendo i fatti sperperati si ha:

a) che il *P. gigas* appartiene al calcare secondario del Giura, e dei nostrali Appennini), o al cretaceo, come taluno lo crede;

b) che il *P. grandis*, Cos. è proprio de'nostrali Appennini sì, ma di terreno subordinato a quello, che costituisce propriamente gli Appennini medesimi, per essere originato dalla scomposizione del primo, rimescolata con melma e sabbia marina di epoca posteriore; e dir si potrebbe cretaceo più recente;

c) che il *P. rhombus* di Castellammare sia pure di epoca diversa e più recente, dell'ultimo periodo forse di quella formazione di sedimento;

d) che il nostro primitivo concetto, fondato sopra la decrescenza di questa specie, la quale trovasi accumolata in branchi in un così limitato spazio, che il *P. rhombus* rappresenti l'ultimo periodo della vita del genere, essendo posteriormente scomparsa, viene ora maggiormente assodato dal trovarsi il *P. gigas* nelle maggiori e più centrali sommità de'nostri Appennini.

Con ciò non si vuol dire, che non esistessero ben distinte specie; ma solamente che talune sono ambigue o mal determinate. In fatti il *P. Bernardi* ed il *Sauvanausi* del Thiollier differiscono sì poco tra loro, che lo stesso autore eleva il dubbio se siano realmente due distinte specie, o se le poche differenze ch'egli vi trova dipendessero dall'età diversa de-

gl'individui, o, il che vale lo stesso, dal loro diverso sviluppo. L'autore si studia di attenersi alla prima ipotesi, poggiando i suoi ragionamenti sopra probabilità, ma senza documenti (1).

Capitolo IV.

§ 1. *Esame comparativo delle squame dei due Lepidoti* UNGUICULATUS E MINOR, *Agas.*

La prima conoscenza che si ebbe del *Lepidotus unguiculatus* è dovuta a Rüppel, che nel 1829 ne pubblicava la descrizione con molta esattezza. Egli però non conosceva la natura del fossile che aveva fra le mani, sicchè dichiarò solennemente che quella *parte di* corazza (trattandosi di un frammento soltanto) *squamosa era di un animale rimarchevole, tipo differente da tutti gli animali conosciuti.* E l'Agassiz, riproducendo intieramente questa dichiarazione del Rüppel, voltandola dall'idioma alemanno al francese, protesta di farlo a fine di dimostrare lo stato d'ignoranza, in cui si viveva in quell'epoca per rapporto alla Ittiologia fossile.

Nel 1832, tre anni dopo cioè, Hermann de Meyer ne costituì un genere sotto nome di *Lepidosaurus*, pubblicandolo nella sua opera col titolo *Palaeologia*.

Tutto questo vien riferito dall'Agassiz, nel vol. II, pag. 251, rappresentando tre sole squame, nella Tav. 30, fig. 7, 3, 8, di naturale grandezza.

Lo stesso lodatissimo autore, nella pag. 260 del medesimo volume ne dà la descrizione di altra specie, sotto nome di *L. minor*, di cui, nella Tav. 34, rappresenta similmente le squame.

Or, confrontando queste due forme di squame non trovi alcuna differenza, se n'eccettui quella delle rispettive dimensioni, e di quella striatura superficiale prodotta dal successivo loro incremento; striatura ben espressa nelle squame del *Lepidotus Mantellii*, rappresentate dalla fig. 15, Tav. 30.

Nella II. parte della nostra Paleontologia del regno abbiamo riportato al *Lep. minor* alcune squame di tal fatta, poggiando sulla identità di forma che le nostrali ànno con quelle rappresentate dall'Agassiz nella sua

(1) Annali di Scienze Fisiche e Naturali, ecc. Lione 1842, Tomo IV, pag. 409

Tav. 34, vol. II, e le abbiamo, per documento, effigiate nella Tav. IV, fig. 1-4.

Questo pesce è comunissimo a Swanage nell'Isola di Purbeck, negli strati che portano il nome di calcare di Purbeck. Recentissimamente M. Roemer ne à scoperti alcuni frammenti ne' dintorni di Hildesheim.

Tutte le squame sono liscie, e tutte presso a poco tanto alte quanto lunghe; quelle del peduncolo codale solamente sono un poco più lunghe (1), fig. 3, ed in forma di rombo; i loro margini sono tutti interi, e non vi sono neppure unghiette ne' fossetti articolari, attaccandosi soltanto pei margini le une alle altre; quelle de' lati, al di sotto della dorsale, sono equilaterali: il margine anteriore loro, nascosto per lo embriciamento, è leggermente smarginato, ed i margini superiore ed inferiore ànno delle piccole unghiette articolari corrispondenti a fossette anche poco marcate; ma quelle della parte anteriore del tronco, e soprattutto de' lati del ventre (fig. 2 e 4) (2) sono molto smarginate nel margine loro anteriore, in modo da formare due corna oblique, e le loro unghiette e fossette articolari sono sviluppatissime; la parte loro smaltata e visibile è più alta che lunga;ma poste totalmente a scoperto: tutte tali squame sono ciò non ostante più lunghe che alte.

Più tardi si è ottenuto dal medesimo luogo, Pietraroja, un piccolo brano con alcune squame identiche a quelle del *L. unguiculatus*, e non diverse dall' altre precedentemente riferite al *L. minor*, salvochè per la loro spessezza, e le loro dimensioni; ma in esse i marchi degli accrescimenti sono maggiormente e nettamente visibili. Si vorrebbe per ciò solo considerare coteste squame come di due distinte specie? E non vediam noi in molte specie stare due, tre, e fino a quattro forme diverse di siffatte squame? Quelle stesse che l'Agassiz rappresenta, niuna eccettuata, mancano di quelle strie che sembrano caratteristiche della specie; le quali in vece si trovano in quelle altre che lo stesso autore ci dimostra come proprie del *Lepidotus Mantellii*, Tab. 30, fig. 15, e che ànno pure quei due prolungamenti angolari, come la nostra della Tav. IV, fig. 1.

Ed affinchè meglio si rilevassero le differenze di tali squame, e le loro

(1) Ciò è comune a tutte le specie, non solo del genere *Lepidotus*, ma anche di quelle del *Semionotus Dapedius*, *Tetragonolepis*, ecc. della fauna antica; come nella moderna meglio lo provano i generi *Balistes* e *Brama*.

Le squame che noi possediamo di tal maniera, sono in generale più grandicelle di quelle che rappresenta l'Agassiz. Vedi innoltre il *Lepidotus unguiculatus*.

(2) Tav. IX, fig. 1 e 2 della nostra Paleont. P. II.

simiglianze con quelle poco innanzi citate ed effigiate dall'Agassiz, se n' esibisce quì la figura di naturale grandezza ed ingrandita insieme, onde potervi con chiarezza esprimere la loro verace struttura, oltre la forma.

La fig. 2, tre volte maggiore della grandezza naturale, è d'una squama, nella quale esistono i due prolungamenti, prodotti dalla smarginatura media; e però de' due prolungamenti, uno è maggiore, e forma un valido aculeo, l'altro è minore e depresso in forma di spina piatta. Non si trova in essa unghietta articolare nè suo vestigio, nè fossetta in alcun sito che indicasse la sovrapposizione di unghietta della squama compagna. La larghezza di essa è maggiore della lunghezza, esclusion fatta de' suoi prolungamenti.

La fig. 3 poi, ingrandita come la prima e d' identica struttura, à la sua unghietta articolare in *a*, senza che nella opposta parte vi sia fossetta da ricevere l'unghietta della squama compagna, come nella precedente.

La figura 4, per opposto, minore di entrambe, offre ad un tempo unghietta articolare *a*, e due fossette sul lato opposto, capaci di ricevere i due prolungamenti, forse di altra squama, o saranno pieghe indipendenti da tale uffizio.

Mi sono limitato a queste cinque sole forme, perchè bastevoli a provare, che la presenza o l'assenza della unghietta è insufficiente per indicare due diverse specie di pesce; ma sulla stessa roccia si trovano ancora altre squame disordinatamente impiantate, nelle quali si veggono forme svariate, alcune sì ed altre nò munite di unghietta. E tutte coteste forme appartennero evidentemente ad un medesimo pesce; perocchè, non solo esse provengono da un medesimo luogo, ma si trovano sopra la stessa lapide disseminate, e talune ancora aggruppate, Tav. VII. fig. 6, di svariata forma e grandezza quali si osservano; ma l'intima loro struttura, la natura e colore dello smalto, e le graduazioni di dimensione attestano essere parti di un medesimo tutto.

La figura 5, è di una squama prolungata in un semplice acume, come sogliono essere quelle del peduncolo codale in tutti i *Lepidoti*, *Semionoti* e simili; ed in essa veggonsi nettamente pure i marchi de' successivi incrementi, i quali attestano di non esservi e non esservi state altre appendici.

La fig. 6 finalmente è semplice, romboidale, liscia, senza marchi di

accrescimenti successivi, e molto estuberante, spettando forse alla regione addominale.

Come distinguer dunque il *Lepidotus minor* dall' *unguiculatus*? E chi autorizza riferire le nostrali squame all'uno piuttosto che all'altro, se tali squame convengono in quanto alla forma con quelle del *Lepidotus minor* e con le altre del *L. unguiculatus*, e dalle prime si dipartono solo talune per le strie di accrescimento, e dalle altre per essere di gran lunga minori? Fino a che non si perviene a trovare un moncone di pesce con squame di tal natura, e che ne porgesse altri caratteri di analogia, o di discrepanza con quelli delle due specie summentovate, la quistione restar deve quale attualmente si trova.

Ecco l'importanza de' frammenti. Per essi siamo costretti a spingere oltre ed iteratamente le nostre ricerche, nella speranza di raggiungere la soluzione del problema.

Farò pertanto notare, che se talune delle squame sono così bellamente striate, ed altre son liscie, ciò dipende dal modo di accrescimento loro, e dal sito del corpo al quale appartengono.

Le prime sono più depresse e slargate, le seconde sono più ristrette e tumide o gibbose; ed in queste le strie di accrescimento si osservano proprio sul loro margine nel senso della spessezza. Intanto la sostanza ed il colorito sono in tutte gli stessi.

In quanto alla forma è risaputo, che mutasi nelle diverse parti del corpo, tanto nei pesci della Fauna antica, quanto in quelli dell'attuale vivente.

Le squame segnate dai numeri 7,8,9 sono di naturale grandezza, senza i rispettivi ingrandimenti, appunto perchè in esse niun segno di strie si trova nell'aja superiore, ma solo nella spessezza, e perciò rare e poco apparenti.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Tav. IV. — *Fig. 2. a* Squama di naturale grandezza, prolungata ne' due angoli posteriori, senza unghietta articolare, nè fossetta per riceverne dalla compagna; *A* la stessa ingrandita tre volte.

Fig. 3. a Grandezza naturale — *A* ingrandita come sopra. Questa, oltre i due prolungamenti degli angoli, à l'unghietta laterale *a*.

Fig. 4. a Grandezza naturale — *A* ingrandita come sopra. Superficie liscia, con unghietta articolare *a*, e due fossette nel lato opposto

per l'inserzione delle unghiette o de' prolungamenti angolari di squama compagna; ha dippiù una espansione *c* sul lato interno o anteriore, delicata, che vien ricoperta dal margine posteriore della precedente.

Fig. 5. *a* Grandezza naturale — *A* ingrandita come sopra. Un solo angolo prolungato, come esser sogliono quelle della base della pinna codale.

Fig. 6. *a* Come sopra — trapezoidale e liscia — superficie gibbosa.

Fig. 7. Gruppo di tali squame come naturalmente impiantate si trovano sopra la lapide.

Fig. 8. Squama romboidale di naturale grandezza, doppia e liscia.

Fig. 9. Altra con gli apici prolungati.

Capitolo V.

CONCLUSIONE

Egli è oramai dimostrato fino all'evidenza il rimescolamento di animali abitatori della terra arida (quali sono i due *Sauriani* discoperti finora), di animali proprî delle acque dolci (Salamandra e Triton (*a*)) e forsi anche di pesci *(Sarginites* (*b*) e *Tinca?)*, i Crostacei littorali (*Astiages effossus)*, con i *pesci di acqua salata*, e le *Gorgonie*, tutti reperibili negli strati ad Ittiolliti di Pietraroja.

Un tale rimescolamento non si può altrimenti concepire, se non ammettendo, che in quel luogo fossero concorse circostanze siffatte da arrestare o rifrangere il movimento delle acque del mare e quello del fiume torrente che in quel punto ebbero ad incontrarsi. Le prime vi rigettarono i cadaveri de' pesci, o pesci stessi semivivi, battuti dalle onde tempestose, o dalle alte maree; mentre le seconde, le acque cioè del torrente, vi depositavano le sostanze terrose, le sabbie, e quanto altro traevano seco loro dai monti, da cui avevano origine. Le opposte correnti

(*a*) Si tiene per fermo dai geologi di non essersi trovati Batrachi del genere *Salamandra*, nè in terreni giurassici, nè in cretacei. Ritenendo come assioma questa sentenza, la calcarea ad ittioliti di cui si ragiona, non può riferirsi nè al cretaceo, nè al giurassico; mentre la presenza de'due Salamandrini già descritti non è cosa dubbia.

(*b*) Io penso che quegli scheletri di pesciolini, de'quali è costituito il genere *Sarginites* appartenessero al genere *Aterina*, od almeno essere affine a questo, e del quale sarebbero i piccoli, come i *Cicinelli* del nostro popolo, o *neonati*.

dovevano necessariamente a vicenda rifrangersi, depositando nel punto d'incontro le materie più gravi ed eterogenee. Così e non altrimenti poteva avvenire il deposito de'pesci nello stato di piena conservazione, quali nella maggior parte si trovano fra quegli strati. Sanno tutti che i pesci, dopo la morte, vengono a galla per la specifica loro leggerezza, accresciuta dallo sviluppo dei gas, e ciò per effetto della corruzione de'visceri interni e delle materie non ancor digerite racchiuse nel ventriglio e nell'esofago. Quindi i flutti del mare rigittano sulle sponde cotesti corpi insieme ad altre quisquiglie, che spesso non mancano. Per tal ragione pure contrariamente è ben raro trovarsi pesci interi, od almeno i loro scheletri, nelle roccie di sedimento primitivo, ch'ebbero origine dal lento deposito delle sostanze terrose; ma in loro vece brani più o meno frazionarî, e per lo più i loro denti, per esser queste le parti più resistenti alla forza degli agenti naturali che promuovono la scomposizione de'corpi organici, e nel tempo stesso sono i più gravi. I pesci delitescenti nelle acque restano in breve ora disfatti, le loro parti molli distrutte, e le più consistenti e più gravi, rimanendo isolate, precipitano nel fondo, e restano sepolte nel sedimento. Così è che di rado si trovano in seno delle calcari di sedimento de'nostri appennini di siffatti avanzi, isolati e sperperati, spezialmente denti di squalidei, del genere fittizio *sferodo*, e qualche brano scheletrico.

Per le stesse ragioni ancora ben di rado s'incontrano di quei notanti, che abitualmente vivono in fondo del mare, come i Rajidei, nei depositi ittiolitici. E sì pure, e molto più rari, si trovano pesci selacini, essendo essi pesci pelagici: quindi i loro cadaveri si disfanno in mezzo alle onde, abbandonando quelle sole parti scheletriche della condizione superiormente espressa.

Che se i Picnodi fanno eccezione a tali regole, giova notare per ora, esser questo un fatto speciale che si avvera in ogni maniera di deposito o giacimento. Laonde è da ripetersene la cagione da condizioni speciali di questa genia di notanti, come in altro luogo sarà dichiarato.

Intervengono nella serie dei fatti riportati in dimostrazione dello assunto, i due generi di Crostacei, che, se non si è caduto in errore, sono stati riconosciuti di quella famiglia, che la fauna attuale ne porge come inquilini costanti delle sabbie littorali e della melma.

Le rare e quasi disfatte *Nerinee*, che in qualche strato insieme agl'ittioliti si sono incontrate, e delle quali si à copia nella calcarea de'no-

stri appennini, e che anche specificamente convengono in una sola, come quella del Cairo, di Montecalvo, di Vitolano ec., per non citarne di località più lontane, costituiscono un fatto identico a quello dei pesci abitatori del fondo del mare. Esse cioè son quasi sempre stiacciate, compenetrate dalla sostanza terrosa, e col nicchio testaceo distrutto: condizione quasi costante delle conchiglie racchiuse nella calcarea di sedimento primitivo. Ond'è a dedursi ch'esse dimorarono in fondo del mare per lungo tempo prima di essere sepolte, e restare a secco. Tutto ciò contrariamente a quello che osservasi nei testacei delle formazioni recenti, mioceniche e plioceniche, chè nell' eocene qualche eccezione s' incontra.

Laonde a me sembra doversi logicamente conchiudere, che quello spazio così circoscritto, composto da strati calcarei ad ittioliti, soprastanti alla calcarea compatta di Pietraroja, fosse stato un *delta*, nel quale confluirono le acque di un fiume torrente, il cui residuale rappresentante è il ruscello che scorre per l' attuale *vallone dell'acqua calda*, contro le acque del mare che lambivano lo stesso punto. E quindi la formazione degli strati medesimi ad ittioliti appartener deve ad una età di gran lunga posteriore a quella della roccia appennina di Pietraroja, del Mutria e del Matese.

Capitolo VI.

Descrizione delle nuove specie di pesci recentemente discoperte.

Genere ANDREIOPLEURA, n.

Caratteri generici. Pinna dorsale remota dal capo, e prossima al peduncolo codale. P. anale anteriore alla dorsale. P. codale biforcuta. Costole robuste, lunghe, e riunite sulla linea ventrale, costituenti una carena: Apofisi, o false costole numerose, delicate, e lunghe. Apofisi superiori simili alle costole. Squame larghe, delicate, ed oscuramente striate, con un piccolo rilievo marginale.

Storia. — Sono oramai 13 anni da che, dagli scavi praticati in Pietraroja, ottenni il magnifico ittiolito, che forma il soggetto del presente articolo. Ma

poichè mutilato nella parte più interessante, qual'è il capo, mi limitai farne menzione nei *Cenni intorno alle scoperte paleontologiche per l'anno 1855.* (Rendiconto dell'Accademia Pontaniana.), entrando in lusinga di poterne incontrare altro esemplare meglio conservato, o la parte staccata e mancante di questo individuo, con gli scavi degli anni successivi, onde ne sospesi la sua pubblicazione. Avendo fin quì cercato in vano di soddisfare a tal desiderio, n'esibisco ora l'immagine e la sua descrizione, per non lasciare obbliata questa interessante specie di genere sconosciuto per quanto io mi sappia.

La generica denominazione impostagli esprime uno de'più eminenti caratteri che lo distinguono, la robustezza cioè delle sue costole, nome improntato dal greco ανδρηιος forte, robusto; ηλευρα cavità toracica.

L'altro carattere che si appalesa tostochè si dirige sopra esso lo sguardo è riposto nelle squame, assai larghe, lisce, e di apparente figura romboidale.

Il complesso dei caratteri sensibili di tal pesce lo accostano agli Alecoidei, e per la presenza delle molteplici e delicate false costole, meglio che ad altri, si stringe coi pesci delle tribù de' Clupeidei.

ANDREIOPLEURA VETUSTISSIMA, N.

Tav. II. (fig. ridotta a metà della grandezza reale).

La lunghezza dello intero pesce qual'esso si trova è di 65 centimetri, misurando fino alla estremità dei lobi della pinna codale. La cavità toraco-addominale ne occupa quasi la metà; il resto appartiene alla coda non compresa la propria pinna.

La *pinna dorsale* sorge a 13 centimetri dalla base della codale; essa è breve, triangolare, e composta di raggi ramificati, il cui numero non può determinarsi, essendo incompleta e spostata.

L'*anale* sorge più innanzi, e si arresta poco dopo l'origine della dorsale: essa è più lunga della dorsale; tagliata a squadra, e si compone di 16 a 17 raggi ramosi.

La *codale* è biforcuta, a lobi quasi uguali, ed è composta di raggi ramosi, come le precedenti.

La *colonna vertebrale* si compone di vertebre numerose, il cui corpo è robusto, scanalato per lo lungo, e col margine articolare rilevato. Se ne contano 39, oltre le 5 richieste dalle costole anteriori che ne mancano, e le cervicali aderenti al capo; quindi $39+5+3=47$. L'altezza del loro corpo è poco maggiore del proprio diametro.

Robuste son pure le apofisi verticali, e molto larghe; delle superiori se ne contano sette ad otto nella porzione spettante alla cavità toraco-addominale; e simili sono le trasversali che chiudono la cavità medesima con la loro congiunzione sulla linea mediana inferiore.

Genere RHINOBATUS, Cuv.

I *Plagiostomi Rajidei* àn lasciate poche reliquie fra gli strati calcarei ad ittioliti. La storia paleontologica contava solamente lo *Squaloraja polyspondyla*, Ag., l' *Astrodermus platypterus*, il *Cyclobatis oligodactylus* Lin., la *Torpedo gigantea*, Ag., e frammenti scheletrici del genere *Myliobatis*.

Recentemente è vero si sono discoperti taluni altri pesci di questa famiglia nel calcare litografico di Cerin, come dal riportato *Specchio comparativo* si rileva; tali sono il *Belemnobatis Sismondae* e lo *Spathobatis Bugesiacus*: e forsi, continuando le ricerche, e moltiplicandosi gl' investicatori più altri ne verranno in luce dal mondo antico. Fin quì però rimane vero essere scarsamente rappresentata la famiglia dei Rajidei. E tra noi è il primo esempio che ci rende la calcarea stratosa ad ittioliti di Pietraroja, e l' unico del genere *Rhinobatus*.

RINOBATUS OBTUSATUS, N.

Tav. III. (metà della grandezza reale)

Bello e grandioso individuo, mutilato soltanto della estrema coda, e da qualche porzione delle pinne appajate, che però non impediscono di ben riconoscerlo come intero. La sua lunghezza è di 73 centimetri, considerandovi la porzione mancante della estremità codale, che per un calcolo approssimativo credo potersi valutare di sei centimetri. La lunghezza del solo corpo, misurando dalla estremità del rostro alla pelvi, è di 40 centimetri; la sua larghezza è di centimetri 33 $^{1}/_{2}$, fiangheggiato però com'è dalle pinne pettorali.

Il capo è più largo che lungo. La cartilagine che ne costituisce il rostro à la lunghezza tripla della sua larghezza; la sua parte estrema è quasi troncata ed appena archeggiata. Le fosse nasali sono assai larghe, di figura ovale, senza potervi però riconoscere alcuna traccia della propria valvola; il margine esterno delle medesime oltrepassa di gran lunga la

linea segnata dalle commessure della bocca. Larga è ben pure la bocca stessa; e la sua armatura dentaria, fatta come all'ordinario a modo di selciato, si compone di denti piccoli, piatti, a base romboidale, e nel mezzo della corona vi corre un risalto trasversale crestiforme.

Le pinne pettorali, abbracciando il capo, oltrepassano alquanto la linea trasversale che tangentalmente passa pel margine posteriore delle fosse nasali; ed i raggi anteriori fanno continuazione col margine anteriore del capo. Si compie così una curva parabolica, la cui ampiezza corrisponde alla cintura toracica, ed il vertice alla parte media del rostro. Posteriormente indi restringonsi gradatamente, fino a che s'incontrano con le pinne ventrali, lasciando fra loro una piccola scissura. Vi si contano 40 raggi ben distinti e biramosi, oltre quelli della parte posteriore attenuata, che si congiunge con le ventrali, i quali non ben si distinguono per la loro tenuità.

Le pinne ventrali sono poco sviluppate, e relativamente alle pettorali sono assai piccole; ànno figura petaloidea, alquanto acute alla estremità; ed i loro raggi non si lasciano ben distinguere, eccetto alcuni della sinistra dello spettatore, essendo l'altra appena adombrata.

La coda è ben larga, avendo una lunghezza minore di quella del corpo, anche calcolandovi la porzione mancante. Essa è sormontata da una pinna verticale, la quale sorge ad un terzo della lunghezza della coda; se ne vede però con chiarezza lo estremo sporgente allo esterno del sinistro lato. Dell'altra pinna, che aver dovrebbe più oltre verso l'estremo, come in tutte le specie congeneri, non apparisce vestigio alcuno, restando forse occultata dall'ampiezza della coda. Della pinna terminale nulla può dirsi, mancando affatto la parte estrema, come sul bel principio fu detto.

Il derme è ricoperto da minutissime granulazioni ossose, di forma ovale, e disposte a sghembo. Quelle che occupano i margini delle pinne, il rostro, e la parte mediana della coda sono le più grosse di tutte; le altre divengono sempre più piccole a misura che si passa al mezzo del corpo, come si trovano rappresentate in *B*, ingrandite.

La colonna vertebrale, o corda dorsale, quantunque cartilaginea, è sì ben conservata, che vi si discernono chiaramente gli anelli di cui si compone; e massimamente quelli che appartengono alla regione toraco-addominale anteriore. Quivi pure nettamente appariscono le apofisi trasversali, le quali da mano in mano si vanno sfumando.

Ben conservata e rilevata si trova la cintura toracica, talchè vi si distinguono le granulazioni della sua intima composizione, qual si trova nelle cartilagini delle specie viventi di tutti i pesci cartilaginosi.

Questa specie si è ottenuta dagli scavi praticati nella state del 1864, come annunziato si trova nel Rendiconto della R. Accademia delle scienze fisiche e matematiche, pel mese di settembre dello stesso anno.

TINCA PRISCA, COS.

Paleont. delle provincie napolitane—Appendice 1ª, *Tav. VI*, *fig. 4.*

Se non vado errato nel riconoscere nell'ittiolito effigiato e descritto nel sopracitato luogo una specie del genere *Tinca,* essa apparirebbe per la prima fiata nella serie de' notanti della Fauna antica. Nè sarebbe strana cosa la presenza di un pesce di acqua dolce e lacustre in mezzo a quelli di acqua salata, dopo aver dimostrato che Rettili terrestri e fluviali, crostacei littorali, ed altre quisquiglie si trovano mescolate fra gli scisti calcarei di Pietraroja: siccome non mancano esempî di tal fatta in parecchie altre località.

Che se poi non fosse in realtà una Tinca quella da me per tale definita, sarà sempre vero essere un Ciprinoideo, e quindi la mescolanza rimarrà sempre constatata.

MALACOSTRACI

Genere TRICHOCERUS, Cos.

TRICHOCERUS MONTICELLIANUS, COS.

Tav. IV, fig. 10.

Sebbene la condizione in cui trovasi il fossile non permette di ben fissarne i caratteri generici, non è perciò men vero, ch'esso non trova convenevole posto tra i generi ben conosciuti, almeno per quanto io ne sappia. Perciocchè, la forma e grandezza delle chele, e la struttura e delicatezza delle antenne, dalle quali si è ricavato il generico nome, sono tali cose che ispirano confidenza a riguardare questo malacostrace di genere ignoto.

La sinistra chela, che sovrapposta alla parte cefalica, ne occulta del tutto ogni organo a questa appartenente, à la mano corta e larga, quasi quadrata, ed il pollice, corto ed acuto; l'articolo mobile non è molto chiaro per essere ben descritto. La chela sinistra à pel contrario il pollice lungo, dilatato, maggiormente nella sua estremità, dritto, ed alquanto archeggiato nel lato interno: il dito mobile è falciforme, guernito di un'unghia arcuata ed acuta: la superficie di questo dito è granulata, come la si vede nella figura 10 *b* ingrandita.

Piccoli, gracili e didattili sono i piedi del secondo pajo. Tali son pure quelli del terzo pajo, ma minori. I piedi del primo pajo sono occultati come il capo.

Il corpo à lasciato di se debole ed irregolare impronta sopra la lapide, quindi non può dirsi alcuna cosa di preciso intorno alla sua specialità. Il suo insieme però e le poche appendici che vi appariscono attestano di essere organato come ogni altro congenere astacino. Notevole è solo sull'anterior parte e nel mezzo di ciascuno articolo del torace una spina acuta.

Le sole antenne si lasciano distintamente osservare. Spicciano esse da una estuberanza frontale, a foggia di setola meno lunga del corpo. Si sompongono di anelli od articoli brevissimi ed alternanti, stando la lunghezza al proprio diametro::1:3, negli uni, e::1:4 negli altri. I primi e maggiori sono ornati di punti impressi di svariata grandezza; i secondi son lisci, ed il diametro loro è pure alquanto minore di quello degli altri. La figura 10 *a* ne rappresenta alcuni sommamente ingranditi.

Questo crostaceo trovavasi nella collezione del defunto Cav. Monticelli, ove giaceva innominato, e soltanto indicata la località *Pietraroja*. Ora appartiene al Museo geologico della R. Università. Ò creduto perciò insignirlo del nome famigliare del suo primo possessore, il quale, se non fu cultore di paleontologia, ebbe il merito di raccogliere alcuni oggetti patrii di tale pertinenza.

L'altra figura 12 della medesima Tav. IV, rappresenta un esemplare dell'*Astyages effossus*. Cos., già descritto nella III parte della nostrale Paleontologia. Esso è leggermente improntato sopra la lapide, spezialmente la parte addominale, come quella ch'è meno consistente. Le due chele lo sono un poco meglio per la opposta ragione.

Proviene ancor esso da Pietraroja, e fa parte dalla mia collezione.

Nella medesima tavola, la figura 11 rappresenta un altro crostaceo

molto imperfetto, ma che sembra appartenere alla medesima specie, od almeno a specie affine. Esso si presenta dalla faccia dorsale, lasciando ben distinguere i suoi anelli addominali coi proprî epimeri.

Proviene dalla medesima località, ed appartiene alla mia collezione.

DESCRIZIONE DEL TREMUOTO, COPIATA ALLA LETTERA DAL LIBRO DEI MATRIMONII

dal 1609 in poi

Nota di quelli, che sonosi congiunti in matrimonio dopo il terremoto, che fu a'5 di giugno 1688, ad hore 21 tanto forte, et terribile, che buttò per terra tutta la terra affatto, et la Chiesa in tempo ch'essendosi cantate le Vespere si cantava la compieta parata con l'assistenti, ch'era io D. Liberatore Manzella Arciprete, D. Terentio Cusano che serviva per Diacono, et D. Thomaso Varrone che faceva il Subdiacono, et si era arrivato al Psal: *In te Domine speravi, non confundar in aeternum,* et gli altri Sacerdoti, ch'erano sette con un Clerico, che sono; D. Alfonso Alessandrello, D. Stephano Meglio, D. Giovanni Philippo, D. Bartholomeo Meglio, D. Pietro Venditto, D. Francesco Amato, D. Francesco Mansella, et il Chierico Pietro Carlo, cantavano dentro il Choro, ove fuggimmo anche noi, ma con difficoltà grande per l'agitazione del terremoto, ch'io a gran pena entratovi mi fermai dietro la Custodia: per la Chiesa altro non si sentiva che rumore et sono di campane et campanelli, che sonavano da per se, commosse dal terremoto, et tutta la Chiesa hor chinarsi verso Oriente, hor verso Occidente con strepito di travi, et aprirsi et serrarsi le lamie, di maniera che mostrava il Cielo dall'apriture: finalmente cascò quella sì bella, et magnifica chiesa fatta con tante lamie, et pilastri tutti a cantoni lavorati, dove s'erano eretti quattordici altari, et in quel giorno si era tutta parata con panni di seta per la festività della Santa Pentecoste, ch'era il dì seguente, giorno memorabile, et da non ricordarsi senza lagrime; cascò il Campanile con quattro campane, due grosse, et due un poco più piccole, cascò parimente l'horologio, et tutti quelli poveretti, che si trovavano dentro la Chiesa sì maschi, come femmine ch'erano concorsi alle Vespere, furono sepolti dalla ruina di essa Chiesa, de'quali pochissimi furono scavati vivi. Restò solo in piedi il Choro fatto a lamia; quale benchè due volte si aprì, et mostrò a noi l'aere, nulladimeno poi miracolosamente si serrò, et questo tenemo per fermo che fu da Dio concesso per intercessione del glorioso santo Nicola, la cui statua nell'altare di esso Santo si trovò rivolta verso l'Altare Maggiore, dove era il tabernacolo del SS. Sacramento, quando prima riguardava verso l'altare di S. Maria delle Gratie all'oriente estivo. Restò in piedi senza niuna lesione l'Altare Maggiore con la Custodia, dov'era il Santissimo Sacramento dell'Eucharestia, l'Altare di S. Nicola, l'Altare del SS. Rosario, l'Altare del nome d'Iddio, la Sacrestia tutta intiera, dov'erano li calici, paramenta della Chiesa, et di Sacerdoti, l'Altare di S. Antonio, di S. Maria del Carmine, le statue indorate, che stavano vicino l'altare di S. Maria delle Gratie. Ma l'altare sudetto fu in gran parte offeso, tutti questi altari stavano edificati alla parte settentrionale. Ma quelli che stavano alla parte meridionale, et australe andorno per terra. Dentro il Choro, conforme ho detto, scampammo la vita tutti noi Sacerdoti. Quando uscimmo da esso vedemmo la Chiesa tutta spianata, uscendo fuora di essa da noi si vidde tutta la Terra ridotta in una macerie di pietre, che nessuno di noi potea sapere dov'era stata la sua Casa. Se sentiano stridi, et lamenti di assaissimi poveretti, che stavano sepolti sotto la ruina di esse case, de'quali se ne disterrorno, et cavorno molti vivi sì femine, come maschi. Tutto il numero, che

vi morsero , si contorno arrivare a cento sittanta duoi , de' quali ne sono cento trenta femine tra grosse et piccole, et quaranduoi maschi similmente tra grossi, et piccoli, siccome si può vedere nel libro de'morti.

Tali notizie si devono al Parroco D. Liberatore Manzella, le quali si trovano registrate nel libro de'Matrimonj, pag. 141. Nel libro de'morti dello stesso anno si trovano due composizioni in verso latino ed italiano sul medesimo argomento.

In quanto ai danni che il tremoto recò alla intera Diocesi Telesina, veggasi il Catalogo de'Vescovi Telesini di D. Giovanni Rossi, in una nota apposta alla vita di Monsignor D. Gio. Battista de Bellis.

Avvertasi da ultimo che si è conservata l'ortografia e la sintassi quale trovasi nel suo originale.

Tav. II

S. Calyò dis

Lit. Dolfino

Taf. III

1, A.

1, B.

10.

12.

1, C.

10 b

10 α

2

3.

11.

4

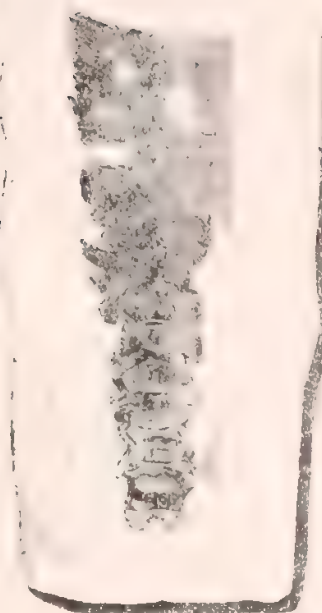
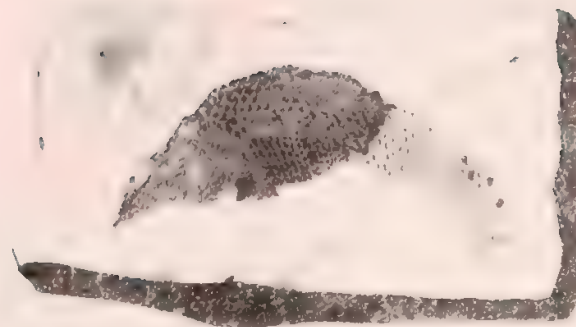
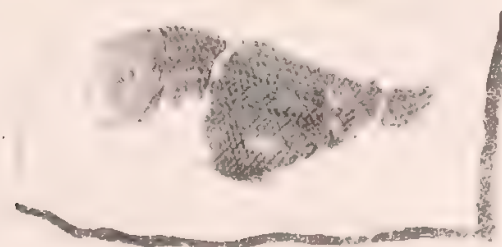
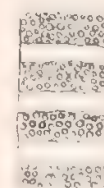
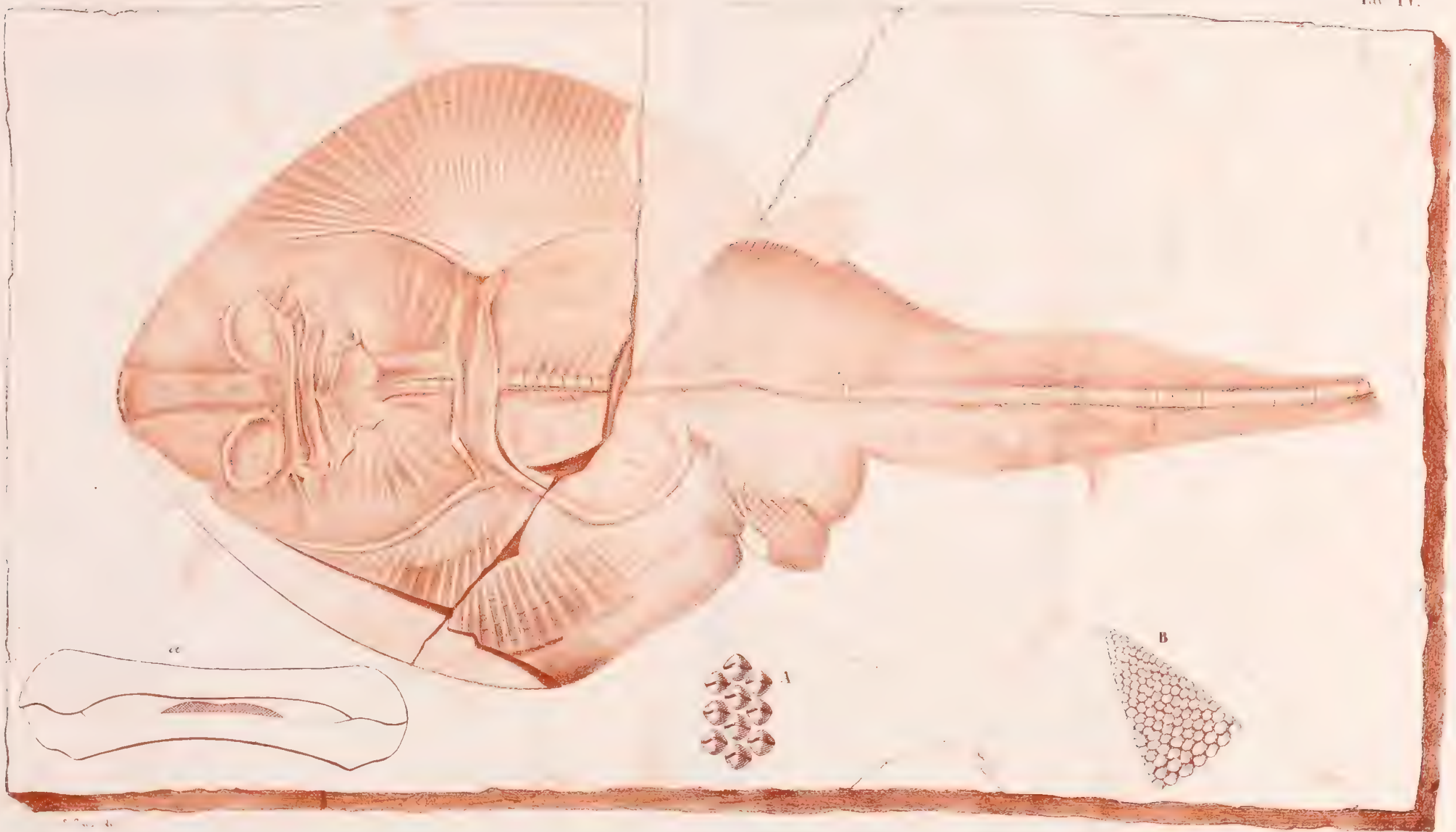
5

7

8

6

Lit Dolhm

a
A
B

ATTI DELLA R. ACCADEMIA
DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SULLO SVILUPPO DELLE FUNZIONI FRATTE RAZIONALI

MEMORIA

DEL SOCIO ORDINARIO N. TRUDI

letta nella tornata del dì 11 aprile 1865

I

Nozioni generali.

1. Rappresentando con $\lambda(x)$ e $\mu(x)$ funzioni intere e razionali, ci proponiamo di trovare il termine generale della serie ricorrente in cui si sviluppa la frazione:

$$\frac{\lambda(x)}{\mu(x)}: \tag{1}$$

serie che può volersi *ascendente* o *discendente*, vale a dire che debba procedere o secondo le potenze crescenti della variabile, o secondo le potenze decrescenti.

Il principio delle serie ricorrenti, o la divisione indefinita possono bastare per calcolare quanti termini si vogliono dello sviluppo; ed, in particolare, dalla divisione risulterà lo sviluppo ascendente o il discendente secondochè il dividendo ed il divisore siano ordinati o entrambi per le potenze crescenti della variabile, o entrambi per le potenze decrescenti. Ma questi mezzi sono insufficienti per la ricerca del termine generale.

2. Noi ammetteremo per semplicità che la data frazione non contenga

parte intera rispetto alla variabile; o, in altri termini, ammetteremo che il grado del numeratore $\lambda(x)$ sia inferiore a quello del denominatore $\mu(x)$. Ciò fa che la serie sia regolare fin dal primo termine, il quale è sempre da tenersi conosciuto a *priori*, perchè in ogni caso *è il quoziente che si ottiene dividendo il primo termine del numeratore pel primo termine del denominatore*. Adunque ritenendo che le due funzioni $\lambda(x)$ e $\mu(x)$, siano le più generali del loro grado, potremo supporre:

$$\lambda(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_{m-1} x^{m-1}$$

$$\mu(x) = \mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \ldots + \mu_m \; x^m$$

ed allora il primo termine dello sviluppo ascendente sarà $\frac{\lambda_0}{\mu_0}$, e lo sviluppo discendente avrà per primo termine $\frac{\lambda_{m-1}}{\mu_m} \cdot \frac{1}{x}$. Inoltre pe' due sviluppi adotteremo le forme seguenti:

$$\frac{\lambda(x)}{\mu(x)} = \mathrm{P}_0 + \mathrm{P}_1 x + \mathrm{P}_2 x^2 + \ldots + \mathrm{P}_n x^n + \text{etc: etc:} \tag{2}$$

$$\frac{\lambda(x)}{\mu(x)} = \frac{\mathrm{Q}_0}{x} + \frac{\mathrm{Q}_1}{x^2} + \frac{\mathrm{Q}_2}{x^3} + \ldots + \frac{\mathrm{Q}_n}{x^{n+1}} + \text{etc: etc:} \tag{3}$$

e la quistione che forma il soggetto delle nostre ricerche si riduce a trovare le espressioni de'coefficienti de' due termini generali $\mathrm{P}_n x^n$ e $\mathrm{Q}_n x^{-(n+1)}$; vale a dire di P_n coefficiente di x^n nello sviluppo ascendente, e di Q_n coefficiente di $x^{-(n+1)}$ nello sviluppo discendente. Queste espressioni sono evidentemente funzioni dell'indice n, numero essenzialmente intero e positivo, e converremo di rappresentare sì l'una che l'altra con la notazione comune $\mathrm{F}(n)$. Laonde con questo simbolo intendiamo di esprimere di una maniera generale il coefficiente del termine generale dello sviluppo della data frazione, qualunque sia la maniera di sviluppo; ma in particolare converrà ritenere $\mathrm{F}(n) = \mathrm{P}_n$ ove trattisi dello sviluppo ascendente; ed $\mathrm{F}(n) = \mathrm{Q}_n$, quando sia quistione dello sviluppo discendente.

3. Del rimanente bisogna osservare che le due maniere di sviluppo possono farsi dipendere l'una dall'altra, ed in modo semplicissimo. Per esempio, ammettendo che sappia trovarsi lo sviluppo discendente di qualunque funzione fratta razionale, basterebbe ciò solo per ottenere lo

sviluppo ascendente della data frazione. In fatti, mutando nella (2) la x in $\frac{1}{x}$, e poi dividendo i due membri per x, risulta:

$$\frac{\lambda\left(\frac{1}{x}\right)}{x\mu\left(\frac{1}{x}\right)}=\frac{P_0}{x}+\frac{P_1}{x^2}+\frac{P_2}{x^3}+\ldots+\frac{P_n}{x^{n+1}}+\text{ etc:}$$

e quindi si vede che tanto è cercare il coefficiente di x^n nello sviluppo ascendente della frazione $\frac{\lambda(x)}{\mu(x)}$, quanto è cercare il coefficiente di $x^{-(n+1)}$ nello sviluppo discendente della frazione,

$$\frac{\lambda\left(\frac{1}{x}\right)}{x\mu\left(\frac{1}{x}\right)},$$

che si forma dalla prima cangiandovi la x in $\frac{1}{x}$, e poi dividendola per x. Si conchiuderebbe nello stesso modo che lo sviluppo discendente può farsi dipendere dallo sviluppo ascendente; e per ciò non si ha che a mutare nella (3) la x in $\frac{1}{x}$, e poi dividere i due membri per x.

Ciò non ostante crediamo che non sia superfluo di considerare direttamente e l'una e l'altra maniera di sviluppo.

4. Un'altra circostanza osservabile si è che lo sviluppo della frazione (1) si può far dipendere da quello della frazione più semplice:

$$\frac{1}{\mu(x)}. \tag{4}$$

Lo sviluppo di questa frazione può certamente riguardarsi come un caso particolare del primo, poichè potrebbe dedursene supponendo che nella funzione $\lambda(x)$ la costante λ_0 si riduca all'unità, e vi si annullino tutte le altre. Ma, inversamente, posto che sia trovato direttamente quello della frazione (4), può subito dedursene quello della frazione (1), non avendosi che a moltiplicarlo per $\lambda(x)$. Siano p_n e q_n i coefficienti di x^n

*

e di $x^{-(n+1)}$ ne' due sviluppi ascendente e discendente della frazione (4); possiamo supporre che questi sviluppi siano della forma:

$$\frac{1}{\mu(x)} = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_n x^n + \ldots . \tag{5}$$

$$\frac{1}{\mu(x)} = \frac{q_0}{x} + \frac{q_1}{x^2} + \frac{q_2}{x^3} + \ldots + \frac{q_n}{x^{n-1}} + \ldots . \tag{6}$$

Moltiplicandoli per $\lambda(x)$, i due prodotti debbono riprodurre gli analoghi sviluppi della frazione (1); e ne risulta:

$$P_n = \lambda_0 p_n + \lambda_1 p_{n-1} + \lambda_2 p_{n-2} + \ldots + \lambda_{m-1} p_{n-m+1} \tag{7}$$

$$Q_n = \lambda_0 q_n + \lambda_1 q_{n+1} + \lambda_2 q_{n+2} + \ldots + \lambda_{m-1} q_{n+m-1} \,. \tag{8}$$

Ecco adunque come i valori di P_n e Q_n dipendono di una maniera semplicissima da quelli p_n e q_n; il che ha molto interesse pel calcolo numerico, imperciocchè la ricerca degli ultimi è, come vedremo, generalmente assai più semplice di quella de' primi.

5. Bisogna intanto riflettere che nello sviluppo discendente della frazione (4), rappresentato dalla formola (6), sono necessariamente nulli i primi $m-1$ termini, perchè questo sviluppo deve nel fatto cominciare col termine che ha per divisore x^m (n° 2). Ora ciò vuol dire che la funzione q_n è nulla per tutti gli $m-1$ valori dell' indice n da o ad $m-2$; di modo che si ha $q_0 = q_1 = \ldots q_{m-2} = 0$; e lo sviluppo si riduce ad:

$$\frac{1}{\mu(x)} = \frac{q_{m-1}}{x^m} + \frac{q_m}{x^{m+1}} + \frac{q_{m+1}}{x^{m+2}} + \ldots + \frac{q_n}{x^{n+1}} + \ldots$$

Siffatte circostanze non hanno più luogo nello sviluppo ascendente della (4), ma si riproducono evidentemente in quello della frazione

$$\frac{x^{m-1}}{\mu(x)} \,. \tag{9}$$

Distinguendo con p'_n il coefficiente di x^n in questo sviluppo, si ha

$$p'_0 = p'_1 = p'_2 = \ldots = p'_{m-2} = 0 \,,$$

e sarà quindi:

$$\frac{x^{m-1}}{\mu(x)} = p'_{m-1} x^{m-1} + p'_m x^m + p'_{m+1} x^{m+1} + \ldots + p'_{n+m-1} x^{n+m-1} + \ldots$$

Sopprimendo da' due membri il fattore x^{m-1} si ottiene:

$$\frac{1}{\mu(x)}=p'_{m-1}+p'_m x+p'_{m+1}x^2+\ldots+p'_{n-m-1}x^n+\ldots$$

e poichè il secondo membro deve coincidere col secondo membro della formola (5), si avrà

$$p_n=p'_{n-m-1}\,.$$

Segue da ciò che per ottenere l'espressione di p_n, coefficiente della potenza x^n nello sviluppo ascendente della frazione $\frac{1}{\mu(x)}$, si può cercare l'espressione di p'_n, coefficiente della stessa potenza nello sviluppo somigliante della frazione $\frac{x^{m-1}}{\mu(x)}$, e mutarvi la n in $n+m-1$.

Avvertimento

6. Nel corso di queste ricerche occorrendo di rappresentare la derivata di un' ordine qualunque di una funzione $f(x)$, ci varremo di qualsivoglia delle notazioni ricevute, ma useremo quella degli accenti in un senso alquanto diverso dall' ordinario, riserbandola esclusivamente a dinotare egualmente la derivata, però divisa pel prodotto de' numeri naturali da 1 fino all' ordine della derivazione. Adunque scrivendo $f^{(r)}(x)$, intendiamo il quoziente che risulta dal dividere la derivata r^{ma} di $f(x)$ pel prodotto $1.2.3\ldots r$; di modo che si avrà generalmente:

$$f^{(r)}(x)=\frac{D^r f(x)}{1.2.3\ldots r}\,;$$

quindi in particolare:

$$f'(x)=\frac{D f(x)}{1}\,,\quad f''(x)=\frac{D^2 f(x)}{1.2}\,,\quad f'''(x)=\frac{D^3 f(x)}{1.2.3}\,,\quad \text{etc:}$$

e la formola di Taylor diverrà in conseguenza:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+h^2f''(x)+h^3f'''(x)+\ \text{etc: etc:}$$

Inoltre adotteremo il simbolo $(\alpha)_i$ per indicare il coefficiente binomiale di rango $i+1$ relativo all' esponente α; talchè sarà in generale:

$$(\alpha)_i=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-i+1)}{1.2\ldots i}$$

e conseguentemente

$$(\alpha)_0=1\,,\quad (\alpha)_1=\alpha\,,\quad (\alpha)_2=\frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}\,,\ \text{etc: etc:}$$

II

Formole e teoremi fondamentali.

7. Siano $a, b, c, \ldots$ le radici distinte dell'equazione $\mu(x)=0$, ed $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ i loro gradi rispettivi di moltiplicità; decomponendo la data frazione (1) in frazioni parziali, potremo supporre:

$$\frac{\lambda(x)}{\mu(x)} = \frac{A_0}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a}$$
$$+ \frac{B_0}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b}$$
$$+ \frac{C_0}{(x-c)^\gamma} + \frac{C_1}{(x-c)^{\gamma-1}} + \ldots + \frac{C_{\gamma-1}}{x-c}$$
$$+ \text{ etc: } \qquad \text{etc: } \qquad \text{etc:}$$

e le costanti A_i, B_i saranno definite dalle formole:

$$(8) \qquad A_i = \frac{1}{1.2.3\ldots i} D^i \frac{\lambda(a)}{\mu^{(\alpha)}(a)}, \quad B_i = \frac{1}{1.2.3\ldots i} D^i \frac{\lambda(b)}{\mu^{(\beta)}(b)}, \text{ etc: etc:}$$

Posto ciò, siccome lo sviluppo della frazione proposta equivale alla somma degli sviluppi analoghi di tutte le frazioni parziali, ne segue che i valori di P_n e Q_n sono uguali il primo alla somma de' coefficienti di x^n ne' loro sviluppi ascendenti, ed il secondo alla somma de' coefficienti di $x^{-(n+1)}$ ne' loro sviluppi discendenti. Ora converremo di indicare con $P_{n,a}$ la somma de' coefficienti di x^n negli sviluppi ascendenti delle sole α frazioni dovute alla radice a; con $P_{n,b}$ la somma analoga per le β frazioni dovute alla radice b; e così per le altre. In questo modo $P_{n,a}$, $P_{n,b}$, $P_{n,c}$, etc: dinoteranno le parti di P_n provvenienti rispettivamente dalle radici a, b, c, etc:, parti che diremo *elementi* di P_n, e si avrà:

$$P_n = P_{n,a} + P_{n,b} + P_{n,c} + \text{ etc: etc:}$$

Uniformemente scrivendo $Q_{n,a}$, $Q_{n,b}$, $Q_{n,c}$, etc: per rappresentare gli elementi di Q_n dovuti alle radici a, b, c, etc:, avremo:

$$Q_n = Q_{n,a} + Q_{n,b} + Q_{n,c} + \text{ etc: etc:}$$

Pertanto è chiaro che la ricerca di P_n e Q_n va ridotta a quella de' loro ele-

menti; ed a tale oggetto proveggono le formole ed i teoremi che passiamo ad esporre.

8. Ed in primo luogo considereremo gli elementi di Q_n, perchè manifestano caratteri alquanto più semplici. Ora l'elemento $Q_{n,a}$ rappresenta, per ipotesi, la somma de' coefficienti di $x^{-(n+1)}$ negli sviluppi discendenti di tutte le α frazioni dovute alla radice a; da un' altra parte essendo in generale:

$$\frac{A_{\alpha-r}}{(x-a)^r}=(x-a)^{-r}A_{\alpha-r},$$

vediamo che nello sviluppo discendente di questa frazione la potenza $x^{-(n+1)}$ ha per coefficiente:

$$\frac{r(r+1)(r+2)\ldots(n-1)n}{1.2.3\ldots(n-r+1)}a^{n-r+1}A_{\alpha-r};$$

ma il fattore frazionario, scrivendo il numeratore in ordine inverso diviene

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-r+2)(n-r+1)\ldots(r+1)r}{1.2\ldots(r-1)r\ldots(n-r)(n-r+1)}=\frac{n(n-1)\ldots(n-r+2)}{1.2\ldots(r-1)}$$

dunque l'espressione del detto coefficiente si riduce ad:

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-r+2)}{1.2\ldots(r-1)}a^{n-r+1}A_{\alpha-r}.$$

Questa espressione, ponendovi $r=1,2,3,\ldots,\alpha$, dà i coefficienti di $x^{-(n+1)}$ negli sviluppi discendenti di tutte le frazioni provvenienti dalla radice a; e perciò l'elemento $Q_{n,a}$ sarà definito dalla formola:

$$Q_{n,a}=\sum_{1}^{\alpha}{}_r\frac{n(n-1)\ldots(n-r+2)}{1.2\ldots(r-1)}a^{n-r+1}A_{\alpha-r}, \tag{9}$$

la quale, mutatis mutandis, vale anche ad esprimere gli altri elementi $Q_{n,b}$, $Q_{n,c}$, etc.; ed intanto possiamo rappresentare il valore di Q_n scrivendo

$$Q_n=\Sigma\sum_{1}^{\alpha}{}_r\frac{n(n-1)\ldots(n-r+2)}{1.2\ldots(r-1)}a^{n-r+1}A_{\alpha-r},$$

a patto che la novella somma sia estesa a tutte le radici distinte dell'equazione $\mu(x)=0$.

9. Con un metodo presso a poco identico si possono determinare gli

elementi di P_n, e quindi la stessa P_n. In fatti l'elemento $P_{n,a}$ risulta dalla somma de' coefficienti di x^n negli sviluppi ascendenti di tutte le α frazioni dovute alla radice a. Ora essendo:

$$\frac{A_{\alpha-r}}{(x-a)^r}=(-1)^r\left(1-\frac{x}{a}\right)^{-r}\frac{A_{\alpha-r}}{a^r},$$

è manifesto che nello sviluppo di questa frazione la potenza x^n ha per coefficiente:

$$(-1)^r\frac{r(r+1)\ldots(n-1)n(n+1)\ldots(r+n-1)}{1.2\ldots(r-1)r(r+1)\ldots n}\frac{A_{\alpha-r}}{a^{n-r}},$$

che si riduce a:

$$(-1)^r\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)}{1.2\ldots(r-1)}\frac{A_{\alpha-r}}{a^{n-r}};$$

ed in conseguenza, come nel caso precedente, si hanno le due formole:

$$(10)\qquad P_{n,a}=\sum_1^{\alpha}{}_r(-1)^r\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)}{1.2\ldots(r-1)}\frac{A_{\alpha-r}}{a^{n-r}},$$

$$P_n=\Sigma\sum_1^{\alpha}{}_r(-1)^r\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)}{1.2\ldots(r-1)}\frac{A_{\alpha-r}}{a^{n-r}},$$

nell'ultima delle quali la seconda somma deve, come prima, estendersi a tutte le radici distinte dell'equazione $\mu(x)=0$.

10. Le espressioni di $Q_{n,a}$ e $P_{n,a}$ sono suscettibili di una interessante trasformazione. Siccome la funzione $\mu(x)$ è divisibile per $(x-a)^{\alpha}$, dinotato il quoziente con $\theta(x)$, sarà:

$$\mu(x)=(x-a)^{\alpha}\theta(x);$$

quindi $\mu^{(\alpha)}(a)=\theta(a)$; e per le formole (8) si avrà:

$$A_{\alpha-r}=\frac{1}{1.2\ldots(\alpha-r)}D^{\alpha-r}\frac{\lambda(a)}{\theta(a)}=\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-r+1)}{1.2\ldots(\alpha-1)}D^{\alpha-r}\frac{\lambda(a)}{\theta(a)};$$

in conseguenza di che le espressioni di $Q_{n,a}$ e $P_{n,a}$ divengono:

$$Q_{n,a}=\frac{1}{1.2\ldots(\alpha-1)}\sum_1^{\alpha}{}_r(\alpha-1)_{r-1}\left(n(n-1)\ldots(n-r+2)a^{n-r+1}\right)\left(D^{\alpha-r}\frac{\lambda(a)}{\theta(a)}\right)$$

$$P_{n,a}=\frac{-1}{1.2\ldots(\alpha-1)}\sum_1^{\alpha}{}_r(\alpha-1)_{r-1}\left((-1)^{r-1}\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)}{a^{n-r}}\right)\left(D^{\alpha-r}\frac{\lambda(a)}{\theta(a)}\right)$$

Esaminando i tre fattori che in ciascuna sono messi in evidenza sotto il

segno Σ, si vedrà che nell'una e nell'altra il primo fattore è il coefficiente binomiale di rango r relativo all'esponente $\alpha-1$, ed il terzo è la derivata dell'ordine $\alpha-r$ di $\frac{\lambda(a)}{\theta(a)}$. In quanto al secondo fattore è chiaro che nella prima esso è la derivata dell'ordine $r-1$ di a^n, mentre nella seconda è la derivata dell'ordine istesso di $\frac{1}{a^{n+1}}$. Dunque, per un teorema conosciuto, le due sommatorie equivalgono rispettivamente alle derivate dell'ordine $\alpha-1$ de' due prodotti $\frac{\lambda(a)}{\theta(a)}\times a^n$, e $\frac{\lambda(a)}{\theta(a)}\times\frac{1}{a^{n+1}}$; e perciò le due formole precedenti si traducono nelle altre più semplici:

$$Q_{n,a}=\frac{1}{1.2\ldots(\alpha-1)}D^{\alpha-1}\frac{\lambda(a)}{\theta(a)}a^n \quad, \tag{11}$$

$$P_{n,a}=\frac{-1}{1.2\ldots(\alpha-1)}D^{\alpha-1}\frac{\lambda(a)}{\theta(a)}a^{-(n+1)}. \tag{12}$$

11. Queste ultime formole conducono ad osservabili conseguenze. Considerando la prima, porremo:

$$f(a)=\frac{\lambda(a)}{\theta(a)}a^n, \tag{13}$$

e si avrà:

$$Q_{n,a}=\frac{D^{\alpha-1}f(a)}{1.2\ldots(\alpha-1)},$$

o, più semplicemente (n° 6)

$$Q_{n,a}=f^{(\alpha-1)}(a). \tag{14}$$

Ciò premesso, dinotata con t una variabile, la (13) potrà mutarsi in:

$$f(a+t)=\frac{\lambda(a+t)}{\theta(a+t)}(a+t)^n; \tag{15}$$

e siccome:

$$f(a+t)=f(a)+tf'(a)+t^2f''(a)+\ldots+t^{\alpha-1}f^{(\alpha-1)}(a)+\ldots$$

risulta che il valore di $Q_{n,a}$ coincide col coefficiente di $t^{\alpha-1}$ nello sviluppo in potenze ascendenti di t di $f(a+t)$, o meglio del secondo membro della (15).

Se poi si considera la formola (12), posto:

$$f(a)=\frac{\lambda(a)}{\theta(a)}a^{-(n-1)},$$

si avrebbe:

$$P_{n,a}=-f^{(\alpha-1)}(a)\,,$$

ed inoltre:

$$f(a+t)=\frac{\lambda(a+t)}{\theta(a+t)}(a+t)^{-(n+1)}\,; \tag{16}$$

e quindi si conchiuderebbe, come poc'anzi, che il valore di $P_{n,a}$ coincide col coefficiente di $t^{\alpha-1}$ nello sviluppo ascendente del secondo membro della (16).

Adunque, riassumendo queste conchiusioni, possiamo enunciare il seguente teorema:

Data la frazione $\frac{\lambda(x)}{\mu(x)}$, *sia* $(x-a)^{\alpha}$ *un fattore multiplo di* $\mu(x)$, *e* $\theta(x)$ *il fattore complementare. Posto ciò, l'elemento di* Q_n *dovuto al primo fattore, ossia la parte che esso attribuisce al coefficiente di* $x^{-(n+1)}$ *nello sviluppo discendente della data frazione, sarà uguale al coefficiente di* $t^{\alpha-1}$ *nello sviluppo ascendente della funzione:*

$$\frac{\lambda(a+t)}{\theta(a+t)}(a+t)^{n}.$$

E l'elemento di P_n *dovuto al detto fattore, o la parte che attribuisce al coefficiente di* x^n *nello sviluppo ascendente della medesima frazione, preso col segno contrario, sarà ancora uguale al coefficiente di* $t^{\alpha-1}$ *nello sviluppo ascendente della funzione:*

$$\frac{\lambda(a+t)}{\theta(a+t)}(a+t)^{-(n-1)}.$$

12. Questo teorema si può tradurre in formole scrivendo:

$$Q_{n,a}=\quad \text{coeff. } t^{\alpha-1} \text{ in } \frac{\lambda(a+t)}{\theta(a+t)}(a+t)^{n}\quad,$$

$$P_{n,a}=-\text{coeff. } t^{\alpha-1} \text{ in } \frac{\lambda(a+t)}{\theta(a+t)}(a+t)^{-(n+1)}\,;$$

a patto che le funzioni che figurano ne' secondi membri s'intendano svi-

luppate secondo le potenze crescenti di t. Intanto in rapporto a questi sviluppi dobbiamo osservare che non è già che faccia d' uopo di trovare i loro termini generali, ma solo i loro primi α termini, ch'è sempre agevole di calcolare direttamente co' mezzi ordinarii di moltiplicazione e divisione. Questo calcolo si può regolare in varii modi; per esempio si può moltiplicare lo sviluppo della funzione $\lambda(a+t)$ per lo sviluppo dell'una o dell'altra potenza $(a+t)^n$, $(a+t)^{-(n+1)}$, e dividere il prodotto per lo sviluppo della funzione $\theta(a+t)$; oppure si può sviluppare il quoziente $\frac{1}{\theta(a+t)}$ e moltiplicarlo per quel prodotto; od ancora si può dividere $\lambda(a+f)$ per $\theta(a+t)$, e moltiplicare il quoziente per la detta potenza, la quale nel calcolo numerico va sempre meglio impiegata in ultimo luogo, a causa dell'esponente n, che vuol tenersi indeterminato.

Però, comunque si operi, siccome il punto objettivo del calcolo è il coefficiente di $t^{\alpha-1}$, si terrà presente che tanto gli sviluppi parziali delle funzioni $\lambda(a+t)$, $\theta(a+t)$, $(a+t)^n$, $(a+t)^{-(n+1)}$, quanto lo sviluppo di un loro prodotto o quoziente, può limitarsi ai primi α termini, e quindi arrestarsi al termine in $t^{\alpha-1}$, riuscendo inutili i termini di grado superiore. In conseguenza, adottando pe' coefficienti binomiali la notazione già convenuta (n° 6), sarà lecito di scrivere

$$Q_{n,a}=\text{coef. } t^{\alpha-1} \text{ in}$$

$$\frac{\lambda(a)+t\lambda'(a)+\ldots+t^{\alpha-1}\lambda^{(\alpha-1)}(a)}{\theta(a)+t\theta'(a)+\ldots+t^{\alpha-1}\theta^{(\alpha-1)}(a)}\left[a^{\alpha-1}+(n)_1 a^{\alpha-2}t+\ldots+(n)_{\alpha-1}a^0 t^{\alpha-1}\right]a^{n-\alpha+1}$$

$$P_{n,a}=-\text{coef. } t^{\alpha-1} \text{ in}$$

$$\frac{\lambda(a)+t\lambda'(a)+\ldots+t^{\alpha-1}\lambda^{(\alpha-1)}(a)}{\theta(a)+t\theta'(a)+\ldots+t^{\alpha-1}\theta^{(\alpha-1)}(a)}\left[a^{\alpha-1}+(-n-1)_1 a^{\alpha-2}t+\ldots+(-n-1)_{\alpha-1}a^0 t^{\alpha-1}\right]a^{-(n+\alpha)}$$

13. In particolare, se $\alpha=1$, vale a dire se a è radice semplice, in ciascuno de' polinomii che figurano in queste formole non dovrà ritenersi che il solo primo termine; e perciò si ha in tal caso:

$$Q_{n,a}=\frac{\lambda(a)}{\theta(a)}a^n \quad , \quad P_{n,a}=-\frac{\lambda(a)}{\theta(a)}a^{-(n-1)}$$

ovvero, tenendo presente che $\theta(a)=\mu'(a)$ (n° 10):

$$Q_{n,a}=\frac{\lambda(a)}{\mu'(a)}a^n \quad , \quad P_{n,a}=-\frac{\lambda(a)}{\mu'(a)}a^{-(n+1)}$$

14. Il teorema del n° 11 si può rendere più esplicito introducendo in

luogo della funzione θ la stessa funzione iniziale μ. Essendo a radice multipla di grado α dell'equazione $\mu(x)=0$, per $x=a$ si ha

$$\mu(a)=\mu'(a)=\mu''(a)=\ldots=\mu^{(\alpha-1)}(a)=0\ ,$$

e perciò:

$$\mu(a+t)=t^{\alpha}[\mu^{(\alpha)}(a)+t\mu^{(\alpha+1)}(a)+t^2\mu^{(\alpha+2)}(a)+\ldots]$$

Inoltre, siccome $\mu(x)=(x-a)^{\alpha}\theta(x)$, posto $x=a+t$, risulta:

$$\mu(a+t)=t^{\alpha}\theta(a+t)\ ;$$

e ne segue che i polinomii $\mu(a+t)$ e $\theta(a+t)$ non differiscono che pel fattore t^{α}, comune a' termini del primo ; di modo che si avrà identicamente:

$$\mu^{(\alpha)}(a)+t\mu^{(\alpha+1)}(a)+t^2\mu^{(\alpha+2)}(a)+\ldots=\theta(a)+t\theta'(a)+t^2\theta''(a)+\ldots$$

e quindi:

$$\mu^{(\alpha)}(a)=\theta(a)\ ,\ \mu^{(\alpha+1)}(a)=\theta'(a)\ ,\ \mu^{(\alpha+2)}(a)=\theta''(a)\ ,\ldots,\ \mu^{(\alpha+i)}(a)=\theta^{(i)}(a)\ ,\ldots$$

È chiaro dopo ciò che gli sviluppi delle due funzioni:

$$\frac{\lambda(a+t)}{\theta(a+t)}(a+t)^n \qquad \text{e} \qquad \frac{\lambda(a+t)}{\mu(a+t)}(a+t)^n$$

hanno i medesimi coefficienti; però, mentre il primo ha solo potenze positive di t, nel secondo i primi α termini sono affetti dalle potenze $\frac{1}{t^{\alpha}}, \frac{1}{t^{\alpha-1}},\ldots,\frac{1}{t}$; di guisa che il termine di rango α, che nel primo è moltiplicato per $t^{\alpha-1}$, nel secondo lo è per $\frac{1}{t}$. Altrettanto avviene negli sviluppi delle due funzioni:

$$\frac{\lambda(a+t)}{\theta(a+t)}(a+t)^{-(n+1)} \qquad \text{e} \qquad \frac{\lambda(a+t)}{\mu(a+t)}(a+t)^{-(n+1)}\ ;$$

ed in conseguenza il teorema del n° 11 si modifica come segue:

Data la frazione $\frac{\lambda(x)}{\mu(x)}$, *sia* $(x-a)^{\alpha}$ *un fattore di* $\mu(x)$. *Posto ciò, considerando i due sviluppi discendente ed ascendente della frazione proposta, la parte attribuita da quel fattore al coefficiente di* $x^{-(n+1)}$, *e quella attri-*

buita al coefficiente di x^n, *presa col segno contrario*, *sono rispettivamente uguali al coefficiente di* $\frac{1}{t}$ *negli sviluppi ascendenti delle due funzioni:*

$$\frac{\lambda(a+t)}{\mu(a+t)}(a+t)^n \qquad \text{e} \qquad \frac{\lambda(a+t)}{\mu(a+t)}(a+t)^{-(n+1)}.$$

15. Il teorema così presentato palesa subito una proprietà, che è di molto interesse nelle attuali ricerche. Siano a e b due distinte radici dell'equazione $\mu(x)=o$, e $Q_{n,a}$ e $Q_{n,b}$ i corrispondenti elementi di Q_n; sarà:

$$Q_{n,a}=\text{coef.}\frac{1}{t}\text{ in }\frac{\lambda(a+t)}{\mu(a+t)}(a+t)^n \quad , \quad Q_{n,b}=\text{coef.}\frac{1}{t}\text{ in }\frac{\lambda(a+t)}{\mu(a+t)}(b+t)^n$$

Ora, posto che α e β siano i gradi di moltiplicità delle due radici, si ha

$$\mu(a+t)=t^\alpha\left\{\mu^{(\alpha)}(a)+t\mu^{(\alpha+1)}(a)+\ldots\right\} \quad , \quad \mu(b+t)=t^\beta\left\{\mu^{(\beta)}(b)+t\mu^{(\beta+1)}(b)+\ldots\right\};$$

e quindi si vede che le espressioni di $Q_{n,a}$ e $Q_{n,b}$ sono, in generale, funzioni dissimili delle radici a e b; ma la cosa muta di aspetto se sono uguali i loro gradi di moltiplicità; vale a dire se $\alpha=\beta$. Allora in fatti abbiamo:

$$\mu(b+t)=t^\alpha\left\{\mu^{(\alpha)}(b)+t\mu^{(\alpha+1)}(b)+\ldots\right\};$$

ed è manifesto che in tal caso le espressioni di $Q_{n,a}$ e $Q_{n,b}$ si mutano l'una nell'altra mutando a in b; o viceversa. È poi ben chiaro che ha luogo la stessa proprietà a riguardo delle espressioni di $P_{n,a}$ e $P_{n,b}$; e quindi risulta il teorema che segue:

Nello sviluppo discendente o ascendente della frazione $\frac{\lambda(x)}{\mu(x)}$ *le parti del coefficiente di* $x^{-(n+1)}$ *o di* x^n, *dovute a due distinte radici dell'equazione* $\mu(x)=0$, *sono funzioni simili delle stesse radici, quando sono uguali i loro gradi di moltiplicità.*

16. Si è già osservato che i valori di $Q_{n,a}$ e $P_{n,a}$ si possono ottenere dividendo $\lambda(a+t)$ per $\theta(a+t)$, e cercando il coefficiente di $t^{\alpha-1}$ nel prodotto del quoziente per la potenza $(a+t)^n$ o per l'altra $(a+t)^{-(n+1)}$. Ora è noto che i coefficienti de' primi α termini di quel quoziente equivalgono ai numeratori delle α frazioni parziali di $\frac{\lambda(x)}{\mu(x)}$, dovute al fattore $(x-a)^\alpha$ di $\mu(x)$, vale a dire alle quantità designate con $A_0, A_1, \ldots, A_{\alpha-1}$; e quindi

risulta il seguente teorema, che porge ad un tempo lo sviluppo in serie della data frazione, e la sua decomposizione in frazioni parziali.

Data la frazione $\frac{\lambda(x)}{\mu(x)}$, *sia* $(x-a)^\alpha$ *un fattore di* $\mu(x)$, *e* $\theta(x)$ *il fattore complementare. Dividendo* $\lambda(a+t)$ *per* $\theta(a+t)$ *i coefficienti de'primi* α *termini del quoziente saranno per ordine i numeratori delle* α *frazioni parziali della data frazione, aventi per denominatori le potenze decrescenti* $(x-a)^\alpha, (x-a)^{\alpha-1}, \ldots, x-a$.

Inoltre, se il quoziente si moltiplica per la potenza $(a+t)^n$ *o* $(a+t)^{-(n+1)}$, *il coefficiente di* $t^{\alpha-1}$ *esprimerà la parte attribuita dal fattore* $(x-a)^\alpha$ *al coefficiente di* $x^{-(n+1)}$ *nello sviluppo discendente della frazione proposta, o a quello di* x^n *nel suo sviluppo ascendente.*

Adunque, secondo questo teorema, il valore di $Q_{n,\alpha}$ sarà il coefficiente di $t^{\alpha-1}$ nello sviluppo del prodotto:

$$[A_0+A_1t+A_2t^2+\ldots+A_{\alpha-1}t^{\alpha-1}]\times$$
$$\times[a^{\alpha-1}+(n)_1a^{\alpha-2}t+(n)_2a^{\alpha-3}t^2+\ldots+(n)_{\alpha-1}t^{\alpha-1}]a^{n-\alpha+1}$$

ed il valore di $P_{n,\alpha}$ sarà pure il coefficiente di $t^{\alpha-1}$ nello sviluppo dell'altro prodotto:

$$[A_0+A_1t+A_2t^2+\ldots+A_{\alpha-1}t^{\alpha-1}]\times$$
$$\times[a^{\alpha-1}+(-n-1)_1a^{\alpha-2}t+(-n-1)_2a^{\alpha-3}t^2+\ldots+(-n-1)_{\alpha-1}t^{\alpha-1}]a^{-(n+\alpha)},$$

e si ha in conseguenza

$$(17)\quad Q_{n,\alpha}=\ [(n)_{\alpha-1}A_0+(n)_{\alpha-2}A_1a+(n)_{\alpha-3}A_2a^2+\ldots+(n)_0A_{\alpha-1}a^{\alpha-1}]a^{n-\alpha+1},$$

$$(18)\quad P_{n,\alpha}=-[(-n-1)_{\alpha-1}A_0+(-n-1)_{\alpha-2}A_1a+\ldots+(-n-1)_0A_{\alpha-1}a^{\alpha-1}]a^{-(n+\alpha)}.$$

Egli è facile a riconoscere che queste espressioni di $Q_{n,\alpha}$ e $P_{n,\alpha}$ coincidono con quelle che risultano rispettivamente dalle formole (9) e (10); ma esse acquistano maggiore importanza pel significato che ricevono dal teorema attuale.

III

Osservazioni sul calcolo delle costanti che entrano nelle formole precedenti.

17. Per le applicazioni delle formole fin quì stabilite crediamo di aggiungere alcune osservazioni relative al calcolo delle costanti A_0, $A_1, \ldots A_{\alpha-1}$. Si è già detto che i valori di queste quantità equivalgono a' coefficienti de' primi α termini del quoziente $\frac{\lambda(a+t)}{\theta(a+t)}$, talchè si ha.

$$\frac{\lambda+\lambda' t+\lambda'' t^2+\ldots+\lambda^{(\alpha-1)} t^{\alpha-1}\ldots}{\theta+\theta' t+\theta'' t^2+\ldots+\theta^{(\alpha-1)} t^{\alpha-1}\ldots}=A_0+A_1 t+A_2 t^2+\ldots+A_{\alpha-1} t^{\alpha-1}+\ldots$$

avendo per semplicità soppresso la lettera a sotto le caratteristiche di funzioni λ e θ. Ma quindi si ottengono le α equazioni lineari:

$$\begin{aligned}
\lambda &= A_0\theta \\
\lambda' &= A_0\theta' + A_1\theta \\
\lambda'' &= A_0\theta'' + A_1\theta' + A_2\theta \\
&\ldots \\
\lambda^{(\alpha-1)} &= A_0\theta^{(\alpha-1)} + A_1\theta^{(\alpha-2)} + A_2\theta^{(\alpha-3)} + \ldots + A_{\alpha-1}\theta \quad .
\end{aligned}$$

le quali danno facilmente l'uno dopo l'altro i valori delle α costanti.

Intanto il valore di una costante qualunque si può esprimere immediatamente con una formola convenientissima al calcolo numerico. In fatti, risolvendo le equazioni per determinanti, si ha dapprima:

$$A_r = \begin{vmatrix}
\theta & 0 & 0 & . & 0 & \lambda \\
\theta' & \theta & 0 & . & 0 & \lambda' \\
\theta'' & \theta' & \theta & . & 0 & \lambda'' \\
. & & & . & & \\
\theta^{(r-1)} & \theta^{(r-2)} & \theta^{(r-3)} & . & \theta & \lambda^{(r-1)} \\
\theta^{(r)} & \theta^{(r-1)} & \theta^{(r-2)} & . & \theta' & \lambda^{(r)}
\end{vmatrix};$$

ma, se si ponga:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} \theta' & \theta & 0 & . & 0 & 0 \\ \theta'' & \theta' & \theta & . & 0 & 0 \\ \theta''' & \theta'' & \theta' & . & 0 & 0 \\ . & & & . & . & . \\ \theta^{(i-1)} & \theta^{(i-2)} & \theta^{(i-3)} & . & \theta' & \theta \\ \theta^{(i)} & \theta^{(i-1)} & \theta^{(i-2)} & . & \theta'' & \theta' \end{vmatrix},$$

e si sviluppi il primo determinante secondo gli elementi dell' ultima verticale, si avrà evidentemente:

$$(19) \qquad A_r = \lambda^{(r)} \frac{\Delta_0}{\theta} - \lambda^{(r-1)} \frac{\Delta_1}{\theta^2} + \lambda^{(r-2)} \frac{\Delta_2}{\theta^3} - \ldots + (-1)^r \lambda \frac{\Delta_r}{\theta^{r+1}} .$$

Questa formola, nella quale si ha $\Delta_0 = 1$, porge i valori di tutte le costanti ponendovi successivamente $r=0, 1, 2$, etc; e si ottiene in tal guisa:

$$A_0 = \lambda \frac{\Delta_0}{\theta}$$

$$A_1 = \lambda' \frac{\Delta_0}{\theta} - \lambda \frac{\Delta_1}{\theta^2}$$

$$A_2 = \lambda'' \frac{\Delta_0}{\theta} - \lambda' \frac{\Delta_1}{\theta^2} + \lambda \frac{\Delta_2}{\theta^3}$$

etc: etc: etc:

Bisogna inoltre osservare che i determinanti i quali entrano in queste formole, attesa la loro forma speciale, possono essere rapidamente calcolati, ed in diverse maniere. Ma nella pratica giova far dipendere questi calcoli dalla formola seguente:

$$\Delta_i = \theta' \Delta_{i-1} - \theta\theta'' \Delta_{i-2} + \theta^2 \theta''' \Delta_{i-3} - \theta^3 \theta'''' \Delta_{i-4} + \ldots + (-1)^{i-1} \theta^{i-1} \theta^{(i)} \Delta_0 ;$$

formola cui subito si perviene sviluppando il determinante Δ_i secondo

gli elementi della prima verticale. Ponendovi $i=1, 2, 3$, etc: risultano le formole

$$\Delta_1 = \theta'$$

$$\Delta_2 = \theta'\Delta_1 - \theta\theta''$$

$$\Delta_3 = \theta'\Delta_2 - \theta\theta''\Delta_1 + \theta^2\theta'''$$

$$\Delta_4 = \theta'\Delta_3 - \theta\theta''\Delta_2 + \theta^2\theta'''\Delta_1 - \theta^3\theta^{IV}$$

$$\Delta_5 = \theta'\Delta_4 - \theta\theta''\Delta_3 + \theta^2\theta'''\Delta_2 - \theta^3\theta^{IV}\Delta_1 + \theta^4\theta^{V}$$

etc: etc: etc:

le quali definiscono con molta semplicità l'uno dopo l'altro i valori di tutte le quantità Δ_1, Δ_2, Δ_3, etc. ; e si avrebbe ancora esplicitamente:

$$\Delta_1 = \theta'$$

$$\Delta_2 = \theta'^2 - \theta\theta''$$

$$\Delta_3 = \theta'^3 - 2\theta\theta'\theta'' + \theta^2\theta'''$$

$$\Delta_4 = \theta'^4 - 3\theta\theta'^2\theta'' + \theta^2(2\theta'\theta''' + \theta''^2) - \theta^3\theta^{IV}$$

$$\Delta_5 = \theta'^5 - 4\theta\theta'^3\theta'' + 3\theta^2(\theta'^2\theta''' + \theta'\theta''^2) - 2\theta^3(\theta'\theta^{IV} + \theta''\theta''') + \theta^4\theta^{V}$$

etc: etc: etc: etc:

ma pel calcolo numerico sono da preferirsi le formole che precedono.

18. È stato osservato che lo sviluppo della frazione $\frac{\lambda(x)}{\mu(x)}$ può in ogni caso farsi dipendere da quello della frazione $\frac{1}{\mu(x)}$. Ora per le frazioni di questa forma le espressioni delle costanti A_r divengono semplicissime. Allora, infatti, essendo $\lambda(x)=1$, si ha $\lambda=1$, $\lambda'=0$, $\lambda''=0$, etc:; quindi la formola generale (19) si riduce ad:

$$A_r = (-1)^r \frac{\Delta_r}{\theta^{r+1}}$$

e ne risulta:

$$A = \frac{1}{\theta}, \quad A_1 = -\frac{\Delta_1}{\theta^2}, \quad A_2 = \frac{\Delta_2}{\theta^3}, \quad A_3 = -\frac{\Delta_3}{\theta^4}, \ldots, \quad A_{\alpha-1} = (-1)^{\alpha-1}\frac{\Delta_{\alpha-1}}{\theta^{\alpha}}$$

La semplicità di queste formole conferma la convenienza di far dipendere nelle applicazioni lo sviluppo di $\frac{\lambda(x)}{\mu(x)}$ da quello di $\frac{1}{\mu(x)}$; ed in-

tanto in rapporto all'ultima frazione le espressioni di Q_n e P_n saranno definite da:

(20) $$Q_{n,a}=$$

$$\left[(n)_{\alpha-1}\frac{\Delta_0}{\theta}-(n)_{\alpha-2}\frac{\Delta_1}{\theta^2}a+\ldots+(-1)^{\alpha-1}(n)_0\frac{\Delta_{\alpha-1}}{\theta^\alpha}a^{\alpha-1}\right]a^{n-\alpha+1},$$

(21) $$P_{n,a}=$$

$$-\left[(-n-1)_{\alpha-1}\frac{\Delta_0}{\theta}-(-n-1)_{\alpha-2}\frac{\Delta_1}{\theta^2}a+\ldots+(-1)^{\alpha-1}(-n-1)_0\frac{\Delta_{\alpha-1}}{\theta^\alpha}a^{\alpha-1}\right]a^{-(n-\alpha)}.$$

19. Ne'casi più comuni, come sono quelli di $\alpha=1, 2, 3$, etc, queste formole si traducono nelle seguenti:

$$\alpha=1\begin{cases} Q_{n,a}= (n)_0\frac{\Delta_0}{\theta}a^n=\frac{1}{\theta}a^n=\frac{1}{\mu'}a^n \\ P_{n,a}=-(-n-1)_0\frac{\Delta_0}{\theta}a^{-(n+1)}=-\frac{1}{\theta}a^{-(n+1)}=-\frac{1}{\mu'}a^{-(n+1)} \end{cases}$$

$$\alpha=2\begin{cases} Q_{n,a}= \left[(n)_1\frac{\Delta_0}{\theta}-(n)_0\frac{\Delta_1}{\theta^2}a\right]a^{n-1}=\left[\frac{n}{\theta}-\frac{\theta'}{\theta^2}a\right]a^{n-1} \\ P_{n,a}=-\left[(-n-1)_1\frac{\Delta_0}{\theta}-(-n-1)_0\frac{\Delta_1}{\theta^2}a\right]a^{-(n-1)}=\left[\frac{n+1}{\theta}+\frac{\theta'}{\theta^2}a\right]a^{-(n-1)} \end{cases}$$

$$\alpha=3\begin{cases} Q_{n,a}= \left[(n)_2\frac{\Delta_0}{\theta}-(n)_1\frac{\Delta_1}{\theta^2}a+(n)_0\frac{\Delta_2}{\theta^3}a^2\right]a^{n-2} \\ \quad = \left[\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{\theta}-n\frac{\theta'}{\theta^2}a+\frac{\theta'^2-\theta\theta''}{\theta^3}a^2\right]a^{n-2} \\ P_{n,a}=-\left[(-n-1)_2\frac{\Delta_0}{\theta}-(-n-1)_1\frac{\Delta_1}{\theta^2}a+(-n-1)_0\frac{\Delta_2}{\theta^3}a^2\right]a^{-(n-2)} \\ \quad =-\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\frac{1}{\theta}+(n+1)\frac{\theta'}{\theta^2}a+\frac{\theta'^2-\theta\theta''}{\theta^3}a^2\right]a^{-(n-2)} \end{cases}$$

E così di seguito.

20. Aggiungeremo ora alcune osservazioni riguardo al calcolo delle quantità figurate da θ, θ', θ'', etc:, le quali esprimono i valori che prendono per $x=a$ la funzione $\theta(x)$ e le sue successive derivate, divise per 1, 1.2, 1.2.3, etc:, ed equivalgono ai coefficienti dello sviluppo di

$\theta(a+t)$; $\theta(x)$ dinotando inoltre il quoziente della funzione $\mu(x)$ divisa pel suo fattore multiplo $(x-a)^\alpha$, di modo che:

$$\mu(x)=(x-a)^\alpha\theta(x) .$$

Questa formola, mutando la x in $a+t$ diviene:

$$\mu(a+t)=t^\alpha\theta(a+t) ,$$

e dimostra che gli sviluppi delle due funzioni $\mu(a+t)$ e $\theta(a+t)$ hanno i medesimi coefficienti, fatta astrazione nel primo da' primi α termini, che sono nulli (n° 14). Adunque, per avere questi coefficienti, è indifferente che si sviluppi l'una o l'altra funzione; ma avuto riguardo alla semplicità del calcolo, sarà da preferire il primo sviluppo, se il fattore $(x-a)^\alpha$ si trovi implicito nella funzione $\mu(x)$; e converrà preferire il secondo, se questa funzione si abbia nella forma $(x-a)^\alpha\,\theta(x)$.

21. In diverse applicazioni la funzione $\mu(x)$ è data come un prodotto di più fattori. In questi casi sarebbe scegliere una cattiva via se si cominciasse dallo effettuare il prodotto; ma invece bisogna, in generale, prima sviluppare i fattori secondo le potenze crescenti di t, mutando in ciascuno la x in $a+t$, e poscia moltiplicarli tra loro; non perdendo di vista che qualunque sviluppo vuol'essere limitato al termine in $t^{\alpha-1}$, supposto già separato il fattore t^α. Un esempio servirà meglio a dichiarare il procedimento per tutti i casi.

Supponiamo:

$$\mu(x)=(x-1)(x^3-1)(x^5-1)(x^6-1) .$$

In questo esempio può subito porsi in evidenza la natura delle radici dell'equazione $\mu(x)=0$, perchè la funzione si trasforma evidentemente in:

$$\mu(x)=(x-1)^4(x^2+x+1)^2(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^3+1) ;$$

e ne segue che l'equazione ha una radice quadrupla razionale uguale ad 1; ed inoltre due radici doppie, che sono quelle dell'equazione $x^2+x+1=0$; e sette radici semplici, quattro appartenenti all' equa- $x^4+x^3+x^2+x+1=0$, e tre all'altra $x^3+1=0$, una delle quali è ancora razionale ed uguale a -1.

Considerando dapprima la radice quadrupla 1, essendo $\alpha=4$, sarà:

$$\mu(1+t)=t^4\theta(1+t) ;$$

e trattasi di calcolare i valori delle quattro quantità θ, θ', θ'', θ''', e per-

ciò i soli primi quattro termini dello sviluppo di $\theta(1+t)$. Ora, cambiando immediatamente la x in $1+t$ nella forma originaria della data funzione, si ha:

$$\mu(1+t)=[(1+t)-1][(1+t)^3-1][(1+t)^5-1][(1+t)^6-1] ;$$

ma sviluppando i fattori, ciascuno diverrà divisibile per t; e però separando questo divisore, e limitando gli sviluppi a' termini in t^3, verrà:

$$\mu(1+t)=t^4[(3+3t+t^2)(5+10t+10t^2+5t^3)(6+15t+20t^2+15t^3)+\ldots.] .$$

e sarà in conseguenza:

$$\theta(1+t)=5(3+3t+t^2)(1+2t+2t^2+t^3)(6+15t+20t^2+15t^3)+\ldots.$$

In fine, sviluppando il prodotto, senza mai tener conto de' termini di grado superiore al terzo, si ottiene con calcolo semplicissimo:

$$\theta(1+t)=5[18+99t+273t^2+286t^3+\ldots.] ;$$

e quindi in rapporto alla radice quadrupla 1 risulta:

$$\theta=5.18 \quad , \quad \theta'=5.99 \quad , \quad \theta''=5.273 \quad , \quad \theta'''=5.486 .$$

Passando a considerare le radici doppie, vale a dire le radici dell'equazione $x^2+x+1=0$, se s'indica con a una di queste radici, sarà:

$$\mu(a+t)=t^2\theta(a+t) ;$$

e qui trattasi di calcolare i primi due termini dello sviluppo di $\theta(a+t)$. Mutando nella data funzione la x in $a+t$, abbiamo:

$$\mu(a+t)=[(a+t)-1][(a+t)^3-1][(a+t)^5-1][(a+t)^6-1]$$

Ora, prima di sviluppare i fattori osserveremo che, essendo $a^2+a+1=0$, e quindi $a^3+a^2+a=0$, se si prenda la differenza di queste due equazioni, verrà $a^3=1$; e sarà di seguito $a^4=a, a^5=a^2, a^6=1$, etc:; di modo che la ipotesi di a radice dell'equazione $x^2+x+1=0$ mena alla conseguenza che dagli esponenti delle potenze di a è lecito di sopprimere tutt'i multipli di 3; ed è così per esempio che si avrebbe $a^{10}=a^7=a^4=a$.

Ciò premesso, essendo $a^3=1$ ed $a^6=1$, è manifesto che, se si svilup-

pano i quattro fattori, il terzo ed il quarto diverranno divisibili per t. Adunque messo da parte questo divisore, e limitando gli sviluppi a'termini di primo grado in t, si avrà:

$$\mu(a+t)=t^2[((a-1)+t)(3a^2+3at)((a^5-1)+5a^4t)(6a^5+15a^4t)+\ldots.]\ ;$$

e quindi, riducendo gli esponenti di a col principio dichiarato, risulterà:

$$\theta(a+t)=9a^2[((a-1)+t)(a+t)((a^2-1)+5at)(2a+5t)]+\ldots.$$

A questo punto svilupperemo il prodotto; e però, limitando sempre il calcolo a'termini di 1° grado in t, e continuando a ridurre gli esponenti di a, verrà:

$$\theta(a+t)=-9[(2a^2-4a+2)+(17a^2+9a-26)t+\ldots]$$

e sarà in conseguenza:

$$\theta=-9(2a^2-4a+2)\qquad,\qquad \theta'=-9(17a^2+9a-26)\ .$$

Queste due espressioni possono ridursi al 1° grado mediante l'equazione $a^2+a+1=0$; e così aggiungendo rispettivamente ad esse le quantità nulle $(2a^2+2a+2)$ e $9(17a^2+17a+17)$, si avrà in fine:

$$\theta=9.6a\qquad,\qquad \theta'=9(8a+43)\ .$$

In quanto alle radici semplici per ciascuna si tratta sempre di calcolare la sola quantità θ. Ora, in generale, questa quantità si può ottenere con una regola semplicissima. In fatti per ogni radice semplice dell' equazione $\mu(x)=0$ si ha $\theta=\mu'$, e quindi è chiaro che, per avere il valore di θ basta porre la radice che si considera invece di x in tutti i fattori della funzione $\mu(x)$, ad eccezione di quello dal quale la radice trae origine, sostituendo poi a questo fattore il valore che prende la sua derivata per la stessa radice.

Così nell' esempio proposto, se si dinota con b una delle quattro radici dell'equazione $x^4+x^3+x^2+x+1=0$, siccome queste radici dipendono dal fattore x^5-1, si ha immediatamente:

$$\theta=5b^4(b-1)(b^3-1)(b^6-1)\ .$$

Ma questa espressione, stante l'equazione $b^4+b^3+b^2+b+1=0$, può es-

sere ridotta a grado inferiore al 4°; e la riduzione si farà molto più facilmente osservando che b è una radice dell'equazione binomia $x^5=1$; e che perciò dagli esponenti delle potenze di x è lecito di sopprimere tutt'i multipli di 5. Quindi si ottiene immediatamente:

$$\theta=-5(2b^3-b^2+b-2)\ .$$

Parimenti, chiamando c una delle tre radici semplici dell'equazione $x^3+1=0$, la quale trae origine dal fattore x^6-1, avremo:

$$\theta=6c^5(c-1)(c^3-1)(c^5-1)\ .$$

Questa espressione, essendo $c^3+1=0$, è riducibile a grado inferiore al 3°. Inoltre essendo c radice delle equazioni binomie $x^3+1=0$ ed $x^6-1=0$, segue dalla seconda che dagli esponenti delle potenze di c si possono sopprimere i multipli di 6; e, dalla prima, che è anche lecito di sopprimerne i multipli di 3, purchè si cambii il segno alla potenza ridotta, quando il multiplo soppresso è di ordine dispari. In questo modo il valore di θ si riduce a:

$$\theta=12(2c^2-c+1)\ .$$

IV

Metodo pel calcolo effettivo de' coefficienti dei termini generali.

22. Abbiamo fin quì diverse espressioni dell'elemento di Q_n o P_n dovuto a qualunque radice dell' equazione $\mu(x)=0$; ed in ogni caso la somma di tutti gli elementi darà l'espressione istessa di Q_n o di P_n. Però queste espressioni, dipendendo dalle singole radici, sarebbero poco utili nelle applicazioni, se non si avessero de' mezzi agevoli da tradurle in numeri; ma ora ci proponiamo di mostrare che i loro valori si possono facilmente ottenere per mezzo delle somme delle potenze simili delle radici di una o più equazioni.

Questa ricerca è fondata sulla seguente conosciuta proposizione (*).

« Ogni funzione fratta razionale di una radice di una equazione è equi-
« valente ad una determinata funzione intera della stessa radice, di

(*) V Serret, *Cours d'Algeb. Sup.* (2e éd.) pag. 38, e la nota in fine della presente memoria.

« grado inferiore, e generalmente inferiore di *uno*, a quello dell'equazione.

Dinotiamo con a una radice dell'equazione:

$$f(x)=k_0+k_1x+k_2x^2+\ldots+k_rx^r=0 ,$$

e siano $\varphi(a)$ e $\psi(a)$ funzioni intere e razionali. In virtù del principio ricordato la funzione fratta $\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}$ si potrà trasformare in una funzione intera di a di grado $r-1$, e quindi sarà lecito di supporre:

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}=A^0+A'a+A''a^2+\ldots+A^{(r-1)}a^{r-1}$$

Per determinare le costanti A^0, A', etc. si osserverà che questa eguaglianza, o l'altra:

$$\varphi(a)=(A^0+A'a-A''a^2+\ldots+A^{(r-1)}a^{r-1})\psi(a)$$

deve sussistere se in luogo di a si ponga qualunque altra radice dell'equazione $f(x)=0$; e perciò l'ultima equazione in a sarà verificata da r valori. Ora questa equazione è di grado superiore ad $r-1$; ma bisogna riflettere che, mediante l'equazione:

$$f(a)=k_0+k_1a+k_2a^2+\ldots+k_ra^r=0$$

le potenze a^r, a^{r+1}, etc: si possono esprimere in funzione delle potenze di grado minore di r; di modo che la detta equazione si potrà ridurre al grado $r-1$, e conseguentemente alla forma:

$$K_0+K_1a+K_2a^2+\ldots+K_{r-1}a^{r-1}=0 ,$$

nella quale i coefficienti sono funzioni date lineari delle r costanti A^0, $A^1, \ldots, A^{(r-1)}$. Intanto questa equazione di grado $r-1$, dovendo essere soddisfatta da r valori di a, è necessariamente identica; e da ciò risultano le r equazioni lineari

$$K=0 \quad , \quad K_1=0 \quad , \quad K_2=0 , \ldots , K_{r-1}=0 ,$$

le quali determinano completamente le r costanti.

È da osservare che il ragionamento più non regge se il valore di a,

che si suppone radice dell'equazione $f(x)=0$, annulla il denominatore $\psi(a)$ della data frazione. Dunque, perchè la trasformazione sia possibile, si richiede che questo denominatore non sia annullato da alcuna di quelle radici; e ciò vuol dire, in altri termini, che le due funzioni $f(x)$ e $\psi(x)$ debbono essere prime fra loro.

23. Tornando al soggetto delle nostre ricerche per considerare la quistione in tutta la sua generalità ammetteremo che la funzione $\mu(x)$ si possa risolvere in più fattori razionali primi tra loro, e supporremo:

$$\mu(x)=X_a^\alpha X_b^\beta X_c^\gamma \ldots .$$

dove α, β, γ, etc: figurano numeri interi e positivi, ed X_a, X_b, X_c, etc. funzioni intere qualunque, delle quali dinoteremo rispettivamente i gradi con a', b', c', etc. Inoltre, ritenute disuguali le radici delle equazioni $X_a=0$, $X_b=0$, $X_c=0$, etc: chiameremo a, a_1, a_2; etc: quelle della prima; b, b_1, b_2, etc: quelle della seconda; e così di seguito.

Ciò premesso osserveremo che le quantità designate con a, a_1, a_2, ..., mentre per ipotesi sono radici semplici dell'equazione $X_a=0$, sono poi anche radici dell'equazione $\mu(x)=0$, ma tutte multiple di grado α; e perciò le espressioni degli elementi corrispondenti di $F(n)$ (V. il n° 2) saranno funzioni simili delle stesse radici. Ne risulta che la somma di questi elementi è una funzione simmetrica delle radici dell'equazione $X_a=0$, e sarà quindi esprimibile razionalmente per mezzo de' suoi coefficienti. Per brevità distingueremo siffatta somma col nome di *componente* della funzione $F(n)$ relativa al fattore X_a^α, e la rappresenteremo con W_a; ed uniformemente dinoteremo con W_b la componente relativa al fattore X_b^β; con W_c quella relativa ad X_c^γ, etc: etc:

È chiaro intanto che la funzione $F(n)$ equivale alla somma di tutte le sue componenti, di modo che si ha:

$$F(n)=W_a+W_b+W_c+\ldots=\Sigma W_\alpha$$

Così la ricerca di quella funzione si riduce interamente alla ricerca delle sue componenti; ed è però che passeremo ad esporre un metodo mediante il quale le loro espressioni possono agevolmente ottenersi tradotte in somme di potenze simili delle radici delle equazioni $X_a=0$, $X_b=0$, etc:

CALCOLO DELLE COMPONENTI DI Q_n.

24. Considerando la componente W_a, che per ipotesi è somma degli elementi di Q_n dovuti alle radici dell'equazione $X_a=0$, in virtù della formola (17) avremo:

$$W_a=\Sigma\left((n)_{\alpha-1}A_0+(n)_{\alpha-2}A_1a+\ldots+(n)_0A_{\alpha-1}a^{\alpha-1}\right)a^{n-\alpha+1},$$

estendendo la somma a tutte le suddette radici; ma se si ponga:

$$V=(n)_{\alpha-1}A_0+(n)_{\alpha-2}A_1a+\ldots+(n)_0A_{\alpha-1}a^{\alpha-1},$$

verrà più concisamente:

$$W_a=\Sigma Va^{n-\alpha+1}.$$

Ora l'espressione di questa somma si può ottenere di una maniera molto semplice nel modo seguente. Si osservi innanzi tutto che la quantità rappresentata da V è una data funzione razionale di n e di a, però intera e di grado $\alpha-1$ rispetto ad n, ma fratta rispetto ad a, tale essendo la natura delle quantità figurate da A_0, A_k, etc: (n° 17). Quindi, siccome a è radice dell'equazione $X_a=0$, che si è supposta di grado a', la V si potrà trasformare in una determinata funzione intera di a, di grado $a'-1$ (n° 22), e porre:

$$(22)\qquad V=A_n^0+A_n'a+A_n''a^2+\ldots+A_n^{(a'-1)}a^{a'-1},$$

dove i coefficienti sono indipendenti da a, ma funzioni di n, intere e di grado $\alpha-1$. Una volta ottenuta questa trasformata la quistione è risoluta; per essa in fatti l'espressione di W_a diviene:

$$W_a=\Sigma\left(A_n^0a^{n-\alpha+1}+A_n'a^{n-\alpha+2}+A_n''a^{n-\alpha+3}+\ldots+A_n^{(a'-1)}a^{n-\alpha+a'}\right);$$

ed essendosi già osservato (n° 23) che le espressioni degli elementi di Q_n relativi alle radici a, a_1, a_2, ..., sono funzioni simili delle stesse radici, si vede che per aver la somma basta mutare le diverse potenze di a in somme di potenze simili delle radici dell'equazione $X_a=0$, di gradi rispet-

tivamente uguali a quelli delle potenze; e perciò scrivendo $s_r^{(a)}$ per indicare la somma delle potenze r^{me} di queste radici, risulterà:

$$(23)\qquad W_a = A_n^0 s_{n-\alpha+1}^{(a)} + A_n' s_{n-\alpha+2}^{(a)} + \ldots + A_n^{(a'-1)} s_{n-\alpha+a'}^{(a)} .$$

Ecco adunque un'espressione razionale della componente W_a, alla quale ne'casi particolari si applica facilmente il calcolo numerico; ed il processo per ottenerla si può compendiare in questa regola: *Si trasformi la* V *in funzione intera di* a; *si moltiplichi la trasformata per* $a^{n-\alpha+1}$, *e nel prodotto si sostituisca ad ogni potenza* a^r *la somma corrispondente* $S_r^{(a)}$.

Mediante questa regola, convenientemente estesa alle altre componenti, si avrebbe, *mutatis mutandis*:

$$W_b = B_n^0 s_{n-\beta+1}^{(b)} + B_n' s_{n-\beta+2}^{(b)} + \ldots + B_n^{(b'-1)} s_{n-\beta+b'}^{(b)} ;$$

$$W_c = C_n^0 s_{n-\gamma+1}^{(c)} + C_n' s_{n-\gamma+2}^{(c)} + \ldots + C_n^{(c'-1)} s_{n-\gamma+c'}^{(c)} ;$$

etc: etc: etc: etc:

e però, essendo così trovate le espressioni di tutte le componenti della funzione Q_n, questa funzione resta con ciò completamente determinata.

25. L'espressione di W_a data nella formola (23) consiste di un numero di termini uguale ad a', e per conseguenza uguale al grado della funzione X_a. In questi termini gl'indici delle s formano una serie di numeri naturali che comincia da $n-\alpha+1$; ma questa circostanza non è assoluta, e la detta serie può farsi cominciare da qualunque altro numero, perchè nella espressione $Va^{n-\alpha+1}$ il fattore V, che va trasformato in funzione intera di a, si può modificare moltiplicandolo per una potenza qualunque di a, e dividendo nello stesso tempo per questa potenza l'altro fattore. Così, dinotato con r un numero qualsivoglia intero, positivo, o negativo, sarà lecito di scrivere:

$$W_a = \Sigma \frac{V}{a^r} a^{n-\alpha+r+1} ;$$

quindi, invece di trasformare la funzione V, si trasformerà la funzione $\frac{V}{a^r}$, e la serie degl'indici comincerà dal numero $n-\alpha+r+1$. Per esem-

pio, volendo che questa serie cominci da n, si prenderà $r=\alpha-1$; ed allora operando la trasformazione:

$$\frac{V}{a^{\alpha-1}}=A_n^0+A'_n a+A''_n a^2+\ldots+A_n^{(\alpha'-1)} a^{\alpha'-1}$$

l'espressione di W_a prenderà la forma:

$$W_a=A_n^0 s_n^{(a)}+A'_n s_{n+1}^{(a)}+A''_n s_{n+2}^{(a)}+\ldots+A_n^{(\alpha'-1)} s_{n+\alpha'-1}^{(a)}\,. \tag{24}$$

Attualmente i valori de' coefficienti A_n^0, A'_n, etc: sono diversi da quelli di prima; ma sono tuttavia funzioni intere di n, di grado $\alpha-1$.

26. Il principio, sul quale è fondata l'ultima trasformazione, è utile sopra tutto allorquando la funzione fratta di a, rappresentata da V, si trovasse moltiplicata per una potenza di a, di esponente positivo, o negativo, ma indeterminato, circostanza la quale potrebbe rendere imbarazzante la sua trasformazione in funzione intera. In fatti, per togliere la difficoltà, nella espressione del prodotto $Va^{n-\alpha-1}$ basta di separare quella potenza dal fattore V, ed aggregarla all'altro fattore $a^{n-\alpha-1}$; ed allora la funzione fratta di a da trasformarsi in funzione intera sarà per lo appunto ciò che diviene la V dopo la soppressione della detta potenza.

27. Abbiamo già veduto che nelle formole precedenti le espressioni de' coefficienti A_n^0, A'_n, etc: sono funzioni intere di n, di grado $\alpha-1$. Ora è questo un fatto interessante, dal quale vedremo derivare un'altra osservabile soluzione della quistione dello sviluppo in serie delle funzioni fratte razionali; ma per ora ci limitiamo ad osservare che le dette espressioni debbono essere indipendenti da n nel caso di $\alpha=1$, vale a dire quando il fattore X_a^α della funzione $\mu(x)$, cui si rapporta la componente W_a, è semplicemente della forma X_a. In questo caso diviene inutile l'indice n apposto ai simboli degl'indicati coefficienti; ed intanto l'espressione di W_a data dalla (23) o dalla (24) si riduce a:

$$W_a=A^0 s_n^{(a)}+A' s_{n+1}^{(a)}+A'' s_{n+2}^{(a)}+\ldots+A^{(\alpha'-1)} s_{n+\alpha'-1}^{(a)} \tag{25}$$

Del resto nella ipotesi attuale la determinazione de' coefficienti A^0, A', etc.,

*

ossia la trasformazione (22), diviene molto più agevole, perchè quando $\alpha=1$ si ha semplicemente (n° 13)

$$W_a=\Sigma\frac{\lambda(a)}{\mu'(a)}a^n ;$$

e tutto si riduce ad operare la trasformazione della funzione $V=\frac{\lambda(a)}{\mu'(a)}$.

28. Un altro caso meritevole di attenzione si ha quando la funzione $\mu(x)$ è della forma:

$$\mu(x)=X_a^{\alpha} ,$$

il che esige che le radici dell'equazione $\mu(x)=0$ debbono essere tutte multiple di uno stesso grado di moltiplicità. In questo caso la funzione Q_n si riduce all' unica sua componente W_a; e perciò risulta:

$$Q_n=W_a .$$

Ora, siccome nella ipotesi presente le somme delle potenze simili delle radici si rapportano all'unica equazione $X_a=0$, nel simbolo adoperato a tale uopo, $s_r^{(a)}$, diviene inutile l'indice superiore; e si avrà in conseguenza:

$$(26) \qquad Q_n=A_n^0 s_{n-\alpha+1}+A_n' s_{n-\alpha+2}+\ldots+A_n^{(a'-1)} s_{n-\alpha+a'} ,$$

ovvero:

$$(27) \qquad Q_n=A_n^0 s_n+A_n' s_{n+1}+\ldots+A_n^{(a'-1)} s_{n+a'-1} ;$$

secondo che la determinazione de' coefficienti si voglia far dipendere dalla trasformazione della funzione V, o dell'altra $\frac{V}{a^{\alpha-1}}$.

E quando $\alpha=1$; o, in altri termini, quando le radici dell'equazione $\mu(x)=0$ sono tutte semplici, di guisa che:

$$\mu(x)=X_a ,$$

si avrà semplicemente:

$$(28) \qquad Q_n=A^0 s_n+A' s_{n+1}+\ldots+A^{(a'-1)} s_{n+a'-1} .$$

29. Bisogna intanto osservare che le trasformazioni cui dà luogo la pre-

sente ricerca saranno nelle applicazioni assai più semplici se lo sviluppo di $\frac{\lambda(x)}{\mu(x)}$ si faccia dipendere da quello di $\frac{1}{\mu(x)}$ (n°4). In questo caso i calcoli or ora prescritti dovranno istituirsi sulla formola (20) da cui:

$$W_{\alpha}=\Sigma\left[(n)_{\alpha-1}\frac{\Delta_0}{\theta}-(n)_{\alpha-2}\frac{\Delta_1}{\theta^2}a+\ldots+(-1)^{\alpha-1}(n)_0\frac{\Delta_{\alpha-1}}{\theta^{\alpha}}a^{\alpha-1}\right]a^{n-\alpha-1}$$

e quindi per la funzione fratta di a rappresentata da V ritenere la funzione molto più semplice e più esplicita:

$$(n)_{\alpha-1}\frac{\Delta_0}{\theta}-(n)_{\alpha-2}\frac{\Delta_1}{\theta^2}a+\ldots+(-1)^{\alpha-1}(n)_0\frac{\Delta_{\alpha-1}}{\theta^{\alpha}}a^{\alpha-1}.$$

Siccome in questa funzione le espressioni di Δ_1, Δ_2, etc: sono intere rispetto ad a, è chiaro che per ottenere la equivalente funzione intera, basta trovare la funzione intera equivalente alla frazione $\frac{1}{\theta}$, dalla quale possono immediatamente dedursi quelle equivalenti alle diverse potenze della frazione medesima (V. la nota in fine).

Calcolo delle componenti di P_n.

30. Prendendo ancora a considerare la componente W_{α}, per la formola (18) si avrà:

$$W_{\alpha}=\Sigma-\{(-n-1)_{\alpha-1}A_0+(-n-1)_{\alpha-2}A_1a+\ldots+(-n-1)_0A_{\alpha-1}a^{\alpha-1}\}a^{-(n-\alpha)},$$

la somma dovendo estendersi a tutte le radici dell'equazione $X_{\alpha}=0$; e se si ponga:

$$U=-\{(-n-1)_{\alpha-1}A_0+(-n-1)_{\alpha-2}A_1a+\ldots+(-n-1)_0A_{\alpha-1}a^{\alpha-1}\},$$

sarà più brevemente:

$$W_{\alpha}=\Sigma Ua^{-(n-\alpha)}.$$

Qui la U, al pari della V del caso precedente, è una data funzione di n ed a; intera e di grado $\alpha-1$ rispetto ad n; fratta rispetto ad a; e però,

stante l'equazione $X_a = 0$, potrà essere trasformata in una determinata funzione intera di a, di grado $a'-1$; sicchè, supponendo:

$$U = A_n^0 a^{a'-1} + A_n' a^{a'-2} + \ldots + A_n^{(a'-1)},$$

risulterà;

$$(29) \qquad W_a = A_n^0 s_{-(n+\alpha-a'+1)}^{(a)} + A_n' s_{-(n+\alpha-a'+2)}^{(a)} + \ldots + A_n^{(a'-1)} s_{-(n+\alpha)}^{(a)},$$

Questa espressione di W_a, nella quale i coefficienti A_n^0, A_n', etc: sono sempre funzioni intere di n di grado $\alpha-1$ si ottiene evidentemente con una regola uniforme a quella enunciata nell'altro caso; vale a dire: *Si trasformerà la* U *in funzione intera di* a; *si moltiplicherà la trasformata per* $a^{(n+\alpha)}$; *e nel prodotto ad ogni potenza* a^{-r} *si sostituirà la somma corrispondente* $s_{-r}^{(a)}$. Per mezzo di questa regola si possono adunque ottenere le espressioni di tutte le componenti della funzione P_n; e con ciò questa funzione resta completamente determinata.

31. È ora ben chiaro che le diverse osservazioni fatte a riguardo delle componenti di Q_n si estendono convenientemente a quelle di P_n. Così può notarsi che la formola (29) consiste di un numero di termini eguale ad a', grado della funzione X_a: formola in cui gl'indici delle s (fatta astrazione dal segno) costituiscono una serie di numeri naturali, che comincia da $n+\alpha-a'+1$, ma che può farsi cominciare da qualunque numero negativo. Volendo che cominci da $-n$ si scriverà:

$$W_a = \sum \frac{U}{a^{\alpha-a'+1}} a^{-(n+a'-1)};$$

e, trasformando il fattore $\frac{U}{a^{\alpha-a'+1}}$, verrà:

$$(30) \qquad W_a = A_n^0 s_{-n}^{(a)} + A_n' s_{-(n+1)}^{(a)} + \ldots + A_n^{(a'-1)} s_{-(n+a'-1)}^{(a)}.$$

I coefficienti A_n^0, A_n', etc: diversi da'primi, sono, come negli altri casi, funzioni intere di n, di grado $\alpha - 1$.

32. Cessano questi coefficienti di dipendere da n nel solo caso di $\alpha = 1$;

allora la determinazione della componente diviene molto più semplice, perchè si ha (n° 13)

$$W_a = \Sigma - \frac{\lambda(a)}{\mu'(a)} a^{-(n+1)};$$

e la quistione si riduce a trasformare la funzione fratta $U = -\frac{\lambda(a)}{\mu'(a)}$. In questo modo gl'indici delle s cominceranno da $-(n-a'+2)$, e si avrà:

$$W_a = A_0 s^{(a)}_{-(n-a'+2)} + A'_n s^{(a)}_{-(n-a'+3)} + \ldots + A^{(a'-1)} s^{(a)}_{-(n+1)}.$$

Ma volendo che gl'indici comincino da $-n$ si scriverebbe:

$$W_a = \Sigma - \frac{\lambda(a)}{\mu'(a)} a^{a'-2} \times a^{-(n+a'-1)};$$

e quindi, trasformando la funzione $-\frac{\lambda(a)}{\mu'(a)} a^{a'-2}$, si avrà:

$$(31) \qquad W_a = A^0 s^{(a)}_{-n} + A' s^{(a)}_{-(n+1)} + \ldots + A^{(a'-1)} s^{(a)}_{-(n+a'-1)}.$$

33. Anche nel caso attuale, se le radici dell'equazione $\mu(x)=0$ sono tutte multiple di uno stesso grado, e quindi la funzione $\mu(x)$ della forma:

$$\mu(x) = X_a^{\alpha}$$

si ha $P_n = W_a$; vale a dire sarà:

$$P_n = A_n^0 s_{-(n+\alpha-a'+1)} + A'_n s_{-(n+\alpha-a'+2)} + \ldots + A_n^{(a'-1)} s_{-(n+\alpha)},$$

se i coefficienti si fanno dipendere dalla trasformazione della funzione U; e sarà poi:

$$(32) \qquad P_n = A_n^0 s_{-n} + A'_n s_{-(n+1)} + \ldots + A_n^{(a'-1)} s_{-(n+a'-1)},$$

se si vogliano far dipendere da quella dell'altra funzione $\frac{U}{a^{\alpha-a'+1}}$.

34. E finalmente, se nella stessa ipotesi si abbia di più $\alpha=1$; o, in

altri termini, se le radici dell'equazione $\mu(x)=0$ siano tra loro tutte disuguali, ed in conseguenza:

$$\mu(x)=X_a\,,$$

si avrà semplicemente:

$$P_n=A^0 s_{-(n-a'+2)}+A' s_{-(n-a'+3)}+\ldots+A^{(a'-1)} s_{-(n+1)}\,;$$

ovvero:

$$(33) \qquad P_n=A^0 s_{-n}+A' s_{-(n+1)}+\ldots+A^{(a'-1)} s_{-(n+a'-1)}\,,$$

secondo chè i coefficienti si vogliano far dipendere dalla trasformazione della funzione $U=-\frac{\lambda(a)}{\mu'(a)}$, o dell'altra $U\,a^{a'-2}=-\frac{\lambda(a)}{\mu'(a)}\,a^{a'-2}$.

35. Se lo sviluppo di $\frac{\lambda(x)}{\mu(x)}$ si voglia far dipendere da quello di $\frac{1}{\mu(x)}$, il che torna sempre vantaggioso, allora bisogna far capo dalla formola:

$$W_a=$$

$$\Sigma-\left[(-n-1)_{\alpha-1}\frac{\Delta_0}{\theta}-(-n-1)_{\alpha-2}\frac{\Delta_1}{\theta^2}a+\ldots+(-1)^{\alpha-1}(-n-1)_0\frac{\Delta_{\alpha-1}}{\theta^\alpha}a^{\alpha-1}\right]a^{-(n-\alpha)},$$

e ritenere:

$$U=-\left[(-n-1)_{\alpha-1}\frac{\Delta_0}{\theta}-(-n-1)_{\alpha-2}\frac{\Delta_1}{\theta^2}a+\ldots+(-1)^{\alpha-1}(-n-1)_0\frac{\Delta_{\alpha-1}}{\theta^\alpha}a^{\alpha-1}\right];$$

e qui le trasformazioni delle funzioni fratte in funzioni intere dipenderanno, come nel primo caso da quella della frazione $\frac{1}{\theta}$.

ESEMPII DI SVILUPPI

Esempio I.

36. Per un primo esempio ci proporremo lo sviluppo della frazione:

$$\frac{1}{\mu(x)}=\frac{1}{\mu_0+2\mu_1 x+\mu_2 x^2}$$

dove supporremo disuguali le radici dell'equazione $\mu(x)=0$. E cercando dapprima l'espressione di Q_n, dinotata con a una delle radici, si avrà (n° 28)

$$Q_n=\Sigma\frac{1}{\mu'(a)}a^n=\Sigma\frac{1}{2(\mu_1+\mu_2 a)}a^n,$$

la somma dovendo estendersi a tutte le radici. Per trovare questa somma

bisogna trasformare il fattore fratto in funzione intera di a, e ciò mediante l'equazione:

$$\mu_0+2\mu_1 a+\mu_2 a^2=0 ;$$

ma ora la trasformata può subito aversi indipendentemente da metodi generali; perchè, se si ponga per compendio:

$$M=\mu_1^2-\mu_0\mu_2 ,$$

la detta equazione si potrà mettere prima nella forma $(\mu_1+\mu_2 a)^2=M$, e poi nell'altra:

$$\frac{1}{\mu_1+\mu_2 a}=\frac{1}{M}(\mu_1+\mu_2 a) ;$$

ed il secondo membro è per lo appunto la trasformata intera del primo. Adunque, chiamando s_r la somma delle potenze r^{me} delle radici dell'equazione $\mu(x)=0$, si avrà immediatamente:

$$Q_n=\frac{1}{2M}(\mu_1 s_n+\mu_2 s_{n+1}) .$$

In quanto alla espressione di P_n si avrebbe:

$$P_n=\Sigma-\frac{1}{\mu'(a)}a^{-(n+1)}=\Sigma-\frac{1}{2(\mu_1+\mu_2 a)}a^{-(n+1)} ;$$

e quindi per le stesse formole di poc'anzi risulta:

$$P_n=-\frac{1}{2M}(\mu_2 s_{-n}+\mu_1 s_{-(n+1)}) .$$

37. Nel caso particolare della frazione

$$\frac{1}{1-2x\cos\omega+x^2}$$

siccome $\mu_0=\mu_2=1$, $\mu_1=-\cos\omega$, e quindi $M=-sen^2\omega$ ed $s_{-r}=s_r$, si ha:

$$Q_n=\frac{1}{2\,\mathrm{sen}^2\omega}(\cos\omega\, s_n-s_{n+1}) \quad , \quad P_n=\frac{1}{2\,\mathrm{sen}^2\omega}(s_n-\cos\omega\, s_{n+1}) .$$

Ma le radici di $1-2x\cos\omega+x^2=0$ mostrano che $s_r=2\cos r\omega$; dunque le ultime espressioni divengono:

$$Q_n=\frac{1}{\text{sen}^2\omega}\Big[\cos\omega\cos n\omega-\cos(n+1)\omega\Big],\ P_n=\frac{1}{\text{sen}^2\omega}\Big[\cos n\omega-\cos\omega\cos(n+1)\omega\Big];$$

e poichè i fattori binomii equivalgono il primo a $\text{sen}\,\omega\,\text{sen}\,n\omega$, ed il secondo a $\text{sen}\,\omega\,\text{sen}(n+1)\omega$, così verrà semplicemente:

$$Q_n=\frac{\text{sen}\,n\omega}{\text{sen}\,\omega}\quad,\quad P_n=\frac{\text{sen}(n+1)\omega}{\text{sen}\,\omega}.$$

Dopo ciò, se si trattasse dello sviluppo della frazione:

$$\frac{\lambda_0+\lambda_1 x}{1-2x\cos\omega+x^2},$$

si avrebbe immediatamente (n° 4):

$$Q_n=\frac{1}{\text{sen}\,\omega}\Big[\lambda_0\text{sen}\,n\omega+\lambda_1\text{sen}(n+1)\omega\Big],\ P_n=\frac{1}{\text{sen}\,\omega}\Big[\lambda_0\text{sen}(n+1)\omega+\lambda_1\text{sen}\,n\omega\Big].$$

Esempio II.

38. Siano $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_r$ quantità disuguali, e cerchiamo lo sviluppo della frazione:

$$\frac{1}{\mu(x)}=\frac{1}{(1-2\rho_0x+x^2)(1-2\rho_1x+x^2)\ldots(1-2\rho_rx+^2)}=\frac{1}{X_0X_1\ldots X_r}.$$

Dinotata con W_i la componente di Q_n relativa al fattore X_i, si ha (n° 23):

$$Q_n=\sum_0^r{}_i W_i$$

ed intanto, se s'indica con a una delle due radici dell'equazione $X_i=0$, sarà (n° 27):

$$W_i=\Sigma\frac{1}{\mu'(a)}a^n,$$

estendendo la somma alle due radici. Da un'altra parte abbiamo:

$$\mu'(a)=2(a-\rho_i)X_0X_1\ldots X_{i-1}X_{i+1}\ldots X_r,$$

bene inteso che sia posta a per x in tutti i fattori X_0, X_1, etc: ma tolta

da ciascuno la quantità nulla $1-2\rho_i a+a^2$, e messo per compendio:

$$R_i=(\rho_i-\rho_0)(\rho_i-\rho_1)\dots(\rho_i-\rho_{i-1})(\rho_i-\rho_{i+1})\dots(\rho_i-\rho_r)\ ,$$

verrà più semplicemente:

$$\mu'(a)=2^{r+1}R_i a^r(a-\rho_i)\ ;$$

e si avrà in conseguenza:

$$W_i=\frac{1}{2^{r-1}R_i}\Sigma\frac{1}{a^r(a-\rho_i)}a^n=\frac{1}{2^{r-1}R_i}\Sigma\frac{1}{a-\rho_i}a^{n-r}\ .$$

Resta ora a trasformare la frazione $\frac{1}{a-\rho_i}$ in funzione intera di a; ma poichè la trasformazione dipende dall'equazione $1-2\rho_i a+a^2=0$, la quale, posto:

$$M_i=\rho_i^2-1\ ,$$

può ridursi alla forma $(a-\rho_i)^2=M_i$, così si ha immediatamente:

$$\frac{1}{a-\rho_i}=\frac{1}{M_i}(a-\rho_i)$$

e quindi:

$$W_i=\frac{1}{2^{r-1}R_iM_i}\Sigma(a-\rho_i)a^{n-r}.$$

Effettuando la somma si ottiene:

$$W_i=\frac{1}{2^{r-1}R_iM_i}\left(s'^{(i)}_{n-r-1}-\rho_i s'^{(i)}_{n-r}\right)\ ;$$

ed in fine:

$$Q_n=\frac{1}{2^{r+1}}\sum_0^r{}_i\frac{1}{R_iM_i}\left(s^{(i)}_{n-r+1}-\rho_i s^{(i)}_{n-r}\right)\ .$$

In quanto allo sviluppo ascendente si avrebbe:

$$P_n=\sum_0^r{}_i W_i\ ,$$

dove, tenendo presenti le formole precedenti:

$$W_i=\Sigma-\frac{1}{\mu'(a)}a^{-(n+1)}=-\frac{1}{2^{r+1}R_iM_i}\Sigma(a-\rho_i)a^{-(n+r+1)}\ ;$$

*

ed effettuando la somma:

$$W_i = \frac{1}{2^{r+1} R_i M_i} \left(s_i \rho^{(i)}_{n+r+1} - s^{(i)}_{n-r} \right) ;$$

sicchè risulta:

$$P_n = \frac{1}{2^{r-1}} \sum_0^r {}_i \frac{1}{R_i M_i} \left(\rho_i s^{(i)}_{n+r+1} - s^{(i)}_{n-r} \right) .$$

39. Supponiamo per un caso particolare che si tratti della frazione:

$$\frac{1}{(1-2x\cos\omega_0+x^2)(1-2x\cos\omega_1+x^2)\ldots(1-2x\cos\omega_r+x^2)} .$$

Essendo in questo caso $\rho_i = \cos\omega_i$, si ottiene, come nel primo esempio, $M_i = -\operatorname{sen}^2\omega_i$, $s^{(i)}_m = 2\cos m\omega_i$; e quindi le espressioni di Q_n e P_n divengono:

$$Q_n = \frac{1}{2^r} \sum_0^r {}_i \frac{1}{R_i \operatorname{sen}^2\omega_i} \left[\cos\omega_i \cos(n-r)\omega_i - \cos(n-r+1)\omega_i \right] ;$$

$$P_n = \frac{1}{2^r} \sum_0^r {}_i \frac{1}{R_i \operatorname{sen}^2\omega_i} \left[\cos(n+r)\omega_i - \cos\omega_i \cos(n+r+1)\omega_i \right] ;$$

ma le quantità in parentesi equivalgono rispettivamente a $\operatorname{sen}\omega_i \operatorname{sen}(n-r)\omega_i$, e $\operatorname{sen}\omega_i \operatorname{sen}(n+r+1)\omega_i$; dunque per gli sviluppi della frazione proposta si hanno le formole semplicissime:

$$Q_n = \frac{1}{2^r} \sum_0^r {}_i \frac{1}{R_i} \frac{\operatorname{sen}(n-r)\omega_i}{\operatorname{sen}\omega_i} \quad , \quad P_n = \frac{1}{2^r} \sum_0^r {}_i \frac{1}{R_i} \frac{\operatorname{sen}(n+r+1)}{\operatorname{sen}\omega_i} .$$

Esempio III.

40. Per un terzo esempio cercheremo lo sviluppo della frazione:

$$\frac{1}{\mu(x)} = \frac{1}{\mu_0 + 3\mu_1 x + 3\mu_2 x^2 + \mu_3 x^3} ,$$

supponendo ancora disuguali le radici dell'equazione $\mu(x)=0$. Quindi, detta a una delle radici, si ha:

$$Q_n = \sum \frac{1}{\mu'(a)} a^n = \sum \frac{1}{3(\mu_1 + 2\mu_2 a + \mu_3 a^2)} a^n ,$$

la somma dovendo estendersi a tutte le radici ; e per trovarla bisogna

che il fattore frazionario sia trasformato in funzione intera di a, valendosi dell'equazione:

$$\mu_0+3\mu_1 a+3\mu_2 a^2+\mu_3 a^3=0 .$$

Ora, operando la trasformazione col metodo già esposto (nº 22), fatto per compendio:

$$A^0=\mu_0\mu_2\mu_3+3\mu_1\mu_2^2-4\mu_1^2\mu_3 ,$$

$$A'=\mu_0\mu_3^2-7\mu_1\mu_2\mu_3+6\mu_2^3$$

$$A''=\mu_2^2-\mu_1\mu_3$$

$$M=6\mu_0\mu_1\mu_2\mu_3+3\mu_1^2\mu_2^2-4\mu_0\mu_2^3-4\mu_1^3\mu_3-\mu_0^2\mu_3^2 ,$$

si ottiene:

$$\frac{1}{\mu_1+2\mu_2 a+\mu_3 a^2}=\frac{1}{M}\left(A^0+A'a+2\mu_3 A''a^2\right) ;$$

ed in conseguenza risulta:

$$Q_n=\frac{1}{3M}\left(A^0 s_n+A's_{n+1}+2\mu_3 A''s_{n+2}\right) .$$

Per lo sviluppo ascendente si avrebbe:

$$P_n=\Sigma-\frac{1}{\mu'(a)}a^{-(n+1)}=-\frac{1}{3}\Sigma\frac{1}{\mu_1+2\mu_2 a+\mu_3 a^2}a^{-(n+1)} ;$$

quindi per le stesse formole di poc'anzi:

$$P_n=-\frac{1}{3M}\Sigma\left(A^0+A'a+2\mu_3 A''a^2\right)a^{-(n+1)} ;$$

e perciò:

$$P_n=-\frac{1}{3M}\left[A^0 s_{-(n+1)}+A's_{-n}+2\mu_3 A''s_{-(n-1)}\right] .$$

Esempio IV.

41. Crediamo opportuno di richiamare l'attenzione de' giovani studiosi sopra un esempio considerato dall' egregio Geometra Francese signor Eugenio Catalan nel suo stimabilissimo libro sulle serie, pubblicato a Parigi nel 1860: esempio che forma il soggetto de' numeri 129 e 130 a pag. 76 e 77. Trattandosi di un libro la di cui lettura torna utilissima agli studiosi, ci è sembrato necessario di rettificare alcune idee poco

esatte, che ivi si trovano espresse; ma dichiariamo ad un tempo che queste inesattezze sono, senza dubbio, da attribuirsi a sconcerti di stampa avvenuti in quelle pagine, i quali avranno alterato il concetto dell'Autore. Trattasi per tanto dello sviluppo ascendente della funzione $\frac{1+x-x^2}{1+x-x^3}$, e quindi si vede che questo sviluppo potrebbe subito farsi dipendere da quello dell'esempio precedente; ma preferiamo di occuparcene direttamente, e però supporremo:

$$\frac{1+x-x^2}{1+x-x^3}=P_0+P_1x+P_2x^2+\ldots+P_nx^n+\ldots$$

Cangiando x in $\frac{1}{x}$ (V. il n° 3), e poi divedendo i due membri per x, risulta:

$$\frac{x^2+x-1}{x^3+x^2-1}=\frac{P_0}{x}+\frac{P_1}{x^2}+\frac{P_2}{x^3}+\ldots+\frac{P_n}{x^{n+1}}+\ldots;$$

ed allora la quistione è ridotta a trovare l'espressione di P_n coefficiente di $x^{-(n+1)}$ nello sviluppo discendente della funzione $\frac{x^2+x-1}{x^3+x^2-1}$. Poichè l'equazione $x^2+x^3-1=0$ ha le radici disuguali, se s'indica con a una di esse, avremo immediatamente (numeri 27 e 28)

$$P_n=\sum\frac{a^2+a-1}{3a^2+2a}a^n,$$

la somma dovendo estendersi alle tre radici; e più non resta che a trasformare il fattore frazionario sotto il segno $\sum$ in funzione intera di a, mediante l'equazione

$$a^3+a^2-1=0.$$

Si può agevolare la trasformazione di quel fattore, moltiplicandone i due termini per a, e poscia sostituendo ad a^3 il valore $1-a^2$, che ne dà l'ultima equazione. Si ottiene in siffatta guisa

$$\frac{a^2+a-1}{3a^2+2a}=\frac{1-a}{3-a^2}$$

e si ha in conseguenza:

$$P_n=\sum\frac{1-a}{3-a^2}a^n.$$

Operando ora la trasformazione col metodo già prescritto (n° 22), si ottiene:

$$\frac{1-a}{3-a^2}=\frac{1}{23}(4-6a+5a^2)\ ;$$

quindi:

$$P_n=\frac{1}{23}\Sigma(4-6a+5a^2)a^n\ ;$$

e da ultimo, prendendo la somma, si avrà:

$$P_n=\frac{1}{23}(4s_n-6s_{n-1}+5s_{n-2})\ :$$

formola in cui s_r dinota la somma delle potenze r^{me} delle radici dell' equazione $x^3+x^2-1=0$. Se si calcolano i valori di s_r per $r=0$, 1, 2, etc: si trova:

$$s_0=3\ ,\ s_1=-1\ ,\ s_2=\ \ 1\ ,\ s_3=2\ ,\ s_4=-3$$
$$s_5=4\ ,\ s_6=-2\ ,\ s_7=-1\ ,\ s_8=5\ ,\ s_9=-7\ ,\ \text{etc:}$$

In virtù di questi valori si ottiene:

$$P_0=1\ ,\ P_1=0\ ,\ P_2=-1\ ,\ P_3=2\ ,\ P_4=-2$$
$$P_5=1\ ,\ P_6=1\ ,\ P_7=-3\ ,\ P_8=4\ ,\ P_9=-3\ ,\ \text{etc:}$$

e si ha perciò:

$$\frac{1+x-x^2}{1+x-x^3}=1+0\,.\,x-x^2+2x^3-2x^4+x^5+x^6-3x^7+4x^8+\ \text{etc.}$$

La quistione adunque è completamente risoluta; ma frattanto nel numero 130 del libro del signor Catalan si legge quanto segue: « Dans « l'exemple I $\left(\text{che riguarda lo sviluppo di } \frac{1+x}{6-5x+x^2}\right)$ il a été facile de « determiner le terme général du développement de la fraction, parce « que l'on connaissait, *sous forme finie* les facteurs du dènominateur. « Mais, si l'on se proposait d'assigner le terme général de la suite 1, « 0, —1, 2, —2, 3, —5, 7, —10, 15, on serait ramené à la résolution « de l'équation irreductible $x^3-x-1=0$. *La question peut donc être re-« gardée comme a peu près insoluble* ».

Così, secondo questa conchiusione, sarebbe generalmente impossibile di esprimere il termine generale dello sviluppo in serie di una funzione

fratta razionale, allorchè i fattori lineari del suo denominatore non si possono esprimere sotto forma finita; cosa che non è affatto vera. Ora è appunto contro questa proposizione, così recisamente affermata, che intendiamo di prevenire i giovani studiosi; e, giova di ripeterlo, per noi non è dubbio che il concetto dell'Autore sia stato travisato da dissesti di stampa, da lui non avvertiti, come lo provano altri errori, che si riscontrano nello stesso luogo. In effetti in una nota a piè della pag. 77, che ha il suo richiamo dopo le parole, poc'anzi citate ... *a peu près insoluble*, si legge: « Cependant, si l'on appelle a, b, c les trois racine de « l'équation $x^3-x-1=0$, on trouve, par un calcul que nous suppri-« mons:

$$P_n=\frac{1-a}{3+2a}a^n+\frac{1-b}{3+2b}b^n+\frac{1-c}{3+2c}c^n.$$

Questa espressione, sotto forma più concisa, equivale a:

$$P_n=\Sigma\frac{1-a}{3+2a}a^n;$$

ma possiamo subito riconoscere la sua inesattezza, perchè, dinotando a una radice dell'equazione $1+x-x^3=0$, pe' numeri 32 e 33 dev'essere invece:

$$P_n=\Sigma-\frac{1+a-a^2}{1-3a^2}a^{-(n+1)}$$

od ancora:

$$P_n=\Sigma-\frac{1+a-a^2}{a-3a^3}a^{-n};$$

e siccome $1+a-a^3=0$, e quindi $1+a=a^3$, se nel numeratore del fattore frazionario si ponga a^3 in luogo di $1+a$, si avrà sotto forma più semplice:

$$P_n=\Sigma\frac{a-a^2}{1-3a^2}a^{-n};$$

espressione la quale non può coincidere con quella data del sig. Catalan.

Nè questo è tutto. Col principio delle serie ricorrenti il signor Catalan calcola alcuni dei primi termini dello sviluppo della frazione proposta, e trova:

$$\frac{1+x-x^2}{1+x-x^3}=1-x^2+2x^3-2x^4+3x^5-5x^6+7x^7-10x^8+\text{ etc. };$$

ma non si ha che a confrontare questo sviluppo con quello da noi dato

più sopra, per riconoscerlo erroneo, coincidendo essi solo fino al termine affetto dalla potenza x^4. Qui però l'errore è cagionato da inavvertenza, dappoichè essendo il denominatore della data frazione di 3° grado, per la teoria delle serie ricorrenti bisogna calcolare direttamente i primi tre termini dello sviluppo; e, mentre questi tre termini sono $1, 0.x, -x^2$, il signor Catalan prende invece $1, -x^2, 2x^3$; e quindi lo sviluppo dovea naturalmente risultare inesatto.

Esempio V.

42. In questo esempio prenderemo a considerare la frazione:

$$\frac{1}{\mu(x)} = \frac{1}{(\mu_0 + 2\mu_1 x + \mu_2 x^2)^\alpha} = \frac{1}{X^\alpha};$$

ma vogliamo prima esaminare il caso di $\alpha = 2$. In questa ipotesi, dinotata con a una radice dell'equazione $X = 0$, si ha (n^i 19 e 28):

$$Q_n = \Sigma \left(\frac{n}{\theta} - \frac{\theta'}{\theta^2} a \right) a^{n-1} = \Sigma V a^{n-1}$$

avendo messo:

$$V = \frac{n}{\theta} - \frac{\theta'}{\theta^2} a .$$

Ora, per determinare θ e θ', nella funzione $\mu(x)$ muteremo subito la x in $a+t$ (n° 21); allora, essendo $\mu_0 + 2\mu_1 a + \mu_2 a^2 = 0$, si avrà dapprima:

$$\mu(a+t) = t^2 \left\{ 2(\mu_1 + \mu_2 a) + \mu_2 t \right\}^2 ;$$

ed in seguito:

$$\theta(a+t) = \left\{ 2(\mu_1 + \mu_2 a) + \mu_2 t \right\}^2 .$$

Indi, sviluppando il quadrato, si ottiene:

$$\theta = 4(\mu_1 + \mu_2 a)^2 \quad , \quad \theta' = 4\mu_2(\mu_1 + \mu_2 a) ;$$

e si ha perciò:

$$V = \frac{1}{4} \left[n \frac{1}{(\mu_1 + \mu_2 a)^2} - \mu_2 a \frac{1}{(\mu_1 + \mu_2 a)^3} \right] .$$

Resta a trasformare la V in funzione intera di a; il che si riduce a tra-

sformare la 2ª e 3ª potenza della frazione $\frac{1}{\mu_1+\mu_2 a}$; e così (V. il 1° esempio, e la nota I) risulta:

$$V=\frac{1}{4M^2}\left(Mn-\mu_2(\mu_1 a+\mu_2 a^2)\right).$$

Avremo adunque:

$$Q_n=\frac{1}{4M^2}\Sigma\left[Mn-\mu_2(\mu_1 a+\mu_2 a^2)\right]a^{n-1};$$

ed in fine, prendendo la somma, verrà:

$$Q_n=\frac{1}{4M^2}\left[Mns_{n-1}-\mu_2(\mu_1 s_n+\mu_2 s_{n+1})\right].$$

Questa formola contiene le tre somme s_{n-1}, s_n, s_{n+1}; ma stante la relazione:

$$\mu_0 s_{n-1}+2\mu_1 s_n+\mu_2 s_{n+1}=0,$$

che ha luogo tra esse ed i coefficienti dell'equazione $X=0$, potrà ridursi a contenerne solamente due. Se si elimina s_{n+1}, si avrebbe la formola che si sarebbe trovata direttamente riducendo la funzione V al 1° grado.

Per lo sviluppo ascendente si farebbe capo dalla formola:

$$P_n=\Sigma\left(\frac{n+1}{\theta}+\frac{\theta'}{\theta^2}a\right)a^{-(n+2)};$$

e si troverebbe:

$$P_n=\frac{1}{4M^2}\left[M(n+1)s_{-(n+2)}+\mu_2(\mu_1 s_{-(n+1)}+\mu_2 s_{-n})\right].$$

Anche questa formola può ridursi a contenere due delle tre somme, tenendo presente la relazione:

$$\mu_0 s_{-(n+2)}+2\mu_1 s_{-(n+1)}+\mu_2 s_{-n}=0.$$

43. Il metodo tenuto per $\alpha=2$ si estende ad α qualunque; ma pel caso generale preferiamo di far dipendere la ricerca dal teorema del

n° 11. Secondo questo teorema l'elemento $Q_{n,a}$ di Q_n coincide col coefficiente di $t^{\alpha-1}$ nello sviluppo di:

$$\frac{(a+t)^n}{\theta(a+t)};$$

ma si ha per le formole precedenti:

$$\theta(a+t)=\{2(\mu_1+\mu_2 a)+\mu_2 t\}^{\alpha};$$

adunque il valore di $Q_{n,a}$ sarà uguale al coefficiente di $t^{\alpha-1}$ nello sviluppo del prodotto

$$\{2(\mu_1+\mu_2 a)+\mu_2 t\}^{-\alpha}(a+t)^n;$$

e perciò, se si ponga:

$$V=$$

$$\frac{1}{2^{\alpha}}\left[\frac{(n)_{\alpha-1}(-\alpha)_0}{(\mu_1+\mu_2 a)^{\alpha}}+\frac{(n)_{\alpha-2}(-\alpha)_1\mu_2 a}{2(\mu_1+\mu_2 a)^{\alpha+1}}+\frac{(n)_{\alpha-3}(-\alpha)_2(\mu_2 a)^2}{2^2(\mu_1+\mu_2 a)^{\alpha+2}}+\ldots+\frac{(n)_0(-\alpha)_{\alpha-1}(\mu_2 a)^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}(\mu_1+\mu_2 a)^{2\alpha-1}}\right],$$

si avrà:

$$Q_{n,a}=Va^{n-\alpha+1};$$

da che poi segue:

$$Q_n=\Sigma Va^{n-\alpha+1};$$

la somma dovendo estendersi alle radici dell'equazione

$$\mu_0+2\mu_1 a+\mu_2 a^2=0.$$

Per compiere la ricerca non resta che a prendere la somma; e per ciò bisogna trasformare la V in funzione intera di a; ma, ridotta la quistione a questo punto, quello che rimane è puramente affare di scrittura, perchè la V è un aggregato di frazioni, che hanno per denominatori potenze di $\mu_1+\mu_2 a$; e sono già conosciute le funzioni intere equivalenti a tutte le potenze della frazione $\frac{1}{\mu_1+\mu_2 a}$ (nota I).

In quanto alla espressione di P_n si partirebbe dal principio che l'elemento $P_{n,a}$ coincide col coefficiente di $t^{\alpha-1}$ nello sviluppo della frazione:

$$-\frac{(a+t)^{n-1}}{\theta(a+t)}$$

e perciò nello sviluppo del prodotto:

$$-\{2(\mu_1+\mu_2 a)+\mu_2 t\}^{-\alpha}(a+t)^{n-1};$$

laonde, posto:

$$U=$$

$$\frac{1}{2^{\alpha}}\left[\frac{(-n-1)_{\alpha-1}(-\alpha)_0}{(\mu_1+\mu_2 a)^{\alpha}}+\frac{(-n-1)_{\alpha-2}(-\alpha)_1\mu_2 a}{2(\mu_1+\mu_2 a)^{\alpha+1}}+\frac{(-n-1)_{\alpha-3}(-\alpha)_2(\mu_2 a)^2}{2^2(\mu_1+\mu_2 a)^{\alpha+2}}+\dots\right.$$

$$\left.+\frac{(-n-1)_0(-\alpha)_{\alpha-1}(\mu_2 a)^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}(\mu_1+\mu_2 a)^{2\alpha-1}}\right],$$

si ha:

$$P_{n,}=-Ua^{-n-\alpha};$$

ed in seguito:

$$P_n=-\Sigma Ua^{-n-\alpha};$$

la somma dovendo sempre estendersi alle radici dell'equazione

$$\mu_0+\mu_1 a+\mu_2 a^2=0 .$$

Per compiere poi la ricerca si procederà interamente, come a riguardo di Q_n.

Per concretare questa soluzione con un caso particolare supporremo $\alpha=3$. In questa ipotesi le espressioni di V ed U divengono:

$$V=\frac{1}{2^4}\left[n(n-1)\frac{1}{(\mu_1+\mu_2 a)^3}-3n\mu_2 a\frac{1}{(\mu_1+\mu_2 a)^4}+3\mu_2^2 a^2\frac{1}{(\mu_1+\mu_2 a)^5}\right],$$

$$U=\frac{1}{2^4}\left[(n+1)(n+2)\frac{1}{(\mu_1+\mu_2 a)^3}+3(n+1)\mu_2 a\frac{1}{(\mu_1+\mu_2 a)^4}+3\mu_2^2 a^2\frac{1}{(\mu_1+\mu_2 a)^5}\right];$$

e quindi essendo:

$$Q_n=\Sigma Va^{n-2} \quad , \quad P_n=-\Sigma Ua^{-(n+3)};$$

mutando le frazioni nelle equivalenti funzioni intere, e poi prendendo le somme, risultano le due formole

$$Q_n=\frac{1}{2^4 M^2}\left[n(n-1)(\mu_1 s_{n-2}+\mu_2 s_{n-1})-3n\mu_2 s_{n-1}+\frac{3}{M}\mu_2^2(\mu_1 s_n+\mu_2 s_{n+1})\right];$$

$$P_n=\frac{-1}{2^4 M^2}\left[(n+1)(n+2)(\mu_1 s_{-(n+3)}+\mu_2 s_{-(n+2)})+3(n+1)\mu_2 s_{-(n+2)}\right.$$

$$\left.+\frac{3}{M}\mu_2^2(\mu_1 s_{-(n+1)}+\mu_2 s_{-n})\right].$$

Ciascuna di queste formole contiene quattro somme di potenze di ra-

dici; ma sì l'una che l'altra può ridursi a contenerne solamente due; perchè, sussistendo le due coppie di relazioni:

$$\mu_0 s_{n-2}+2\mu_1 s_{n-1}+\mu_2 s_n=0 \quad , \quad \mu_0 s_{n-1}+2\mu_1 s_n+\mu_2 s_{n+1}=0 \, ,$$

$$\mu_0 s_{-(n-3)}+2\mu_1 s_{-(n-2)}+\mu_2 s_{-(n-1)}=0 \quad , \quad \mu_0 s_{-(n-2)}+2\mu_1 s_{-(n-1)}+\mu_2 s_{-n}=0 \, ,$$

si possono da ciascuna eliminar due somme. Se si eliminano dalla prima s_{n-1} ed s_n, e dalla seconda $s_{-(n-1)}$ ed s_{-n}, si perverrebbe alle formole che si sarebbero trovate direttamente, se le funzioni V ed U, oltre a trasformarsi in funzioni intere di a, si fossero ancora ridotte al 1° grado.

44. L'esempio del quale ci siamo occupati comprende come caso particolare lo sviluppo della frazione (*):

$$\frac{1}{(1-2x\cos\omega+x^2)^2} \, .$$

per la quale si ha $\mu_0=\mu_2=1$, $\mu_1=-\cos\omega$, $s_i=s_{-i}=2\cos i\omega$, ed $M=-\operatorname{sen}^2\omega$. Quando $\alpha=2$, per la sola condizione di $\mu_0=\mu_2=1$, le espressioni di Q_n e P_n divengono:

$$Q_n=\frac{1}{4M^2}\left[n s_{n-1}-\frac{1}{M}(s_{n+1}-\mu_1 s_n)\right] \, , \quad P_n=\frac{1}{4M}\left[(n-1)s_{n-2}-\frac{1}{M}(s_n-\mu_1 s_{n-1})\right]$$

ma quindi tenendo conto delle altre condizioni, ed osservando che

$$s_{n+1}+\mu_1 s_n=2\{\cos(n+1)\omega-\cos\omega\cos n\omega\}=-2\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}n\omega \, ,$$

$$s_n-\mu_1 s_{n-1}=2\{\cos n\omega-\cos\omega\cos(n-1)\omega\}=-2\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}(n-1)\omega \, ,$$

si ottengono le formole semplicissime:

$$Q_n=\frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}n\omega}{\operatorname{sen}^3\omega}-n\frac{\cos(n-1)\omega}{\operatorname{sen}^2\omega}\right] \, , \quad P_n=\frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(n-1)\omega}{\operatorname{sen}^3\omega}-(n-1)\frac{\cos(n-1)\omega}{\operatorname{sen}^2\omega}\right]$$

(*) Intorno allo sviluppo di questa frazione vedi la nota XI del Trattato della risoluzione delle equazioni numeriche di Lagrange; ed il n° 1120 del Trattato di calcolo differenziale ed integrale di Lacroix, vol. 3°. Aggiungiamo a tal riguardo che col metodo di Lagrange non è possibile di ottenere l'espressione di P_n nella forma così compatta come risulta dal nostro procedimento; ed anche nel caso più semplice di $\alpha=2$ non si vede facilmente come l'espressione data da Lagrange si riduca a quella da noi data qui sopra.

Nel caso di $\alpha=3$ si ha dapprima:

$$Q_n=\frac{1}{2^4M^2}\left[n(n-1)(s_{n-1}+\mu_1 s_{n-2})-3ns_{n-1}+\frac{3}{M}(s_{n+1}+\mu_1 s_n)\right] ;$$

$$P_n=\frac{-1}{2^4M^2}\left[(n+1)(n+2)(s_{n+2}+\mu_1 s_{n+3})+3(n+1)s_{n+2}+\frac{3}{M}(s_n+\mu_1 s_{n+1})\right] ;$$

e siccome:

$$s_{n-1}+\mu_1 s_{n-2}=2[\cos(n-1)\omega-\cos\omega\cos(n-2)\omega]=-2\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}(n-2)\omega$$

$$s_{n+1}+\mu_1 s_n\ \ =2[\cos(n+1)\omega-\cos\omega\cos n\omega\qquad]=-2\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}n\omega$$

$$s_{n+2}+\mu_1 s_{n+3}=2[\cos(n+2)\omega-\cos\omega\cos(n+3)\omega]=\ \ 2\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}(n+3)\omega$$

$$s_n\ \ +\mu_1 s_{n+1}=2[\cos n\omega\qquad-\cos\omega\cos(n+1)\omega]=\ \ 2\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}(n+1)\omega$$

così risultano le formole:

$$Q_n=\frac{1}{2^3}\left\{3\frac{\operatorname{sen}n\omega}{\operatorname{sen}^5\omega}-3n\frac{\cos(n-1)\omega}{\operatorname{sen}^4\omega}-n(n-1)\frac{\operatorname{sen}(n-2)\omega}{\operatorname{sen}^3\omega}\right\} ;$$

$$P_n=\frac{1}{2^3}\left\{3\frac{\operatorname{sen}(n+1)\omega}{\operatorname{sen}^5\omega}-3(n+1)\frac{\cos(n+2)\omega}{\operatorname{sen}^4\omega}-(n+1)(n+2)\frac{\operatorname{sen}(n+3)\omega}{\operatorname{sen}^3\omega}\right\} .$$

V.

Altra soluzione della quistione.

45. Procedendo co' metodi esposti alla ricerca delle funzioni Q_n e P_n abbiamo potuto definire completamente la loro forma in termini delle somme delle potenze simili delle radici di una o più equazioni, vale a dire o della sola equazione $\mu(x)=0$, o delle equazioni in cui questa per avventura si può decomporre. Ma, le forme una volta conosciute, si comprende che debba essere possibile di determinare le stesse funzioni col principio de' coefficienti indeterminati, indipendentemente dalle trasformazioni che ci guidarono a scovrire le loro forme; ed è per tal via che si perviene ad un altro metodo estremamente semplice per risolvere la proposta quistione.

Limitandoci a considerare lo sviluppo di $\frac{1}{\mu(x)}$, porremo, come al nº 2

$$\mu(x)=\mu_0+\mu_1 x+\mu_2 x^2+\ldots+\mu_m x^m\,;$$

e per chiarezza distingueremo tre casi, secondochè l'equazione $\mu(x)=0$ ha disuguali le radici; o le ha tutte multiple di uno stesso grado; o ha diverse classi di radici multiple.

Sviluppo discendente

46. Caso I. *L'equazione $\mu(x)=0$ ha disuguali le radici.* In questo caso per la formola (28) sarà:

$$q_n=A^0 s_n+A' s_{n+1}+A'' s_{n+2}+\ldots+A^{(m-1)} s_{n+m-1}\,, \tag{34}$$

dove le somme s_r si rapportano alle radici di $\mu(x)=0$, mentre i coefficienti $A^0, A', \ldots, A^{(m-1)}$ sono delle costanti, indipendenti cioè da n. Così la ricerca di q_n si riduce appunto a determinare queste m costanti; ed è chiaro che perciò basta conoscere i valori di q_n corrispondenti ad m valori di n. Ma trattandosi dello sviluppo discendente di $\frac{1}{\mu(x)}$ si ha $q_0=q_1=q_2=\ldots=q_{m-2}=0$ (nº 5); ed è inoltre $q_{m-1}=\frac{1}{\mu_m}$ (nº 2); adunque la formola (34), ponendovi successivamente $n=0, 1, 2, \ldots, m-1$, conduce al seguente sistema di m equazioni lineari:

$$\begin{aligned}
0 &= A^0 s_0 + A' s_1 + A'' s_2 + \ldots + A^{(m-1)} s_{m-1}\\
0 &= A^0 s_1 + A' s_2 + A'' s_3 + \ldots + A^{(m-1)} s_m\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
0 &= A^0 s_{m-2} + A' s_{m-1} + A'' s_m + \ldots + A^{(m-1)} s_{2m-3}\\
\frac{1}{\mu_m} &= A^0 s_{m-1} + A' s_m + A'' s_{m+1} + \ldots + A^{(m-1)} s_{2m-2}
\end{aligned}$$

per mezzo delle quali restano definiti i valori delle m costanti. Intanto dovendo queste equazioni coesistere con la (34), posto per compendio:

$$M=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & . & s_{m-1}\\ s_1 & s_2 & . & s_m\\ . & . & . & .\\ s_{m-1} & s_m & . & s_{2m-2}\end{vmatrix}$$

si perviene alla formola:

$$q_n = \frac{1}{\mu_m M} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & . & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & . & s_m \\ . & . & . & . \\ s_{m-2} & s_{m-1} & . & s_{2m-3} \\ s_n & s_{n+1} & . & s_{n+m-1} \end{vmatrix}$$

la quale determina il valore di q_n senza bisogno di alcuna trasformazione; ed in tal modo la quistione sembra ridotta a quel grado maggiore di semplicità di cui poteva essere suscettibile.

47. Rimanendo tuttavia disuguali le radici dell'equazione $\mu(x)=0$, se la funzione $\mu(x)$ sia un prodotto di più fattori razionali $X_a, X_b, \ldots, X_l$, la ricerca di q_n potrà farsi dipendere da quella delle sue componenti $W_a, W_b, \ldots, W_l$, le quali si determineranno con lo stesso metodo tenuto qui sopra. In fatti indicando, come per lo innanzi $a', b', \ldots, l'$ i gradi di $X_a, X_b, \ldots, X_l$, le espressioni delle componenti saranno della forma (n° 27):

$$W_a = A^0 s_n^{(a)} + A' s_{n+1}^{(a)} + \ldots + A^{(a'-1)} s_{n+a'-1}^{(a)}$$

$$W_b = B^0 s_n^{(b)} + B' s_{n+1}^{(b)} + \ldots + B^{(b'-1)} s_{n+b'-1}^{(b)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$W_l = L^0 s_n^{(l)} + L' s_{n+1}^{(l)} + \ldots + L^{(l'-1)} s_{n+l'-1}^{(l)}$$

dove i sistemi di coefficienti sono delle costanti indipendenti da n, e la quistione si riduce a determinare i loro valori. Ora queste costanti sono al numero di $a'+b'+\ldots+l'=m$; e si ha d'altra parte:

$$q_n = W_a + W_b + \ldots + W_l\,;$$

e perciò, siccome sono nulli i valori di q_n corrispondenti ad $n=0, 1, 2, \ldots, m-2$, e si ha $q_{m-1}=\frac{1}{\mu_m}$, si vede che i valori delle costanti si determinano precisamente come nel caso precedente.

48. Supponiamo per esempio:

$$\frac{1}{\mu(x)} = \frac{1}{X_a X_b} = \frac{1}{(1-x+x^2)(1+x^4)}\,.$$

In questo caso le componenti di q_n saranno due W_a, W_b, l'una corrispon-

dente al fattore $X_a=1-x+x^2$, l'altra ad $X_b=1+x^4$; ed essendo $a'=2$ e $b'=4$, si avrà:

$$W_a = A^\circ s_n^{(a)} + A' s_{n-1}^{(a)}$$

$$W_b = B^\circ s_n^{(b)} + B' s_{n-1}^{(b)} + B'' s_{n-2}^{(b)} + B''' s_{n-3}^{(b)}$$

Dopo ciò, dovendo essere $q_n = W_a + W_b$, sarà:

$$q_n = A^\circ s_n^{(a)} + A' s_{n-1}^{(a)} + B^\circ s_n^{(b)} + B' s_{n-1}^{(b)} + B'' s_{n-2}^{(b)} + B''' s_{n-3}^{(b)}\ ; \tag{35}$$

e più non resta che determinare le sei costanti A°, A', B°, B', B'', B'''. A tal'effetto si daranno ad n i valori successivi 0, 1, 2, 3, 4, 5, pe' quali $q_0=q_1=q_2=q_3=q_4=0$ e $q_5=1$; ed in tal modo si otterranno sei equazioni, che danno i valori delle costanti.

Ma ora, per la natura dell'esempio, è anche facile di avere i valori numerici di $s_r^{(a)}$, $s_r^{(b)}$ per qualsivoglia valore di r; il che deriva da ciò che X_a ed X_b sono i fattori irriduttibili de' binomii $1-x^6$, $1-x^8$, e quindi le funzioni $s_r^{(a)}$, $s_r^{(b)}$ esprimono rispettivamente le somme delle potenze r^{esime} delle radici primitive delle equazioni binomie $1-x^6=0$, $1-x^8=0$. Pertanto segue dalla teoria di queste funzioni, da noi esposta in altra occasione:

I. Che la somma $s_r^{(a)}$ non ha che quattro valori distinti, cioè:

$s_r^{(a)} = \ \ 2$, se r è divisibile per 6

$s_r^{(a)} = -2$, se r è divisibile per 3, senza esserlo per 2

$s_r^{(a)} = -1$, se r è divisibile per 2, senza esserlo per 3

$s_r^{(a)} = \ \ 1$, se r è primo con 6.

II. E che tre sono i valori distinti di $s_r^{(b)}$, cioè:

$s_r^{(b)} = \ \ 4$, se r è divisibile per 8

$s_r^{(b)} = -4$, se r è divisibile per 4, senza esserlo per 8

$s_r^{(b)} = \ \ 0$, se r non è divisibile per 4.

È chiaro che in tal guisa sono perfettamente determinati i valori numerici di $s_r^{(a)}$ ed $s_r^{(b)}$, qualunque sia il valore di r; ed è così che si avrebbe:

$$s_0^{(a)}=2\ ,\ s_1^{(a)}=1\ ,\ s_2^{(a)}=-1\ ,\ s_3^{(a)}=-2\ ,\ s_4^{(a)}=-1\ ,\ s_5^{(a)}=1\ ,\ \text{etc. etc.}$$

$$s_0^{(b)}=4\ ,\ s_1^{(b)}=0\ ,\ s_2^{(b)}=0\ ,\ s_3^{(b)}=0\ ,\ s_4^{(b)}=-4\ ,\ \text{etc: etc:}$$

Dopo queste considerazioni la formola (35), ponendovi successivamente $n=0, 1, 2, 3, 4, 5$, condurrà subito al sistema di equazioni:

$$\begin{aligned}
0&=\ \ 2A^\circ+\ A'+4B^\circ\\
0&=\ \ \ \ A^\circ-\ A'-4B'''\\
0&=-\ A^\circ-2A'-4B''\\
0&=-2A^\circ-\ A'-4B'\\
0&=-\ A^\circ+\ A'-4B^\circ\\
1&=\ \ \ \ A^\circ+2A'+4B'''
\end{aligned}$$

dalle quali si ricava immediatamente:

$$A^\circ=\frac{2}{3}\ ,\ A'=-\frac{1}{3}\ ,\ B^\circ=-\frac{1}{4}\ ,\ B'=-\frac{1}{4}\ ,\ B''=0\ ,\ B'''=\frac{1}{4}$$

e si avrà in conseguenza:

$$q_n=\frac{1}{3}\left(2s_n^{(a)}-s_{n-1}^{(a)}\right)-\frac{1}{4}\left(s_n^{(b)}+s_{n-1}^{(b)}-s_{n-3}^{(b)}\right). \tag{36}$$

Cercando per esempio il millesimo termine dello sviluppo, vale a dire il valore di q_{999}, sarà:

$$q_{999}=\frac{1}{3}\left(2s_{999}^{(a)}-s_{1000}^{(a)}\right)-\frac{1}{4}\left(s_{999}^{(b)}+s_{1000}^{(b)}-s_{1002}^{(b)}\right):$$

ma $\quad s_{999}^{(a)}=-2\ ,\ s_{1000}^{(a)}=-1\ ,\ s_{999}^{(b)}=0\ ,\ s_{1000}^{(b)}=4\ ,\ s_{1002}^{(b)}=0\ ;\quad$ dunque

$$q_{999}=\frac{1}{3}\left(-4+1\right)-\frac{1}{4}\cdot 4$$

ossia

$$q_{999}=-2\ .$$

49. Caso II. *Le radici di $\mu(x)=0$ sono tutte multiple di grado α.* In questa ipotesi $\mu(x)$ è della forma X_a^{α}, e si avrà (n° 28):

$$q_n = A_n^0 s_n + A_n' s_{n+1} + \ldots + A_n^{(a'-1)} s_{n+a'-1};$$

le somme s_r rapportandosi alle radici di $X_a=0$, ed a' dinotando il grado di X_α, di guisa che $m=\alpha a'$. Attualmente tutte le quantità $A_n^{(r)}$ sono funzioni intere di n di grado $\alpha-1$, (n° 27) sicchè l'espressione di ciascuna è della forma:

$$A_n^{(r)} = a_{0,r} + a_{1,r} n + a_{2,r} n^2 + \ldots + a_{\alpha-1,r} n^{\alpha-1},$$

dove gli α coefficienti $a_{0,r}$, $a_{1,r}$, ..., $a_{\alpha-1,r}$ sono costanti indipendenti da n. Adunque il numero delle costanti contenute nella espressione di q_n risulta uguale ad $\alpha a'$, vale a dire uguale ad m, grado di $\mu(x)$, e le m equazioni lineari, che le determinano, si otterranno ponendovi successivamente $n=0, 1, 2, \ldots, m-1$, e tenendo presente che $q_0=0$, $q_1=0, \ldots, q_{m-2}=0$, $q_{m-1}=\frac{1}{\mu_m}$.

50. Supponiamo per esempio che si tratti di sviluppare $\frac{1}{(x^3+x^2-1)^2}$, per cui $\mu(x)=X_a^{\alpha}=(x^3+x^2-1)^2$, $\mu_m=1$, $a'=3$, $\alpha=2$, $m=\alpha a'=6$. Ed essendo $a'=3$, si ha dapprima:

$$q_n = A_n^0 s_n + A_n' s_{n+1} + A_n'' s_{n+2}.$$

Inoltre, essendo $\alpha=2$, A_n^0, A_n', A_n'' saranno funzioni lineari di n, e si potrà supporre:

$$q_n = (a+bn)s_n + (c+dn)s_{n+1} + (e+fn)s_{n+2}.$$

Per determinare le sei costanti a, b, c, d, e, f si daranno ad n i valori successivi $0, 1, 2, 3, 4, 5$, e siccome $s_0=3$, $s_1=-1$, $s_2=1$, $s_3=2$, $s_4=-3$, $s_5=4$, $s_6=-2$, $s_7=-1$, si otterranno le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
0 &= 3a - c + e \\
0 &= -(a+b) + (c+d) + 2(e+f) \\
0 &= (a+2b) + 2(c+2d) - 3(e+2f) \\
0 &= 2(a+3b) - 3(c+3d) + 4(e+3f) \\
0 &= -3(a+4b) + 4(c+4d) - 2(e+4f) \\
1 &= 4(a+5b) - 2(c+5d) - (e+5f).
\end{aligned}$$

Risolvendo queste equazioni si trova:

$$23^2 a = -52 \quad , \quad 23b = 2$$
$$23^2 c = -106 \quad , \quad 23d = 2$$
$$23^2 e = 50 \quad , \quad 23f = -1$$

e quindi risulta:

$$q_n = \frac{n}{23}\left(2s_n + 2s_{n-1} - s_{n-2}\right) - \frac{2}{23^2}\left(26s_n + 53s_{n-1} - 25s_{n-2}\right).$$

51. Caso III. *L'equazione $\mu(x)=0$ ha diverse classi di radici multiple.* La funzione $\mu(x)$ sarà generalmente della forma $X_a^\alpha X_b^\beta \dots X_c^\gamma$; e però, supposto che $W_a, W_b, \dots, W_c$ siano le componenti di q_n relative ai fattori $X_a^\alpha, X_b^\beta, \dots, X_c^\gamma$, si avrà:

$$(37) \qquad q_n = W_a + W_b + \dots + W_c$$

ed inoltre:

$$W_a = A_n^0 s_n^{(a)} + A_n' s_{n-1}^{(a)} + \dots + A_n^{(a'-1)} s_{n-a'-1}$$
$$W_b = B_n^{(b)} s_n^{(b)} + B_n' s_{n-1}^{(b)} + \dots + B_n^{(b'-1)} s_{n-b'-1}^{(b)}$$

etc: etc: etc:

$A_n^{(r)}$, $B_n^{(r)}$, etc. essendo funzioni intere di n di grado $\alpha-1$, e quindi della forma

$$A_n^{(r)} = a_{0,r} + a_{1,r}n + a_{2,r}n^2 + \dots + a_{\alpha-1,r}n^{\alpha-1}$$
$$B_n^{(r)} = b_{0,r} + b_{1,r}n + b_{2,r}n^2 + \dots + b_{\beta-1,r}n^{\beta-1}$$

etc: etc: etc:

dove i coefficienti $a_{i,r}$, $b_{i,r}$, etc: sono costanti, che più non dipendono da n. Osserviamo che le costanti contenute nelle espressioni di W_a, W_b, etc. sono rispettivamente in numero di $\alpha a'$, $\beta b'$, etc.; ma questi numeri indicano per ordine i gradi di X_a^α, X_b^β, etc.; dunque il numero totale delle costanti contenute nella espressione di q_n sarà, come ne' casi precedenti, uguale ad m, grado di $\mu(x)$; e perciò i loro valori si otterranno dalla formola (37) ponendovi successivamente $n=0, 1, 2, \dots, m-1$, e tenendo presente che $q_0=0$, $q_1=0, \dots, q_{m-2}=0$, $q_{m-1}=\frac{1}{\mu_m}$.

Sviluppo ascendente

52. Procedimenti analoghi si possono stabilire per lo sviluppo ascendente di $\frac{1}{\mu(x)}$; ma siccome i primi m termini non sarebbero immediatamente conosciuti, eviteremo questo ostacolo facendo dipendere il detto sviluppo da quello di $\frac{x^{m-1}}{\mu(x)}$ (n° 5), pel quale tornano ad esser nulli i primi $m-1$ termini, ed il termine m^{simo} ha per coefficiente $\frac{1}{\mu_0}$. D'altra parte è già osservato che questi due sviluppi si deducono subito l'uno dall'altro, in guisa che chiamando p_n e p'_n i coefficienti di x^n nel primo e nel secondo sviluppo, si ha:

$$p_n = p'_{n+m-1}.$$

Adunque, invece di p_n coefficiente di x^n nello sviluppo ascendente di $\frac{1}{\mu(x)}$, cercheremo p'_n coefficiente di x^n nello sviluppo somigliante di $\frac{x^{m-1}}{\mu(x)}$. Ma, così essendo, è facile di vedere che tutto ciò che si è detto per la ricerca di q_n si applica parola a parola a quella di p'_n, col solo divario di doversi mutare μ_m in μ_0, e cangiarsi il segno agl'indici delle s, come segue dalle formole stabilite ne'numeri da 30 a 33. Intanto, per evitare gl'indici negativi, converremo di rappresentare con σ_r la somma delle potenze positive di grado r delle inverse delle radici di quelle medesime equazioni, cui si rapportano le somme s_r, di guisa che si avrà generalmente:

$$\sigma_r = s_{-r};$$

ed allora ecco i risultamenti che si ottengono nella presente ipotesi.

53. Caso I. *L'equazione $\mu(x)=0$ non ha radici multiple.* Dinotando σ_r la somma delle potenze di grado r delle radici di $\mu\left(\frac{1}{x}\right)=0$, sarà:

$$p'_n = A^0\sigma_n + A'\sigma_{n+1} + \ldots + A^{(m-1)}\sigma_{n+m-1};$$

e le m costanti $A^0, A', \ldots, A^{(m-1)}$ saranno definite dalle m equazioni:

$$\begin{array}{l}
0 = A^0\sigma_0 + A'\sigma_1 + A''\sigma_2 + \ldots + A^{(m-1)}\sigma_{m-1} \\
0 = A^0\sigma_1 + A'\sigma_2 + A''\sigma_3 + \ldots + A^{(m-1)}\sigma_m \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
0 = A^0\sigma_{m-2} + A'\sigma_{m-1} + A''\sigma_m + \ldots + A^{(m-1)}\sigma_{2m-3} \\
\dfrac{1}{\mu_m} = A^0\sigma_{m-1} + A'\sigma_m + A''\sigma_{m+1} + \ldots + A^{(m-1)}\sigma_{2m-2}\,.
\end{array}$$

Che, se pongasi

$$N = \begin{vmatrix} \sigma_0 & \sigma_1 & \cdot & \sigma_{m-1} \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdot & \sigma_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_{m-1} & \sigma_m & \cdot & \sigma_{2m-2} \end{vmatrix}$$

si avrà esplicitamente:

$$p'_n = \frac{1}{\mu_0 N} \begin{vmatrix} \sigma_0 & \sigma_1 & \cdot & \sigma_{m-1} \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdot & \sigma_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_{m-2} & \sigma_{m-1} & \cdot & \sigma_{2m-3} \\ \sigma_n & \sigma_{n+1} & \cdot & \sigma_{n+m-1} \end{vmatrix}$$

E quindi, volendo l'espressione di p_n, non si avrà che a mutare in questa formola la n in $n+m-1$; da che risulta:

$$p_n = \frac{1}{\mu_0 N} \begin{vmatrix} \sigma_0 & \sigma_1 & \cdot & \sigma_{m-1} \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdot & \sigma_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_{m-2} & \sigma_{m-1} & \cdot & \sigma_{2m-3} \\ \sigma_{n+m-1} & \sigma_{n+m} & \cdot & \sigma_{n+2m-2} \end{vmatrix}$$

Supponiamo per esempio che si tratti dello sviluppo di $\frac{1}{1+x-x^3}$; ed essendo $\mu_0=1$, $m=3$, si avrà:

$$p_n=\frac{1}{N}\begin{vmatrix}\sigma_0 & \sigma_1 & \sigma_2\\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3\\ \sigma_{n+2} & \sigma_{n+3} & \sigma_{n+4}\end{vmatrix}, \quad N=\begin{vmatrix}\sigma_0 & \sigma_1 & \sigma_2\\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3\\ \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4\end{vmatrix}$$

Qui la somma σ_r si rapporta alle radici dell'equazione $x^3+x^2-1=0$; per cui (n° 50) $\sigma_0=3$, $\sigma_1=-1$, $\sigma_2=1$, $\sigma_3=2$, $\sigma_4=-3$; e quindi sostituendo e calcolando i determinanti, verrà $N=-23$, e

$$p_n=\frac{1}{23}\left(3\sigma_{n+2}+7\sigma_{n+3}-2\sigma_{n+4}\right).$$

54. Gioverà di osservare che, se la funzione $\mu(x)$ è di forma reciproca, nelle formole precedenti sarà lecito di cangiare il simbolo σ in s, perchè allora $\sigma_r=s_{-r}=s_r$. Così in questa ipotesi la quantità figurata da N equivale a quella che nel n° 46 fu dinotata con M; ma si ha di più $\mu_0=\mu_m$; dunque sarà pure $q_n=q'_n$; e perciò: *quando la funzione* $\mu(x)$ *è di forma reciproca il coefficiente di* $x^{-(n+1)}$ *nello sviluppo discendente di* $\frac{1}{\mu(x)}$ coincide col *coefficiente di* x^n *nello sviluppo ascendente di* $\frac{x^{m-1}}{\mu(x)}$; ma ciò del resto risulta immediatamente a priori da ciò che si è detto nel n° 5.

55. Se la funzione $\mu(x)$ sia della forma $X_a, X_b, \ldots, X_l$, la ricerca di p'_n si farà dipendere, come nel n° 47, dalle componenti $W_a, W_b, \ldots, W_l$, le di cui espressioni sono ciò che divengono quelle ivi riportate, mutandovi il simbolo s in σ. E siccome le costanti, che vi si contengono, sono al numero di $a'+b'+\ldots+l'=m$, e si ha d'altra parte:

$$p'_n=W_a+W_b+\ldots+W_l,$$

è evidente che queste costanti si determinano precisamente con lo stesso metodo allora indicato.

Supponiamo per esempio che si tratti dello sviluppo ascendente della medesima frazione considerata nel detto n° 48, $\frac{1}{(1-x+x^2)(1+x^2)}$. L'espressione di p'_n si otterrebbe dal secondo membro della formola (36),

cangiandovi solo il simbolo s in σ; ma poichè le funzioni $X_a = 1 - x + x^2$ ed $X_b = 1 + x^4$ sono entrambe di forma reciproca, si vede che anche questo cangiamento è inutile.

In seguito per avere il valore di p_n basterà mutare nella formola istessa la n in $n+m-1$; $=n+5$; e così si avrà:

$$p_n = \frac{1}{3}\left(2s^{(a)}_{n+5} - s^{(a)}_{n+6}\right) - \frac{1}{4}\left(s^{(b)}_{n+5} + s^{(b)}_{n+6} - s^{(b)}_{n+8}\right).$$

Ma essendo:

$$s^{(a)}_{n+5} = -s^{(a)}_{n+2}, \quad s^{(b)}_{n+5} = -s^{(b)}_{n+1}$$

$$s^{(a)}_{n+6} = s^{(a)}_{n}, \quad s^{(b)}_{n+6} = -s^{(b)}_{n+2}$$

$$s^{(b)}_{n+8} = s^{(b)}_{n},$$

verrà in fine più semplicemente

$$p_n = \frac{1}{4}\left(s^{(b)}_{n} + s^{(b)}_{n+1} + s^{(b)}_{n+2}\right) - \frac{1}{3}\left(s^{(a)}_{n} + 2s^{(a)}_{n+2}\right).$$

Se si domanda, per esempio, il millesimo termine dello sviluppo, vale a dire se $n=999$, si avrebbe:

$$p_{999} = \frac{1}{4}\left(s^{(b)}_{999} + s^{(b)}_{1000} + s^{(b)}_{1001}\right) - \frac{1}{3}\left(s^{(a)}_{999} + 2s^{(a)}_{1001}\right);$$

e siccome:

$$s^{(b)}_{999} = 0, \quad s^{(b)}_{1000} = 4, \quad s^{(b)}_{1001} = 0, \quad s^{(a)}_{999} = -2, \quad s^{(a)}_{1001} = 1,$$

risulterà:

$$p_{999} = 1.$$

56. Caso II. *Le radici di $\mu(x)=0$ sono tutte multiple di grado α.* Valga per questo caso quanto si è detto nel n° 49, purchè si cangi da per tutto q in p', s in σ, e μ_m in μ_0.

Poniamo ad esempio che si tratti dello sviluppo di $\frac{1}{(1+x-x^3)^2}$. Le formole dalle quali deriva il valore di p'_n saranno le medesime del n° 50, salvo il cangiamento di s in σ. Intanto bisogna osservare che ora le somme σ_r si rapportano alle radici dell'equazione $x^3+x^2-1=0$, la stessa cui si rapportavano nel luogo citato le somme s_r; e perciò si ha senza più:

$$p'_n = \frac{1}{23}\left[\left(2n - \frac{52}{23}\right)\sigma_{n+1} + \left(2n - \frac{106}{23}\right)\sigma_{n+1} + \left(n - \frac{50}{23}\right)\sigma_{n+2}\right].$$

Attualmente, se piaccia di avere l'espressione di p_n, non si avrà che

a mutare la n in $n+m-1=n+6-1=n+5$. Per questo cangiamento s'introducono nella formola le tre somme σ_{n+5}, σ_{n+6}, σ_{n+7}, le quali si possono facilmente esprimere in funzione delle somme di grado più basso σ_n, σ_{n+1}, σ_{n+2}; e ciò mercè la relazione $\sigma_r-\sigma_{r-2}-\sigma_{r-3}=0$, la quale ha luogo tra le somme delle potenze simili delle radici dell'equazione $x^3+x^2-1=0$, ed i suoi coefficienti. Per tanto si trova in siffatta guisa:

$$\sigma_{n+5}=\sigma_n-\sigma_{n+1}$$
$$\sigma_{n+6}=\sigma_{n+1}-\sigma_{n+2}$$
$$\sigma_{n+7}=-\sigma_n+2\sigma_{n+2};$$

e così si ottiene:

$$p_n=\frac{1}{23}\left[3\left(n+\frac{81}{23}\right)\sigma_n-\frac{54}{23}\sigma_{n+1}-2\left(2n+\frac{127}{23}\right)\sigma_{n+2}\right].$$

Se si cerca per esempio il 20^{mo} termine, per cui $n=19$, si troverà dapprima;

$$\sigma_{19}=-20\,,\qquad \sigma_{20}=2\,,\qquad \sigma_{21}=23\,;$$

e quindi

$$p_{19}=-146\,.$$

57. Caso III. *L'equazione $\mu(x)=0$ ha diverse classi di radici multiple.* Supposto $\mu(x)=X_a^\alpha X_b^\beta \dots X_l^\lambda$, ed inoltre:

$$p'_n=W_a+W_b+\dots+W_l\,,$$

la quistione sarà risoluta dalle medesime formole del n° 51, salvo il cangiamento di s in σ. È poi manifesto che il numero delle costanti, che entrano nelle espressioni delle componenti W_a, W_b, ..., W_l, è sempre eguale ad m, grado di $\mu(x)$; e le equazioni che le determinano si otterranno dalla formola precedente dando ad n i valori successivi $0, 1, \dots, m-1$, pe' quali si ha ancora $p'_0=0$, $p'_1=0$, ..., $p'_{m-2}=0$, $p'_{m-1}=\frac{1}{\mu_0}$.

OSSERVAZIONE

Il metodo di sviluppo delle funzioni fratte razionali risultante dalla seconda soluzione è suscettibile di un perfezionamento considerevole, nel caso in cui l'equazione $\mu(x)=0$ ammette radici uguali; vale a dire quando la funzione $\mu(x)$ è della forma $X_a^\alpha X_b^\beta \ldots X_l^\lambda$ il che rientra nel caso considerato a' numeri 51 e 57. Si è veduto che questo metodo riduce la quistione alla determinazione simultanea delle componenti $W_a, W_b, \ldots, W_l$; ma si comprende che la risoluzione sarebbe grandemente agevolata quando queste componenti potessero determinarsi ad una ad una, cioè indipendentemente l' una dall' altra. Ora non solo è possibile di ottenere separatamente l'espressione di ogni componente come nella prima soluzione; ma sotto questo aspetto la ricerca diviene assai più semplice. Però, dipendendo questa novella risoluzione da principii di altra natura, ci limitiamo attualmente ad accennarla, riserbandoci di tornare in altra occasione su tale argomento.

———

NOTA I.

Sulla ricerca della funzione intera equivalente ad una funzione fratta razionale di una radice di un' equazione.

Le ricerche, delle quali ci siamo occupati, sono principalmente fondate sulla trasformazione di una funzione fratta razionale di una radice di una equazione in una funzione intera della stessa radice. Il metodo indicato a tale uopo nel n° 22 è semplice abbastanza per adottarsi in pratica; ma crediamo opportuno di esporne un altro molto più semplice, che non obbliga, come quello, ad introdurre coefficienti indeterminati, e che mena direttamente e prontamente alla trasformata.

Bisogna premettere che ogni funzione intera di una radice di un'equazione, di grado eguale o superiore a quello della equazione istessa, si può ridurre ad un'altra di grado inferiore. Sia a una radice dell' equazione di grado r:

$$\mathrm{F}(x)=k_0x^r+k_1x^{r-1}+\ldots+k_{r-1}x+k_r=0$$

e s'indichi con $f(a)$ una funzione intera di a, di grado non inferiore ad r. Essendo $\mathrm{F}(a)=0$, è chiaro che, mediante questa relazione si può esprimere il valore della potenza a^r, e di ogni altra potenza di grado più alto, in funzione delle potenze di gradi più piccoli di r; ed allora sostituendo le loro espressioni nella funzione $f(a)$, la medesima sarà ridotta ad un grado inferiore ad r, e generalmente al grado $r-1$. Ma questa riduzione, la quale a tal modo sarebbe lunga e fastidiosa, può essere operata di una maniera semplicissima, bastando perciò di dividere $f(a)$ per $\mathrm{F}(a)$; ed il residuo, che in generale è funzione di a, di grado inferiore ad r, sarà la funzione ridotta equivalente ad $f(a)$. In effetti chiamando Q il quoziente, e $\theta(a)$ il residuo, si ha:

$$f(a)=\mathrm{QF}(a)+\theta(a)\ ;$$

ma $\mathrm{F}(a)=0$; dunque risulta $f(a)=\theta(a)$.

È utile di avvertire che, se sia data una funzione $f(a)$ di grado $r-1$,

ed occorra di calcolare il sistema delle funzioni ridotte a grado inferiore a quello dell'equazione $F(a)=0$, equivalenti rispettivamente ai prodotti di $f(a)$ per le potenze successive a, a^2, $a^3, \ldots, a^m$, questo sistema di m funzioni si può ottenere mediante una sola divisione, bastando perciò di dividere per $F(a)$ il solo prodotto di grado più elevato $f(a).a^m$, e continuare la divisione fino al residuo di grado $r-1$. Indicando le funzioni ridotte con $f_1(a)$, $f_2(a)$, $f_3(a), \ldots, f_m(a)$, è evidente che i successivi m residui della mentovata divisione coincidono rispettivamente con le seguenti espressioni:

$$f_1(a).a^{m-1},\ f_2(a).a^{m-2},\ f_3(a).a^{m-3}, \ldots, f_m(a).a^0\ ;$$

e quindi si vede che le funzioni richieste si ottengono tutte ad un tempo ne' detti residui, sgombrati ordinatamente de' fattori a^{m-1}, $a^{m-2}, \ldots, a, a^0$.

Ciò premesso, essendo sempre a radice dell'equazione $F(a)=0$, passeremo a cercare la funzione intera di a equivalente alla frazione $\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}$, dove ora con $\varphi(a)$ e $\psi(a)$ intendiamo funzioni intere di gradi inferiori ad r, potendo sempre ridurvisi ove fussero di grado più alto. Posto:

$$u=\frac{\varphi(a)}{\psi(a)},$$

liberando da fratti si ha l'equazione

$$\text{(I)}\qquad u\psi(a)=\varphi(a)\ ,$$

e la quistione si riduce a determinare il valore di u in funzione intera di a.

A tale effetto moltiplicheremo l'equazione (I) per le potenze successive a^0, a, $a^2, \ldots, a^{r-1}$, ed avremo il sistema di r equazioni:

$$\text{(II)}\qquad \begin{aligned} u\psi(a) &= \varphi(a) \\ u\psi(a)a &= \varphi(a)a \\ u\psi(a)a^2 &= \varphi(a)a^2 \\ &\ \,\vdots \\ u\psi(a)a^{r-1} &= \varphi(a)a^{r-1}\ . \end{aligned}$$

Indi ridurremo i due membri di ciascuna a grado inferiore a quello di

$F(a)$; il che si ottiene con due sole divisioni, dividendo cioè per $F(a)$ i due prodotti $\psi(a)a^{r-1}$ e $\varphi(a)a^{r-1}$; ed in tal guisa, indicando per compendio le ridotte de' secondi membri con $\varphi(a)$, $\varphi_1(a)$, $\varphi_2(a)$, ..., $\varphi_{r-1}(a)$, le equazioni superiori prenderanno la forma:

$$
(\text{III}) \qquad \begin{array}{l}
(\alpha\, a^{r-1} + \beta\, a^{r-2} + \ldots + \delta\, a + \varepsilon\ )u = \varphi(a) \\
(\alpha_1 a^{r-1} + \beta_1 a^{r-2} + \ldots + \delta_1 a + \varepsilon_1\ )u = \varphi_1(a) \\
(\alpha_2 a^{r-1} + \beta_2 a^{r-2} + \ldots + \delta_2 a + \varepsilon_2\ )u = \varphi_2(a) \\
\\
(\alpha_{r-1} a^{r-1} + \beta_{r-1} a^{r-2} + \ldots + \delta_{r-1} a + \varepsilon_{r-1})u = \varphi_{r-1}(a)\,.
\end{array}
$$

Queste r equazioni, che diremo *equazioni ausiliari* per la determinazione della incognita u, conducono immediatamente ad esprimere il valore di u come una funzione intera di a; non dovendo che eliminarsi le $r-1$ potenze di a, che figurano ne' coefficienti di u, riguardate come incognite a primo grado. È chiaro che l'equazione risultante è lineare rispetto ad u; e mentre il coefficiente di questa incognita è indipendente da a, il termine indipendente da u è una funzione intera di a, la quale inoltre è di grado inferiore a quello di $F(a)$; e generalmente di grado $r-1$. In somma per la eliminazione delle dette potenze si ottiene un'equazione della forma:

$$
Mu = h_0 a^{r-1} + h_1 a^{r-2} + \ldots + h_{r-1}\,,
$$

dove i coefficienti M, h_0, h_1, ..., h_{r-1} sono quantità date, che non dipendono da a; e dalla quale risulta senza più il valore di u espresso come una funzione intera di a, che in generale è di grado $r-1$.

Si potrebbe subito raggiungere l'espressione di questa funzione intera di a per mezzo di determinanti. In fatti messo per compendio:

$$
M = \begin{vmatrix}
\alpha & \beta & \gamma & . & \delta & \varepsilon \\
\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & . & \delta_1 & \varepsilon_1 \\
. & . & . & . & . & . \\
\alpha_{r-1} & \beta_{r-1} & \gamma_{r-1} & . & \delta_{r-1} & \varepsilon_{r-1}
\end{vmatrix},
$$

**

segue dal sistema (III)

$$u = \frac{1}{M} \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & . & \delta & \varphi(a) \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & . & \delta_1 & \varphi_1(a) \\ . & . & . & . & . & . \\ \alpha_{r-1} & \beta_{r-1} & \gamma_{r-1} & . & \delta_{r-1} & \varphi_{r-1}(a) \end{vmatrix} .$$

Il valore che risulta per u dall' esposto procedimento, essendo una funzione intera di a, di grado inferiore a quello dell'equazione $F(a)=0$, è necessariamente unico e determinato. Osserveremo intanto che le riduzioni a doversi operare sulle equazioni (II) col mezzo della detta equazione potrebbero benissimo limitarsi ai soli coefficienti di u, lasciando come si trovano i secondi membri; e quindi, seguendo in tutto il resto lo stesso metodo di poc'anzi, si perverrebbe ancora ad esprimere il valore di u come una funzione intera di a. Questa nuova espressione di u, essendo di grado superiore ad $r-1$, è, nella forma, diversa dalla precedente; ma, ridotta al grado conveniente col mezzo della solita divisione per $F(a)$, dovrà coincidere con la stessa espressione di prima.

Se si tratta di trasformare la frazione $\frac{1}{\psi(a)}$, le equazioni ausiliari divengono semplicemente:

$$\begin{aligned} (\alpha a^{r-1} + \beta a^{r-2} + \ldots + \delta a + \varepsilon)u &= 1 \\ (\alpha_1 a^{r-1} + \beta_1 a^{r-2} + \ldots + \delta_1 a + \varepsilon_1)u &= a \\ (\alpha_2 a^{r-1} + \beta_2 a^{r-2} + \ldots + \delta_2 a + \varepsilon_2)u &= a^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\alpha_{r-1} a^{r-1} + \beta_{r-1} a^{r-2} + \ldots + \delta_{r-1} a + \varepsilon_{r-1})u &= a^{r-1} \end{aligned}$$

e quindi si avrebbe:

$$u = \frac{1}{M} \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & . & \delta & 1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & . & \delta_1 & a \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & . & \delta_2 & a^2 \\ . & . & . & . & . & . \\ \alpha_{r-1} & \beta_{r-1} & \gamma_{r-1} & . & \delta_{r-1} & a^{r-1} \end{vmatrix} ,$$

rappresentando M lo stesso determinante considerato più sopra.

Del rimanente bisogna osservare che la trasformazione della frazione $\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}$ può farsi immediatamente dipendere da quella $\frac{1}{\psi(a)}$, tutto riducendosi a moltiplicare per $\varphi(a)$ la trasformata intera equivalente all'ultima frazione.

Per applicare ad un esempio i procedimenti esposti cercheremo l' espressione intera di u equivalente alla frazione:

$$u=\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}=\frac{a^5+3a^4-5a^3+11a^2-2a-1}{a^4+a^3-2a^2+7a-2},$$

nella ipotesi che a debba verificare l'equazione di 3° grado:

$$F(a)=a^3-2a^2+3a-1=0.$$

Dividendo i due termini della frazione per $F(a)$, si hanno i due residui a^2-3a+1 ed a^2-a+1, e la frazione si riduce ad:

$$u=\frac{a^2-3a+1}{a^2-a+1},$$

donde, liberando da' fratti, si ha la prima delle equazioni ausiliari:

$$(a^2-a+1)u=a^2-3a+1.$$

Dovendo farsi sparire dal coefficiente di u le due potenze a^2, ed a, sono necessarie altre due equazioni, le quali si ottengono moltiplicando la prima per a^2, e poi riducendo i due membri con dividerli per $F(a)$. Le tre equazioni ausiliari saranno così le seguenti:

$$\begin{aligned}(a^2-a+1)u &= a^2-3a+1\\ (a^2-2a+1)u &= -a^2-2a+1\\ (-2a+1)u &= -4a^2+4a-1\,;\end{aligned}$$

e più non resta che ad eliminare da' coefficienti di u le due potenze a^2 ed a; il che può farsi in varii modi. Per esempio, eliminando a^2 tra i coefficienti di u delle due prime equazioni, si avrebbe:

$$au=2a^2-a\,;$$

ed ora eliminando a tra i coefficienti di u di questa equazione e della terza, verrà:

$$u=2a-1.$$

Merita di essere avvertito che spesso si può giungere al valore di u,

senza impiegare tutte le equazioni ausiliari. Così nell' esempio attuale potevano bastare le sole due prime; perchè, deducendosi da esse l'equazione $au=2a^2-a$, questa porge senza più il valore di u col dividere i due membri per a. Anzi la terza essa sola poteva essere sufficiente, dappoichè è riducibile alla forma:

$$(2a-1)u=(2a-1)^2,$$

e riproduce il già trovato valore di u, dividendola per $2a-1$.

Se la trasformazione della data frazione volesse farsi dipendere da quella di:

$$v=\frac{1}{\psi(a)}=\frac{1}{a^4+a^3-2a^2+7a-2}=\frac{1}{a^2-a+1},$$

le equazioni ausiliari per la determinazione di v sarebbero:

$$(a^2-a+1)v=1$$
$$(a^2-2a+1)v=a$$
$$(\quad -2a+1)v=a^2\,;$$

quindi, eliminando da' coefficienti di v le potenze a^2 ed a, si troverebbe:

$$v=a^2-2a+2\,;$$

e perciò moltiplicando per a^2-3a+1, verrebbe:

$$u=\frac{a^2-3a+1}{a^2-a+1}=(a^2-3a+1)(a^2-2a+2),$$

vale a dire, effettuando il prodotto:

$$u=a^4-5a^3+9a^2-8a+2\,.$$

Questa espressione di u non coincide con quella trovata più sopra; ma riducendola al debito grado col dividerla per $F(a)$, si ritorna ad $u=2a-1$.

Occorrendo di calcolare le funzioni intere equivalenti alle potenze successive di una frazione della forma $\frac{1}{\psi(a)}$, non è già necessario di trasformare direttamente le sue diverse potenze; ma basta trasformare soltanto la data frazione, e quindi elevare la trasformata alle indicate potenze.

Del rimanente nelle applicazioni è preferibile il seguente procedimento. Trovata la trasformata di $\frac{1}{\psi(a)}$, si eleverà a quadrato e si avrà quella di $\frac{1}{\psi(a)^2}$; indi si moltiplicherà questa trasformata per quella di $\frac{1}{\psi(a)}$, e si avrà la trasformata di $\frac{1}{\psi(a)^3}$; di nuovo, moltiplicando quest'ultima sempre per la trasformata di $\frac{1}{\psi(a)}$, si avrà quella di $\frac{1}{\psi(a)^4}$; e così continuando si otterranno le trasformate delle potenze di gradi più alti.

V'ha de'casi in cui riesce agevole di porre in evidenza la legge ond'è composta la trasformata di qualunque potenza di una data frazione. Nel n° 36 è occorso di trasformare la frazione $\frac{1}{\mu_1+\mu_2 a}$, nella ipotesi che a fosse radice dell'equazione:

$$\mu_0+2\mu_1 a+\mu_2 a^2=0 .$$

Si è ivi osservato che a questa equazione si può dar la forma:

$$\text{(IV)} \qquad (\mu_1+\mu_2 a)^2=\text{M} ,$$

ov'è messo per compendio:

$$\text{M}=\mu_1^2-\mu_0\mu_2 ;$$

quindi risulta:

$$\text{(V)} \qquad \frac{1}{\mu_1+\mu_2 a}=\frac{1}{\text{M}}(\mu_1+\mu_2 a) ,$$

e nel secondo membro si ha la trasformata intera della frazione proposta. È ora facilissima cosa di ottenere la trasformata di qualsivoglia potenza della stessa frazione. In effetti sia r un numero qualunque intero e positivo; si avrà dalla (IV):

$$(\mu_1+\mu_2 a)^{2r}=\text{M}^r ;$$

ed in seguito:

$$\text{(VI)} \qquad \frac{1}{(\mu_1+\mu_2 a)^{2r}}=\frac{1}{\text{M}^r} .$$

Inoltre, moltiplicando tra loro le equazioni (V) e (VI), membro a membro, risulta:

$$\text{(VII)} \qquad \frac{1}{(\mu_1+\mu_2 a)^{2r+1}}=\frac{1}{\text{M}^{r+1}}(\mu_1+\mu_2 a) ;$$

e quindi si vede che la trasformata intera di qualsivoglia potenza della

frazione $\frac{1}{\mu_1+\mu_2 a}$ è data dall'una o dall'altra delle formole (VI) e (VII).

Vogliamo da ultimo far osservare che la trasformazione della frazione $\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}$ potrebbe essere operata applicando il procedimento del massimo comun divisore ai polinomii $\psi(a)$ ed $F(a)$, come può vedersi nell'algebra del SERRET nel luogo citato in nota a piè di pagina al n° 22. Noi però non crediamo di dover insistere su questo metodo, essendo assai poco opportuno pel calcolo numerico.

NOTA II.

Sulle somme delle potenze simili delle radici delle equazioni.

Sarebbe quasi superfluo di arrestarci sulle somme delle potenze simili delle radici delle equazioni algebriche; nulla essendo più comune della loro teoria e delle loro proprietà; ma siccome si tratta di elementi essenziali nelle ricerche di cui ci siamo occupati, crediamo opportuno di richiamare qualcuna delle formole o de' metodi per ottenere i loro valori numerici. E dapprima, posta l'equazione di grado m:

$$F(x)=x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m=0 ,$$

nella quale il primo termine ha per coefficiente l'unità, rammenteremo che il valore di s_r può essere direttamente calcolato col mezzo della nota formola di WARING:

$$s_r=r\sum(-1)^\varepsilon\Pi(\varepsilon-1)\frac{a_1^{\varepsilon_1}a_2^{\varepsilon_2}\ldots a_m^{\varepsilon_m}}{\Pi\varepsilon_1\Pi\varepsilon_2\ldots\Pi\varepsilon_m} ,$$

dove la somma figurata dal $\sum$ deve estendersi ai sistemi di valori intèri e positivi (incluso il zero), che verificano l'equazione indeterminata:

$$\varepsilon_1+2\varepsilon_2+3\varepsilon_3+\ldots+m\varepsilon_m=r ;$$

e dove è messo per compendio:

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots+\varepsilon_m=\varepsilon .$$

Questa formola è inconcludente nel caso di $r=0$; ma si sa che in questa ipotesi si ha $s_0=m$.

Il valore di s_r può ancora farsi dipendere dalle somme di gradi inferiori ad r; a qual'effetto si hanno in pronto le formole ben conosciute di NEWTON:

$$s_1+a_1=0$$
$$s_2+a_1s_1+2a_2=0$$
$$s_3+a_1s_2+a_2s_1+3a_3=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$s_m+a_1s_{m-1}+a_2s_{m-2}+\ldots+a_{m-1}s_1+ma_m=0$$

e per qualunque valore di r maggiore di m:

$$s_r+a_1s_{r-1}+a_2s_{r-2}+\ldots+a_{m-1}s_{r-m-1}+a_ms_{r-m}=0\ .$$

Si sa del resto che i valori di s_0, s_1, s_2, etc. sono i coefficienti dello sviluppo discendente della frazione:

$$\frac{F'(x)}{F(x)}=\frac{mx^{m-1}+(m-1)a_1x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}}{x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m}=\frac{s_0}{x}+\frac{s_1}{x^2}+\frac{s_2}{x^3}+\ldots+\frac{s_r}{x^{r+1}}+\ldots$$

sviluppo che può ottenersi mediante la divisione ordinaria. Questa formola intanto, mutandovi la x in $\frac{1}{x}$, e poi dividendo i due membri per x, diviene:

$$\frac{F'\left(\frac{1}{x}\right)}{xF\left(\frac{1}{x}\right)}=\frac{m+(m-1)a_1x+\ldots+a_{m-1}x^{m-1}}{1+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_mx^m}=s_0+s_1x+s_2x^2+\ldots+s_rx^r+\ldots$$

quindi si vede che i valori delle somme s_0, s_1, s_2, etc: sono i coefficienti dello sviluppo ascendente della frazione $\dfrac{F'\left(\frac{1}{x}\right)}{xF\left(\frac{1}{x}\right)}$; e si ha per tal modo un metodo comodissimo per calcolare le dette somme col mezzo della divisione.

Ma per lo stesso oggetto troviamo indicato dal chiarissimo Professore BELLAVITIS un procedimento molto più semplice e rapido: procedimento immediatamente dichiarato dalle formole di NEWTON. Supponiamo che si tratti di calcolare le somme delle potenze simili delle radici dell'e-

quazione di 5° grado scritta nella parte superiore del quadro seguente:

$$x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 4x - 2 = 0$$

$s_1 = 3$	-3				
$s_2 = 5$	-9	4			
$s_3 = -6$	-15	6	15		
$s_4 = -27$	18	10	15	-16	
$s_5 = -72$	81	-12	25	-12	-10
$s_6 = -106$	216	-54	-30	-20	-6
$s_7 = -53$	318	-144	-135	24	-10
$s_8 = 293$	159	-212	-360	108	12
etc:	etc:		etc:		etc:

Si comincerà dal moltiplicare ordinatamente i coefficienti dell'equazione, da quello del 2° termine, pe'numeri successivi 1, 2, 3, 4, etc:, ed i prodotti si scriveranno in altrettante righe orizzontali, ma per modo da procedere diagonalmente, scendendo da sinistra verso la dritta; e così nell'esempio si hanno i numeri $-3, 4, 15, -16, -10$, che sono gli ultimi a dritta delle prime cinque righe orizzontali. Fissati questi numeri, ecco come si trovano i valori di s_1, s_2, s_3, etc. Nella prima riga orizzontale, a sinistra del numero che già vi si trova scritto, si ripeterà lo stesso numero, ma col segno contrario, e si ha così $+3$, valore di s_1. Indi si moltiplicherà questo valore di s_1 pe' coefficienti dell'equazione, sempre a cominciare da quello del secondo termine, ed i prodotti si andranno situando per ordine nelle linee seguenti, immediatamente al di sotto dei primi numeri segnati nel quadro, in guisa da procedersi sempre diagonalmente da sinistra a dritta. Per tal modo la seconda riga è completata co' due numeri -9 e 4; la somma algebrica di questi due numeri, presa col segno contrario, darà $+5$ per valore di s_2. Operando con questo valore di s_2 come si è fatto con quelle di s_1, la terza riga si troverà completata co' tre numeri -15, 6, 15, e la loro somma algebrica, presa sempre col segno contrario, darà $+6$ per valore di s_3. Nella stessa maniera si passerà ai valori di s_4, s_5, etc.; ed è manifesto che in tal guisa si ha un metodo semplice e rapidissimo pel calcolo delle quantità s_r.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA
DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SULLE FORME GEOMETRICHE DI SECONDA SPECIE

MEMORIA

DEL SOCIO ORDINARIO G. BATTAGLINI

letta nella tornata del dì 2 maggio 1865.

In una Nota *sulle forme geometriche di 2ª specie* (sistemi di rette e di piani concorrenti in un punto, di rette e di punti giacenti in un piano inserita nel *Rendiconto* dell'Accademia, Febbrajo 1865, sono state stabilite le relazioni metriche fondamentali di quelle forme, sostituendo al sistema di rette e di piani concorrenti in un punto il sistema di punti e di archi di circoli massimi che esso determina sopra una superficie sferica che ha per centro quel punto, e deducendone le relazioni corrispondenti ai sistemi di rette e di punti giacenti in un piano, col supporre il centro di quella superficie sferica all'infinito. Fondandoci sulle formole indicate nella suddetta Nota, ci proponiamo di discutere in questa Memoria la dipendenza *equianarmonica* tra le forme geometriche di 2ª specie, dipendenza cioè nella quale *ad ogni punto e ad ogni arco in uno dei sistemi corrisponde un punto ed un arco, o viceversa un arco ed un punto nell'altro sistema.*

Distingueremo i sistemi in *omografici ed eterografici*, secondo che i loro elementi corrispondenti nella dipendenza equianarmonica sono della stessa, o di diversa natura: indicando sempre i punti dei sistemi con lettere minuscole, e gli archi con lettere maiuscole, dalle formole e dagli enunciati delle proprietà per i sistemi omografici, con soli cambiamenti nella grandezza delle lettere, e col mutare tra loro le parole *punto* ed *arco*, si potranno dedurre le formole e gli enunciati per i sistemi eterografici.

1. Siano (s_1, S_1) ed (s', S') due sistemi (omografici) in dipendenza equia-

narmonica; $(abc, ABC)_1$ ed $(abc, ABC)'$ due terne omologhe; e, f, g punti appartenenti rispettivamente agli archi A, B, C, ed E, F, G archi condotti rispettivamente per i punti a, b, c; infine dinotino u, v, w, U, V, W quantità costanti; si avranno le relazioni

$$(1)\quad \begin{aligned} &\frac{\operatorname{sen} b_1 e_1}{\operatorname{sen} e_1 c_1} : \frac{\operatorname{sen} b'e'}{\operatorname{sen} e'c'} = u\,, \quad \frac{\operatorname{sen} c_1 f_1}{\operatorname{sen} f_1 a_1} : \frac{\operatorname{sen} c'f'}{\operatorname{sen} f'a'} = v\,, \quad \frac{\operatorname{sen} a_1 g_1}{\operatorname{sen} g_1 b_1} : \frac{\operatorname{sen} a'g'}{\operatorname{sen} g'b'} = w\,. \\ &\frac{\operatorname{sen} B_1 E_1}{\operatorname{sen} E_1 C_1} : \frac{\operatorname{sen} B'E'}{\operatorname{sen} E'C'} = U\,, \quad \frac{\operatorname{sen} C_1 F_1}{\operatorname{sen} F_1 A_1} : \frac{\operatorname{sen} C'F'}{\operatorname{sen} F'A'} = V\,, \quad \frac{\operatorname{sen} A_1 G_1}{\operatorname{sen} G_1 B_1} : \frac{\operatorname{sen} A'G'}{\operatorname{sen} G'B'} = W\,, \end{aligned}$$

ed osservando che supposto il triplo rapporto

$$(efg\,, abc)_1 = \pm 1\,, \qquad \text{o pure} \qquad (EFG\,, ABC)_1 = \pm 1\,,$$

deve essere ancora

$$(efg\,, abc)' = \pm 1\,, \qquad \text{o pure} \qquad (EFG\,, ABC)' = \pm 1\,,$$

sarà $uvw = UVW = 1$, e quindi in generale si avrà

$$(2)\qquad (efg\,, abc)_1 = (efg\,, abc)'\,, \qquad (EFG\,, ABC)_1 = (EFG\,, ABC)'\,,$$

adunque *nei sistemi di 2ª specie in dipendenza equianarmonica, il triplo rapporto fra due terne di elementi in uno dei due sistemi è eguale al triplo rapporto fra le terne omologhe nell'altro.*

Se m, n sono due punti qualunque ed M, N due archi qualunque sarà

$$(3)\quad \begin{aligned} &(mn,bc)_1 = (mn,bc)'\,, \ (mn,ca)_1 = (mn,ca)'\,, \ (mn,ab)_1 = (mn,ab)'\,, \\ &(MN,BC)_1 = (MN,BC)'\,, (MN,CA)_1 = (MN,CA)'\,, (MN,AB)_1 = (MN,AB)'\,, \end{aligned}$$

e se (m, n), (p, q) sono due coppie di punti appartenenti ad un arco Ω, ed (M, N), (P, Q) due coppie di archi condotti per un punto ω, sarà

$$(4)\qquad (mn\,, pq)_1 = (mn\,, pq)'\,, \qquad (MN\,, PQ)_1 = (MN\,, PQ)'\,;$$

per queste eguaglianze tra rapporti anarmonici i due sistemi (s_1, S_1) ed (s', S') sono detti in dipendenza equianarmonica.

Poniamo per brevità di scrittura

$$\frac{\operatorname{sen}\omega A}{\operatorname{sen} aA} = x\,, \ \frac{\operatorname{sen}\omega B}{\operatorname{sen} bB} = y\,, \ \frac{\operatorname{sen}\omega C}{\operatorname{sen} cC} = z\,,$$

$$\frac{\operatorname{sen}\Omega a}{\operatorname{sen} Aa} = X, \ \frac{\operatorname{sen}\Omega b}{\operatorname{sen} Bb} = Y, \ \frac{\operatorname{sen}\Omega c}{\operatorname{sen} Cc} = Z\,,$$

e siano ancora u, v, w, U, V, W, quantità costanti; l'equazioni (1) daranno

$$(5)\quad \begin{aligned} &x_1 : y_1 : z_1 :: u'x' : v'y' : w'z' , \quad x' : y' : z' :: u_1x_1 : v_1y_1 : w_1z_1 \\ &X_1 : Y_1 : Z_1 :: U'X' : V'Y' : W'Z' , \quad X' : Y' : Z' :: U_1X_1 : V_1Y_1 : W_1Z_1 \end{aligned}$$

ed osservando che, supposto il punto ∞ appartenere all'arco Ω, si ha la condizione

$$xX sen\, aA + yY sen\, bB + zZ sen\, cC = 0 ,$$

si troveranno tra le costanti le relazioni

$$(6)\quad \begin{aligned} &u_1u' = v_1v' = w_1w' , \qquad U_1U' = V_1V' = W_1W' , \\ &\frac{u_1 sen\, b_1c_1}{U' sen\, B'C'} = \frac{v_1 sen\, c_1a_1}{V' sen\, C'A'} = \frac{w_1 sen\, a_1b_1}{W' sen\, A'B'} , \\ &\frac{U_1 sen\, B_1C_1}{u' sen\, b'c'} = \frac{V_1 sen\, C_1A_1}{v' sen\, c'a'} = \frac{W_1 sen\, A_1B_1}{w' sen\, a'b'} . \end{aligned}$$

Risulta dalla forma dell'equazioni (5) che ad un sistema di punti, o di archi, di un certo ordine, appartenente ad (s_1, S_1) corrisponderà in (s', S') un sistema di punti o di archi del medesimo ordine; se dunque in uno dei sistemi, dipendenti tra loro per mezzo delle relazioni (5), più punti appartengono ad uno stesso arco, o più archi passano per uno stesso punto, avverrà lo stesso per i punti e gli archi corrispondenti dell'altro sistema; così resta dimostrata la possibilità della costruzione dei sistemi in dipendenza equianarmonica, ammessa sin quì ipoteticamente.

Essendo date quattro coppie arbitrarie di punti o di archi omologhi, la dipendenza equianarmonica fra i due sistemi è del tutto determinata, purchè tre dei punti dati non appartengano ad uno stesso arco, o pure tre degli archi dati non concorrano in uno stesso punto; ogni altra coppia di elementi omologhi si costruirà facilmente con la considerazione che due gruppi omologhi di quattro punti, appartenenti in ciascun sistema ad un medesimo arco, e due gruppi omologhi di quattro archi, condotti in ciascun sistema per un medesimo punto, sono tra loro equianarmonici.

2. Indicando con (i_1, I_1) ed (j', J') i sistemi di 2° ordine immaginarii all'infinito di (s_1, S_1) e di (s', S'), siano rispettivamente (i', I') ed (j_1, J_1) i sistemi omologhi di (i_1, I_1) e di (j', J') in (s', S') ed in (s_1, S_1); la terna coniugata comune rispetto ad (i_1, j_1), o ciò che torna lo stesso rispetto

*

ad (I_1, J_1), sarà reale ed ortogonale al pari di quella che è coniugata comune rispetto ad (i', j') o pure (I', J') e tali terne saranno omologhe tra loro; adunque *in due sistemi di 2ª specie in dipendenza equianarmonica vi sono sempre due terne omologhe ortogonali*. Queste terne si diranno le terne *principali omologhe*, e si diranno rispettivamente i loro punti ed i loro archi i *centri* e gli *assi* dei sistemi.

In ciò che segue supporremo per semplicità che la posizione di un punto ω_1 o di un arco Ω_1 di (s_1, S_1) sia riferita ad una terna $(abc, ABC)_1$ che ha per omologa in (s', S') una terna ortogonale, e similmente la posizione di un punto ω' o di un arco Ω' di (s', S') sia riferita ad una terna $(abc, ABC)'$ che ha per omologa in (s_1, S_1) un'altra terna ortogonale: si avrà allora

$$i_1 = (x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos bc + 2zx\cos ca + 2xy\cos ab)_1 = 0 ,$$

$$j_1 = (u^2x^2 + v^2y^2 + w^2z^2)_1 = 0 ,$$

$$j' = (x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos bc + 2zx\cos ca + 2xy\cos ab)' = 0 ,$$

$$i' = (u^2x^2 + v^2y^2 + w^2z^2)' = 0 ,$$

ed indicando con r un'incognita, per determinare i centri dei sistemi si avranno le equazioni

$$\begin{aligned} &x(1-ru^2) + y\cos ab + z\cos ac = 0 , \\ &x\cos ba + y(1-rv^2) + z\cos bc = 0 , \\ &x\cos ca + y\cos cb + z(1-rw^2) = 0 , \end{aligned} \tag{1}$$

nelle quali (come anche nelle seguenti) si porrà a tutte le lettere l'indice o l'apice, secondo che si tratti del primo o del secondo sistema.

Ponendo per brevità

$$\begin{aligned} l &= \cos ab\cos ac - (1-ru^2)\cos bc , & e &= (1-rv^2)(1-rw^2) - \cos^2 bc , \\ m &= \cos bc\cos ba - (1-rv^2)\cos ca , & f &= (1-rw^2)(1-ru^2) - \cos^2 ca , \\ n &= \cos ca\cos cb - (1-rw^2)\cos ab , & g &= (1-ru^2)(1-rv^2) - \cos^2 ab , \end{aligned}$$

l'equazioni (1) daranno le relazioni

$$ey - nx = 0 ,\ ez - mx = 0 ;\ fz - ly = 0 ,\ fx - ny = 0 ;\ gx - mz = 0 ,\ gy - lz = 0 ,$$

$$l^2 = fg ,\ m^2 = ge ,\ n^2 = ef ;\ lmn = efg ;\ le = mn ,\ mf = nl ,\ ng = lm ,$$

$$lx = my = nz , \tag{2}$$

$$\frac{\cos ab\cos ac}{l} + \frac{\cos bc\cos ba}{m} + \frac{\cos ca\cos cb}{n} = 1 . \tag{3}$$

L'equazione (3) che determina r si ottiene immediatamente da (1) espressa col determinante

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} 1-ru^2, & \cos ab, & \cos ac \\ \cos ba, & 1-rv^2, & \cos bc \\ \cos ca, & \cos cb, & 1-rw^2 \end{vmatrix} =$$

$$(1-ru^2)(1-rv^2)(1-rw^2)-\cos^2 bc(1-ru^2)-\cos^2 ca(1-rv^2)-\cos^2 ab(1-rw^2)$$
$$+2\cos bc\cos ca\cos ab=0:$$

per ciascuna radice di questa equazione, le equazioni (2) determineranno un centro del sistema.

L'equazione (3), che è di 3° grado, ha tutte e tre le radici reali, e supponendo che al variare di r da $-\infty$ a $+\infty$ s'incontrino successivamente i valori

$$\alpha=\frac{\operatorname{sen} ab \operatorname{sen} ac \cos BC}{u^2\cos bc},\quad \beta=\frac{\operatorname{sen} bc \operatorname{sen} ba \cos CA}{v^2\cos ca},\quad \gamma=\frac{\operatorname{sen} ca \operatorname{sen} cb \cos AB}{w^2\cos ab}$$

quelle radici saranno comprese rispettivamente negl'intervalli (β,γ), (γ,α), (α,β).

Allorchè $\alpha=\beta=\gamma=\rho$ due valori di r sono eguali a ρ, ed i valori di x, y, z, corrispondenti a questa radice doppia di (3) saranno legati dalla sola equazione

$$(4)\qquad \frac{x}{\cos bc}+\frac{y}{\cos ca}+\frac{z}{\cos ab}=0\,;$$

il tal caso tutt'i punti dell'arco Ω rappresentato dall'equazione (4) sono centri del sistema: (s_1, S_1) ed (s', S') si diranno allora in dipendenza equianarmonica *circolare*.

La terza radice di (3), alla quale corrisponde il polo ϖ di Ω, sarà poi data dall'equazione

$$r=\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}+\frac{1}{w^2}-2\rho\,.$$

Finalmente allorchè si hanno le condizioni

$$\cos bc=\cos ca=\cos ab=0\,,\qquad u^2=v^2=w^2=\frac{1}{\rho}\,,$$

l'equazione (3) ha tutte e tre le radici eguali a ρ, ed ogni punto può considerarsi come centro del sistema; (s_1, S_1) ed (s', S') sono allora sistemi *eguali*.

Allorchè si conosce uno dei centri, per esempio c, per determinare gli altri due si supporrà $\cos ac = \cos bc = 0$; si avranno così le relazioni

$$(5) \qquad x(1-ru^2)+y\cos ab=0\,, \quad x\cos ba+y(1-rv^2)=0\,, \quad z=0\,,$$

i valori di r essendo dati dall'equazione

$$(6) \qquad (1-ru^2)(1-rv^2)-\cos^2 ab=0\,.$$

Se invece dei centri dei sistemi si volessero determinare i loro assi, basterebbe cambiare in tutte le formole precedenti le lettere minuscole nelle maiuscole.

3. Considerando le coppie di punti omologhi appartenenti a due archi omologhi Ω_1, Ω', tra esse ve ne saranno due (m_1, m'), (n_1, n') tali che le coppie (m_1, n_1), (m', n') siano *principali*, vale a dire tali che gli archi m_1n_1, $m'n'$ siano quadranti; m ed n saranno i punti coniugati armonici rispetto alle due coppie (immaginarie) dei punti d'intersezione di Ω con i e j, ovvero saranno i punti doppii dell'involuzione simmetrica costituita dalle coppie dei punti d'intersezione di Ω con i sistemi di 2° ordine circoscritti al quadrangolo θ, che ha per vertici i punti comuni ad i e j. Se Ω coincide con uno dei lati di θ, la coppia principale (m, n) risulterà indeterminata.

Diremo *archi ciclici* di (s, S) le coppie dei lati opposti di θ, ed *omociclici* con (s, S) i sistemi di 2° ordine circoscritti a θ; si avrà dunque la proprietà: *In due sistemi di 2ª specie, in dipendenza equianarmonica, le coppie principali omologhe di punti, appartenenti a due archi omologhi, sono costituite dai punti che bisegano, internamente ed esternamente, le parti di quegli archi comprese fra due archi ciclici, ovvero sono costituite dai punti doppii delle involuzioni simmetriche determinate dalle coppie dei punti d'intersezione di quegli archi omologhi con i sistemi di 2° ordine omociclici con i sistemi equianarmonici proposti; se poi gli archi omologhi che si considerano coincidono con due archi ciclici, le coppie principali omologhe, corrispondenti ad essi, sono indeterminate, ovvero due coppie omologhe qualunque di punti, appartenenti a quei due archi ciclici omologhi, comprendono tra loro angoli eguali.*

Similmente considerando le coppie di archi omologhi condotti per due punti omologhi ω_1, ω', tra esse ve ne saranno due (M_1, M'), (N_1, N') tali che le coppie (M_1, N_1), (M', N') siano *principali*, vale a dire tali che gli angoli M_1N_1, $M'N'$ siano retti; M, N saranno gli archi coniugati armonici rispetto alle due coppie (immaginarie) degli archi condotti da ω tangenti ad I ed J, ovvero saranno gli archi doppii dell'involuzione simme-

trica costituita dalle coppie degli archi condotti da ϖ tangenti ai sistemi di 2° ordine inscritti nel quadrilatero Θ, che ha per lati gli archi tangenti comuni di I ed J. Se ϖ coincide con uno dei vertici di Θ, la coppia principale (M, N) risulterà indeterminata.

Diremo *punti focali* di (s, S) le coppie dei vertici opposti di Θ, ed *omofocali* con (s, S) i sistemi di 2° ordine inscritti in Θ; si avrà dunque la proprietà: *In due sistemi di seconda specie, in dipendenza equianarmonica, le coppie principali omologhe di archi, condotti per due punti omologhi, sono costituite dagli archi che bisegano, internamente ed esternamente, gli angoli (sferici) sotto i quali da quei punti appariscono due punti focali, ovvero sono costituite dagli archi doppii delle involuzioni simmetriche determinate dalle coppie degli archi condotti da quei punti omologhi, tangenti ai sistemi di 2° ordine omofocali con i sistemi equianarmonici proposti; se poi i punti omologhi che si considerano coincidono con due punti focali, le coppie principali omologhe, corrispondenti ad essi, sono indeterminate, ovvero due coppie omologhe qualunque di archi, condotti per quei due punti focali omologhi, comprendono tra loro angoli eguali.*

Essendo ϖ_1 ed ϖ' due punti omologhi qualunque, Ω_1 ed Ω' gli archi che hanno per poli quei punti, O' ed O_1 gli archi omologhi di Ω_1 ed Ω', saranno $\Omega_1 O_1$, ed $O'\Omega'$ punti omologhi che con ϖ_1 ed ϖ' formano due coppie principali omologhe di punti. Similmente essendo Ω_1 ed Ω' due archi omologhi qualunque, ϖ_1 ed ϖ' i loro poli, o' ed o_1 i punti omologhi di ϖ_1 ed ϖ', saranno $\varpi_1 o_1$ ed $o'\varpi'$ archi omologhi che con Ω_1 ed Ω' formano due coppie principali omologhe di archi.

4. Supponiamo che $(abc, ABC)_1$ ed $(abc, ABC)'$ siano le terne principali omologhe dei due sistemi (s_1, S_1) ed (s', S') si avrà

$$
(1)\quad
\begin{aligned}
&i_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 0 & &I_1 = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 = 0\,,\\
&i' = u'^2 x'^2 + v'^2 y'^2 + w'^2 z'^2 = 0\,, & &I' = U'^2 X'^2 + V'^2 Y'^2 + W'^2 Z'^2 = 0\,,\\
&j_1 = u_1^2 x_1^2 + v_1^2 y_1^2 + w_1^2 z_1^2 = 0\,, & &J_1 = U_1^2 X_1^2 + V_1^2 Y_1^2 + W_1^2 Z_1^2 = 0\,,\\
&j' = x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0\,, & &J' = X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = 0\,,\\
&u_1 u' = v_1 v' = w_1 w'\,, & &U_1 U' = V_1 V' = W_1 W'\,,\\
&\frac{u_1}{U'} = \frac{v_1}{V'} = \frac{w_1}{W'}\,, & &\frac{U_1}{u'} = \frac{V_1}{v'} = \frac{W_1}{w'}\,.
\end{aligned}
$$

I vertici del quadrangolo θ saranno determinati dall'equazioni

$$\frac{x^2}{v^2 - w^2} = \frac{y^2}{w^2 - u^2} = \frac{z^2}{u^2 - v^2}\,,$$

e le coppie degli archi ciclici saranno rispettivamente rappresentate dall'equazioni

$$(2)\qquad \frac{y^2}{w^2-u^2}=\frac{z^2}{u^2-v^2}\,;\qquad \frac{z^2}{u^2-v^2}=\frac{x^2}{v^2-w^2}\,;\qquad \frac{x^2}{v^2-w^2}=\frac{y^2}{w^2-u^2}\,,$$

sicchè una sola di queste coppie sarà reale, e le altre due saranno immaginarie.

Similmente i lati del quadrilatero Θ saranno determinati dall'equazioni

$$\frac{X^2}{V^2-W^2}=\frac{Y^2}{W^2-U^2}=\frac{Z^2}{U^2-V^2}\,,$$

e le coppie dei punti focali saranno rispettivamente rappresentate dall'equazioni

$$(3)\qquad \frac{Y^2}{W^2-U^2}=\frac{Z^2}{U^2-V^2}\,;\qquad \frac{Z^2}{U^2-V^2}=\frac{X^2}{V^2-W^2}\,;\qquad \frac{X^2}{V^2-W^2}=\frac{Y^2}{W^2-U^2}\,,$$

laonde una sola di tali coppie sarà reale, e le altre due saranno immaginarie.

Indicando con α,β,γ tre costanti, la dipendenza tra i sistemi (s_1,S_1) ed (s',S'), riferiti alle loro terne principali omologhe, sarà espressa per mezzo delle relazioni

$$(4)\qquad \frac{sen\,\omega_1 A_1}{sen\,\omega' A'}:\frac{sen\,\omega_1 B_1}{sen\,\omega' B'}:\frac{sen\,\omega_1 C_1}{sen\,\omega_1 C_1}::\alpha:\beta:\gamma::\frac{sen\,\Omega' a'}{sen\,\Omega_1 a_1}:\frac{sen\,\Omega' b'}{sen\,\Omega_1 b_1}:\frac{sen\,\Omega' c'}{sen\,\Omega_1 c_1}\,.$$

Se il valore di γ è compreso tra quelli di α e β gli archi ciclici reali passeranno per c, ed indicandoli con H e K, essi saranno dati dall' una o l' altra dell' equazioni

$$(5)\qquad \begin{aligned} &tan\,A_1H_1=tan\,K_1A_1=\sqrt{\frac{\beta^2-\gamma^2}{\gamma^2-\alpha^2}}\,,\qquad tan\,B_1K_1=tan\,H_1B_1=\sqrt{\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\beta^2-\gamma^2}}\,,\\ &tan\,A'H'=tan\,K'A'=\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{\frac{\beta^2-\gamma^2}{\gamma^2-\alpha^2}}\,,\qquad tan\,B'K'=tan\,H'B'=\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\beta^2-\gamma^2}}\,,\end{aligned}$$

i punti focali reali apparterranno a C, ed indicandoli con h e k, essi saranno dati dall'una o l' altra dell'equazioni

$$(6)\qquad \begin{aligned} &tan\,a_1h_1=tan\,k_1a_1=\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{\frac{\beta^2-\gamma^2}{\gamma^2-\chi^2}}\,,\qquad tan\,b_1k_1=tan\,h_1b_1=\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\beta^2-\gamma^2}}\,,\\ &tan\,a'h'=tan\,k'a'=\sqrt{\frac{\beta^2-\gamma^2}{\gamma^2-\alpha^2}}\,,\qquad tan\,b'k'=tan\,h'b'=\sqrt{\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\beta^2-\gamma^2}}\,.\end{aligned}$$

Se $\alpha\beta = \gamma^2$, l'angolo compreso fra i due archi ciclici reali, ed anche l'arco compreso fra i due punti focali reali, avrà la stessa grandezza nell'uno e nell'altro sistema.

Allorchè si conoscono le coppie di archi ciclici (H_1, H'), e (K_1, K') una coppia di archi omologhi (Ω_1, Ω') si costruisce facilmente, osservando che i due lati della terna $H_1K_1\Omega_1$ che comprendono l'angolo H_1K_1 sono eguali ai due lati della terna $H'K'\Omega'$ che comprendono l'angolo $H'K'$. Similmente conoscendo le coppie di punti focali (h_1, h') e (k_1, k'), una coppia di punti omologhi (ω_1, ω') si costruisce osservando che i due angoli della terna $h_1k_1\omega_1$ adiacenti al lato h_1k_1 sono eguali ai due angoli della terna $h'k'\omega'$ adiacenti al lato $h'k'$.

Siano ω_1 ed ω' punti omologhi appartenenti agli archi Ω_1 ed Ω'; tra gli archi omologhi condotti per quei punti, siccome è noto, ve ne saranno due P_1, P' per i quali gli angoli Ω_1P_1 ed $\Omega'P'$ sono eguali e diretti per lo stesso verso, e due altri Q_1, Q' per i quali gli angoli Ω_1Q_1 ed $\Omega'Q'$ sono eguali e diretti per verso contrario; per una simile ragione a ciascuna coppia degli archi (Ω_1, Ω'), (P_1, P'), (Q_1, Q') apparterrà rispettivamente una coppia di punti (o_1, o'), (p_1, p'), (q_1, q') tali che gli archi ω_1o_1 ed $\omega'o'$, ω_1p_1 ed $\omega'p'$, ω_1q_1 ed $\omega'q'$ siano rispettivamente eguali e diretti per lo stesso verso, ed un'altra coppia di punti (che indicheremo con le stesse lettere o, p, q) tali che gli archi ω_1o_1 ed $\omega'o'$, ω_1p_1 ed $\omega'p'$, ω_1q_1 ed $\omega'q'$ siano eguali e diretti in verso contrario; adunque *in due sistemi di 2ª specie in dipendenza equianarmonica, a partire da due punti omologhi* (ω_1, ω') *e da due archi omologhi* (Ω_1, Ω') *condotti per essi, si possono costruire (in due modi) due terne omologhe* $(\omega_1o_1p_1, \omega'o'p')$ *eguali e dirette per lo stesso verso, e due altre terne omologhe (anche in due modi)* $(\omega_1o_1q_1, \omega'o'q')$ *eguali e dirette in verso contrario.* Queste terne si diranno le *terne eguali* dei due sistemi, *corrispondenti* ai punti (ω_1, ω') ed agli archi (Ω_1, Ω').

Osservazione. Allorchè i sistemi in dipendenza equianarmonica sono eterografici, al quadrangolo θ, al quadrilatero Θ, ai centri, agli assi, agli archi ciclici, ai punti focali, ed ai sistemi di 2° ordine di punti e di archi omociclici o omofocali in uno dei sistemi proposti, corrisponderanno rispettivamente il quadrilatero Θ, il quadrangolo θ, gli assi, i centri, i punti focali, gli archi ciclici, ed i sistemi di 2° ordine di archi e di punti omofocali o omociclici nell'altro sistema; i due sistemi ammetteranno ancora terne eguali corrispondenti a coppie di elementi omologhi (ω_1, Ω') (Ω_1, ω').

5. In generale i due sistemi (s_1, S_1) ed (s', S') hanno una sola coppia di

terne principali omologhe; se nelle formole (1) del numero precedente si suppongano però eguali tra loro, per ciascun sistema, due tra le costanti u^2, v^2, w^2, del pari che le corrispondenti tra U^2, V^2, W^2, vi saranno infinite terne principali omologhe, le quali avranno tutte un punto ed un arco di comune, in tal caso due coppie di archi ciclici coincideranno in un medesimo arco, e due coppie di punti focali coincideranno in un medesimo punto: supponendo per esempio $u_1^2=v_1^2$ e quindi $u'^2=v'^2$, sarà anche $U_1^2=V_1^2$ ed $U'^2=V'^2$; le terne principali omologhe avranno di comune c_1 e C_1 in (s_1, S_1), c' e C' in (s', S'), e saranno gli archi ciclici coincidenti, ed i punti focali coincidenti, rappresentati rispettivamente da $z=0$ e da $Z=0$; la terza coppia (immaginaria) di archi ciclici, o pure la terza coppia (immaginaria) di punti focali essendo rappresentata da $x:y=\pm\sqrt{-1}$, o pure da $X:Y=\pm\sqrt{-1}$, essa coinciderà con la coppia degli archi immaginarii all'infinito corrispondenti al punto c, o pure con la coppia dei punti immaginarii all'infinito corrispondenti all'arco C. I punti omologhi ω_1, ω' percorreranno poi C_1, C' e gli archi omologhi Ω_1, Ω' gireranno intorno a c_1 e c', per lo stesso verso, o in verso contrario, secondo che nell'equazioni $u_1=\pm v_1$, $u'=\pm v'$, $U_1=\pm V_1$, $U'=\pm V'$ si prendano i segni superiori, o pure i segni inferiori; questo è il caso della dipendenza equianarmonica *circolare*.

Allorchè si hanno le condizioni

$$u_1^2=v_1^2=w_1^2\,,\quad u'^2=v'^2=w'^2,\quad U_1^2=V_1^2=W_1^2\,,\quad U'^2=V'^2=W'^2,$$

(una qualunque delle quali dà per conseguenza le altre tre) le terne principali omologhe, gli archi ciclici, ed i punti focali sono del tutto indeterminati; due terne omologhe qualunque saranno eguali, e saranno dirette per lo stesso verso, o per verso contrario secondo che nell'equazioni

$$u_1=v_1=\pm w_1\,,\quad u'=v'=\pm w',\quad U_1=V_1=\pm W_1\,,\quad U'=V'=\pm W'$$

si prendano i segni superiori o pure i segni inferiori; questo è il caso dell'eguaglianza dei sistemi, sia essa di *sopraposizione* o pure di *simmetria*.

Se il primo o pure il secondo dei due sistemi (s_1, S_1) (s', S') si riduce ad un sistema di punti e di rette giacenti in un piano, per questo sistema i o pure j sarà la retta (doppia) all'infinito, ed I o J sarà la coppia dei punti ciclici immaginarii all'infinito di quel piano; uno degli assi e due coppie di *rette cicliche* coincideranno con la retta all'infinito, e due

punti focali saranno gli stessi punti ciclici immaginarii all'infinito. Supponiamo per esempio che (s_1, S_1) sia un sistema di punti e di rette giacenti in un piano, e che C_1 sia il lato della terna principale posta all'infinito; indicando con μ e ν due costanti, la dipendenza equianarmonica tra (s_1, S_1) (s', S') sarà espressa per mezzo delle relazioni

$$\omega_1 A_1 = \mu \frac{sen\, \omega' A'}{sen\, \omega' C'}, \qquad \omega_1 B_1 = \nu \frac{sen\, \omega' B'}{sen\, \omega' C'};$$

la rimanente coppia di rette cicliche di (s_1, S_1) con la coppia omologa di archi ciclici di (s', S') saranno date dall'equazioni

$$\frac{\omega_1 A_1}{\omega_1 B_1} = \pm \frac{\mu}{\nu} \sqrt{-1}, \qquad \frac{sen\, \omega' A'}{sen\, \omega' B'} = \pm \sqrt{-1},$$

e le rimanenti coppie di punti focali, appartenenti rispettivamente ad A e B, saranno rappresentate dall'equazioni

$$\omega_1 B_1 = \pm \sqrt{\nu^2 - \mu^2}, \quad tan\, \omega' B' = \pm \frac{\sqrt{\nu^2 - \mu^2}}{\nu};$$

$$\omega_1 A_1 = \pm \sqrt{\mu^2 - \nu^2}, \quad tan\, \omega' A' = \pm \frac{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}{\mu};$$

di queste coppie è reale la prima o la seconda, secondo che μ è minore o maggiore di ν; se poi μ è eguale a ν le due coppie di punti focali coincidono con i centri c_1 e c' dei sistemi.

Supponiamo ora che (s_1, S_1) ed (s', S') siano tutti e due sistemi di punti e di rette giacenti in un piano: in tal caso un asse di (s_1, S_1) sarà la retta A_1 che ha per omologa in (s', S') la retta A' all'infinito, ed un asse di (s', S') sarà la retta B' che ha per omologa in (s_1, S_1) la retta B_1 all'infinito; B_1 ed A' sono due altri assi dei sistemi, ed i rimanenti assi C_1 e C' saranno due rette perpendicolari rispettivamente ad A_1 e B'. Indicando con μ e ν due costanti, la dipendenza equianarmonica dei sistemi sarà espressa dall'equazioni

$$\frac{\omega_1 C_1}{\omega' C'} = \frac{\omega_1 A_1}{\mu} = \frac{\nu}{\mu' B'};$$

in (s_1, S_1) una coppia di rette cicliche coincide con A_1 un'altra con B_1 e la terza è costituita dalle due rette $\omega_1 A_1 = \pm \mu$ parallele ad A_1; ed in (s', S') una coppia di rette cicliche coincide con A' un'altra con B', e

*

la terza è costituita dalle due rette $\omega' B' = \pm \nu$ parallele a B': due punti focali in ciascun sistema coincidono con i punti ciclici all'infinito dello stesso sistema, e due altri con i punti che in quel sistema corrispondono ai punti ciclici all'infinito dell'altro; queste coppie di punti focali sono determinate rispettivamente sopra A_1 ed A', e sopra B' e B_1 dall'equazioni

$$\omega_1 C_1 = \pm \nu \sqrt{-1}\,, \quad \frac{\omega' C'}{\omega' B'} = \pm \sqrt{-1}\,; \quad \omega' C' = \pm \mu \sqrt{-1}\,, \quad \frac{\omega_1 C_1}{\omega_1 A_1} = \pm \sqrt{-1}\,;$$

finalmente le rimanenti coppie omologhe di punti focali appartengono a C_1 e C', e sono determinate dall'equazioni $\omega_1 A_1 = \pm \nu$, $\omega' B' = \pm \mu$.

I sistemi di punti e di rette in un piano ed in dipendenza equianarmonica danno luogo ad alcuni casi particolari notevoli. Essendo $(abc, ABC)_1$ ed $(abc, ABC)'$ due terne omologhe qualunque, α, β, γ quantità costanti, si avranno in generale le relazioni

$$\left(\frac{\omega_1 A_1}{a_1 A_1} : \frac{\omega' A'}{a' A'}\right) : \left(\frac{\omega_1 B_1}{b_1 B_1} : \frac{\omega' B'}{b' B'}\right) : \left(\frac{\omega_1 C_1}{c_1 C_1} : \frac{\omega' C'}{c' C'}\right) :: \alpha : \beta : \gamma\,.$$

Ora se le rette all'infinito dei sistemi sono rette omologhe, sarà $\alpha = \beta = \gamma$, e si avrà tra due aree omologhe qualunque ε_1 ed ε' la relazione

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon'} = \frac{\omega_1 b_1 c_1}{\omega' b' c'} = \frac{\omega_1 c_1 a_1}{\omega' c' a'} = \frac{\omega_1 a_1 b_1}{\omega' a' b'} = \frac{a_1 b_1 c_1}{a' b' c'}\,;$$

questa dipendenza tra (s_1, S_1) ed (s', S') dicesi *proporzionalità (affinità)*, e si cambia in *equivalenza* allorchè le aree di due terne omologhe (e quindi due aree omologhe qualunque) sono tra loro equivalenti.

Se poi i punti ciclici all'infinito dei sistemi sono punti omologhi, oltre delle condizioni $\alpha = \beta = \gamma$ si avranno quelle che esprimono la simiglianza dei triangoli $a_1 b_1 c_1$ ed $a' b' c'$; poichè in tal caso due figure omologhe qualunque appartenenti ad (s_1, S_1) ed (s', S') sono simili, la dipendenza tra questi sistemi dicesi *similitudine*; questa poi diventa *eguaglianza* allorchè due terne omologhe (e quindi due figure omologhe qualunque) sono tra loro eguali.

Indicando con (A_1, B_1) ed (A', B') le coppie principali omologhe appartenenti a due punti omologhi qualunque, e con μ e ν quantità costanti, la proporzionalità dei sistemi sarà espressa dall'equazioni

$$\frac{\omega_1 A_1}{\omega' A'} = \frac{\mu_1}{\mu'}\,, \qquad \frac{\omega_1 B_1}{\omega' B'} = \frac{\nu_1}{\nu'}\,;$$

per l'equivalenza sarà $\mu_1 \nu_1 = \mu' \nu'$, per la similitudine $\mu_1 \nu' = \nu_1 \mu'$ e per l'eguaglianza finalmente si avrà $\mu_1 = \mu'$, $\nu_1 = \nu'$.

Per i punti $A_1 B_1$ ed $A'B'$ si possono condurre in ciascun sistema due rette cicliche rappresentate rispettivamente dall'equazioni

$$\frac{\omega_1 B_1}{\omega_1 A_1} = \pm \frac{\nu_1}{\mu_1} \sqrt{\frac{\mu_1^2 - \mu'^2}{\nu'^2 - \nu_1^2}} \; ; \qquad \frac{\omega' B'}{\omega' A'} = \pm \frac{\nu'}{\mu'} \sqrt{\frac{\mu'^2 - \mu_1^2}{\nu_1^2 - \nu'^2}} \; ;$$

esse sono parallele in ciascun sistema a due rette fisse, del pari che le rette A e B.

Nei sistemi proporzionali o equivalenti non vi sono punti focali (a distanza finita); nei sistemi simili non vi sono rette cicliche (a distanza finita), ma ogni punto è focale; nei sistemi eguali poi ogni retta è ciclica, ed ogni punto è focale.

6. Passiamo ora ad esaminare il caso in cui due sistemi in dipendenza equianarmonica *appartengono ad una stessa forma geometrica.*

Supponiamo che i sistemi (s_1, S_1) ed (s', S') (omografici) in dipendenza equianarmonica appartengano ad una stessa superficie sferica. Gli archi omologhi condotti per due punti omologhi ω_1, ω' costituiscono con i loro punti d'intersezione un sistema di 2° ordine di punti (σ, ω) al quale appartengono ω_1 ed ω'; tutti questi sistemi (σ, ω) hanno tre punti comuni e, f, g ciascuno dei quali considerato come appartenente ad uno dei sistemi s_1, s' coincide col suo omologo nell'altro. Similmente gli archi che congiungono i punti omologhi appartenenti a due archi omologhi Ω_1, Ω' costituiscono un sistema di 2° ordine di archi (Σ, Ω) al quale appartengono Ω_1 ed Ω'; tutti questi sistemi (Σ, Ω) hanno tre archi comuni E, F, G, ciascuno dei quali considerato come appartenente ad uno dei sistemi S_1, S' coincide col suo omologo nell'altro. I punti e, f, g e gli archi E, F, G costituiscono una stessa terna (efg, EFG); essi si dicono i punti e gli archi *doppii* dei sistemi (s_1, S_1), (s', S'). Dei punti e degli archi doppii uno è sempre reale; gli altri due possono essere immaginarii.

Conoscendo uno dei punti doppii, per esempio g, se si tirano per esso due archi omologhi Ω_1, Ω', gli archi che congiungono i loro punti omologhi concorreranno in un punto dell'arco doppio G, il quale resta così determinato considerando due coppie di archi omologhi (Ω_1, Ω'); gli archi doppii dei due sistemi equianarmonici di 1ª specie costituiti dagli archi Ω_1, Ω' saranno gli archi doppii E ed F di S_1 ed S'. Similmente conoscendo uno degli archi doppii, per esempio G, se si prendono in esso due punti omologhi ω_1, ω', i punti di concorso degli archi omologhi condotti

per essi apparterranno ad un arco che passa per il punto g, il quale resta così determinato considerando due coppie di punti omologhi ω_1, ω'; i punti doppii dei due sistemi equianarmonici di 1ª specie costituiti dai punti ω_1, ω' saranno i punti doppii e ed f di s_1 ed s'.

Siano $(abc, ABC)_1$ ed $(abc, ABC)'$ due terne omologhe; essendo in generale

$$x = \frac{sen\,\omega A}{sen\,aA}, \quad y = \frac{sen\,\omega B}{sen\,bB}, \quad z = \frac{sen\,\omega C}{sen\,cC},$$

$$sen\,\omega\Omega = x\,sen\,a\Omega + y\,sen\,b\Omega + z\,sen\,c\Omega,$$

e per la dipendenza equianarmonica

$$x' = r_1 u_1 x_1, \quad y' = r_1 v_1 y_1, \quad z' = r_1 w_1 z_1$$

si troverà facilmente che i punti doppii saranno determinati rispetto alla terna $(abc, ABC)_1$ da due qualunque dell'equazioni

$$\begin{aligned}
&x_1(sen\,a_1A' - r_1u_1\,sen\,a'A') + y_1\,sen\,b_1A' + z_1\,sen\,c_1A' = 0,\\
(1)\qquad &x_1\,sen\,a_1B' + y_1(sen\,b_1B' - r_1v_1\,sen\,b'B') + z_1\,sen\,c_1B' = 0,\\
&x_1\,sen\,a_1C' + y_1\,sen\,b_1C' + z_1(sen\,c_1C' - r_1w_1\,sen\,c'C') = 0.
\end{aligned}$$

sostituendo successivamente in esse per r_1 le radici dell'equazione di 3° grado

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} sen\,a_1A' - r_1u_1\,sen\,a'A', & sen\,b_1A', & sen\,c_1A' \\ sen\,a_1B', & sen\,b_1B' - r_1v_1\,sen\,b'B', & sen\,c_1B' \\ sen\,a_1C', & sen\,b_1C', & sen\,c_1C' - r_1w_1\,sen\,c'C' \end{vmatrix} = 0.$$

Supponiamo che si annullino i determinanti minori di (2) vale a dire che si abbiano le condizioni

$$sen\,a_1B'\,sen\,b_1C'\,sen\,c_1A' = sen\,a_1C'\,sen\,b_1A'\,sen\,c_1B' = \theta_1$$

$$\frac{1}{u_1\,sen\,a'A'}\left(sen\,a_1A' - \frac{\theta_1}{sen\,b_1C'\,sen\,c_1B'}\right) = \frac{1}{v_1\,sen\,b'B'}\left(sen\,b_1B' - \frac{\theta_1}{sen\,c_1A'\,sen\,a_1C'}\right)$$

$$= \frac{1}{w_1\,sen\,c'C'}\left(sen\,c_1C' - \frac{\theta_1}{sen\,a_1B'\,sen\,b_1A'}\right) = \rho_1$$

si potrà porre

$$\frac{L_1\,sen\,b_1C'\,sen\,c_1B'}{\theta_1} = \frac{M_1}{sen\,b_1A'} = \frac{N_1}{sen\,c_1A'} = \lambda_1$$

$$\frac{L_1}{sen\,a_1B'} = \frac{M_1\,sen\,c_1A'\,sen\,a_1C'}{\theta_1} = \frac{N_1}{sen\,c_1B'} = \mu_1$$

$$\frac{L_1}{sen\,a_1C'} = \frac{M_1}{sen\,b_1C'} = \frac{N_1\,sen\,a_1B'\,sen\,b_1A'}{\theta_1} = \nu_1$$

e supponendo inoltre $r_1 = \rho_1 + \delta_1$ l'equazione (2) darà per δ_1 due valori eguali a zero, ed il terzo espresso da

$$\delta_1 = \frac{L_1}{\lambda_1 u_1 sen\, a'A'} + \frac{M_1}{\mu_1 v_1 sen\, b'B'} + \frac{N_1}{\nu_1 w_1 sen\, c'C'} .$$

Pel valore ρ della radice doppia di (2) le tre equazioni (1) si ridurranno alla sola

$$(3) \qquad L_1 x_1 + M_1 y_1 + N_1 z_1 = 0 ,$$

tutt'i punti dell'arco G rappresentato dall'equazione (3) saranno quindi punti doppii dei sistemi s_1, s'. Pel valore poi $\rho_1 + \delta_1$ della terza radice di (2) le equazioni (1) daranno

$$(4) \quad \frac{y_1 sen\, b_1 B_1}{sen\, a'B_1} = \frac{z_1 sen\, c_1 C_1}{sen\, a'C_1} , \quad \frac{z_1 sen\, c_1 C_1}{sen\, b'C_1} = \frac{x_1 sen\, a_1 A_1}{sen\, b'A_1} , \quad \frac{x_1 sen\, a_1 A_1}{sen\, c'A_1} = \frac{y_1 sen\, b_1 B_1}{sen\, c'B_1}$$

ed il punto g rappresentato da queste equazioni (di cui una qualunque è conseguenza delle altre due) sarà un altro punto doppio di s_1, s'.

Nel caso esaminato i sistemi (s_1, S_1) ed (s', S') hanno dunque per punti doppii g e tutt'i punti di G, e quindi per archi doppii G e tutti gli archi che passano per g; l'arco condotto per due punti omologhi ω_1, ω' passerà sempre per g, ed il punto d'incontro di due archi omologhi Ω_1, Ω' si troverà sempre in G. I sistemi in dipendenza equianarmonica si diranno in tal caso *prospettici (omologici)*; g sarà il *centro* e G *l'asse di prospettiva* (centro ed asse di *omologia*).

Supponiamo ora che si annullino i diversi elementi del determinante (2); allora le terne $(abc, ABC)_1$ ed $(abc, ABC)'$ coincideranno tra loro, e sarà inoltre $u_1 = v_1 = w_1 = \frac{1}{\rho_1}$; l'equazione (2) avrà tutte e tre le radici eguali a ρ_1, e per questo valore di r_1 l'equazioni (1) essendo soddisfatte identicamente, potrà considerarsi ogni punto come punto doppio di s_1, s', e quindi ogni arco come arco doppio di S_1, S'; i due sistemi sono in tal caso *coincidenti* o *identici*.

Supponendo che nelle terne $(abc, ABC)_1$ ed $(abc, ABC)'$ i due punti c_1, c' coincidano col punto doppio g, ed i due archi C_1, C' coincidano coll'arco doppio G, gli altri due punti doppii e, f saranno determinati da una qualunque dell'equazioni

$$x_1 (sen\, a_1 b' - r_1 u_1 sen\, a'b') + y_1 sen\, b_1 b' = 0 ,$$

$$x_1 sen\, a_1 a' + y_1 (sen\, b_1 a' - r_1 v_1 sen\, b'a') = 0 ,$$

i valori di r_1 essendo dati dall'equazione di 2° grado

$$(sen\, a_1 b' - r_1 u_1\, sen\, a'b')(sen\, b_1 a' - r_1 v_1\, sen\, b'a') - sen\, a_1 a'\, sen\, b_1 b' = 0\ .$$

Se nelle formole precedenti si scambiano tra loro l'indice e l'apice, la determinazione dei punti doppii si farà rispetto alla terna $(abc, ABC)'$, e se si scambiano tra loro le lettere minuscole e le maiuscole si avranno le formole per determinare direttamente gli archi doppii.

7. La dipendenza equianarmonica tra i sistemi (s_1, S_1) ed (s', S'), riferiti alla terna (efg, EFG) dei loro elementi doppii, sia espressa dall'equazioni

$$(1)\quad \begin{array}{l} x_1 : y_1 : z_1 :: u'x' : v'y' : w'z' \ ; \quad x' : y' : z' :: u_1 x_1 : v_1 y_1 : w_1 z_1 \\ X_1 : Y_1 : Z_1 :: U'X' : V'X' : W'Z' \ ; \quad X' : Y' : Z' :: U_1 X_1 : V_1 Y_1 : W_1 Z_1\ , \end{array}$$

essendo

$$u_1 u' = v_1 v' = w_1 w'\ , \qquad U_1 U' = V_1 V' = W_1 W'\ ,$$

$$\frac{u_1}{U'} = \frac{v_1}{V'} = \frac{w_1}{W'}\ , \qquad \frac{U_1}{u'} = \frac{V_1}{v'} = \frac{W_1}{w'}\ ;$$

essa potrà esprimersi ancora con l'equazioni

$$(2)\quad \frac{sen\,\omega_1 E}{sen\,\omega' E} : \frac{sen\,\omega_1 F}{sen\,\omega' F} : \frac{sen\,\omega_1 G}{sen\,\omega' G} :: \alpha : \beta : \gamma :: \frac{sen\,\Omega' e}{sen\,\Omega_1 e} : \frac{sen\,\Omega' f}{sen\,\Omega_1 f} : \frac{sen\,\Omega' g}{sen\,\Omega_1 g}\ ,$$

in cui α, β, γ dinotano quantità costanti.

Può accadere che la coppia (e, f) o (E, F) sia principale, o pure che sia principale la terna (efg, EFG). Se (e, f) è la coppia immaginaria all'infinito corrispondente all'arco G, i punti omologhi su quest'arco formeranno sistemi eguali e rivolti per lo stesso verso; similmente se (E, F) è la coppia immaginaria all'infinito corrispondente al punto g, gli archi omologhi condotti per questo punto formeranno sistemi eguali e rivolti per lo stesso verso; se poi si verificano tutte e due le condizioni precedenti (nel qual caso la terna (efg, EFG) è principale) i sistemi totali (s_1, S_1) ed (s', S') saranno eguali e rivolti per lo stesso verso, purchè per una sola coppia di punti omologhi (ω_1, ω') o pure di archi omologhi (Ω_1, Ω'), si abbia $sen\,\omega_1 G = sen\,\omega' G$, o pure $sen\,\Omega_1 g = sen\,\Omega' g$.

Allorchè si ha $\alpha = -\beta$, le coppie di punti omologhi (ω_1, ω') appartenente a G saranno in involuzione, del pari che le coppie di archi omologhi (Ω_1, Ω') condotti per g; i sistemi (s_1, S_1) ed (s', S') si diranno al-

lora in *involuzione parziale*, relativa ad un punto e ad un arco doppio; questa involuzione sarà *simmetrica* o pure *ortogonale* pel punto doppio g, e per l'arco doppio G, secondo che per quel punto, o per quell'arco, (E,F) o (e,f) è la coppia *principale*, o pure quella degli elementi immaginarii all'infinito; se queste circostanze si verificano insieme per g e G, la terna (efg, EFG) sarà principale.

Sia in secondo luogo $\alpha=\beta$; i sistemi (s_1, S_1) ed (s', S') saranno in tal caso *prospettici*, essendo g e G il *centro* e l'*asse* di prospettiva; la prospettiva si dirà *ortogonale* quando g è il polo di G.

Sia ora $\alpha=\beta=-\gamma$; i sistemi saranno ancora prospettici, ma oltre a ciò le coppie qualunque (ω_1, ω') di punti omologhi formeranno sull'arco Ω che li congiunge un'involuzione, che ha per punti doppii g ed ΩG, e similmente le coppie qualunque (Ω_1, Ω') di archi omologhi formeranno intorno al loro punto ω di concorso un'involuzione, che ha per archi doppii G ed ωg; si diranno perciò (s_1, S_1) ed (s', S') sistemi in *involuzione* (totale); l'involuzione sarà *simmetrica* allorchè g è il polo di G, e saranno g e G il *centro* e l'*asse* di simmetria; in tal caso i sistemi sono eguali e diretti in verso contrario, o sia sono eguali per simmetria.

Finalmente allorchè $\alpha=\beta=\gamma$ i sistemi sono coincidenti o identici.

Si possono considerare ancora altri casi particolari della dipendenza equianarmonica, corrispondenti alla coincidenza dei punti e degli archi doppii.

Se e ed f coincidono in un punto o, e quindi E ed F coincidono in un arco O, indicando con (o_1, o') e (g_1, g') coppie di punti omologhi appartenenti rispettivamente ad O e G, con (O_1, O') e (G_1, G') coppie di archi omologhi condotti rispettivamente per o e g, e con μ e ν due costanti, si avranno per esprimere la dipendenza equianarmonica le equazioni

$$(3)\qquad \begin{gathered} \frac{\operatorname{sen} O_1O}{\operatorname{sen} O'O} : \frac{\operatorname{sen} O_1G}{\operatorname{sen} O'G} = \mu = \frac{\operatorname{sen} o'o}{\operatorname{sen} o_1o} : \frac{\operatorname{sen} o'g}{\operatorname{sen} o_1g}, \\ \frac{\operatorname{sen} GO \operatorname{sen} G_1G'}{\operatorname{sen} OG_1 \operatorname{sen} OG'} = \nu = \frac{\operatorname{sen} go \operatorname{sen} g_1g'}{\operatorname{sen} og_1 \operatorname{sen} og'}. \end{gathered}$$

Se rimanendo fissi E ed F, l'arco G passa per g, indicando con (e_1, e') ed (f_1, f') coppie di punti omologhi appartenenti rispettivamente ad E ed F, si avranno le relazioni

$$(4)\qquad \frac{\operatorname{sen} e_1e'}{\operatorname{sen} ge_1 \operatorname{sen} ge'} = \mu, \qquad \frac{\operatorname{sen} f_1f'}{\operatorname{sen} gf_1 \operatorname{sen} gf'} = \nu;$$

in tal caso i sistemi sono prospettici; il centro di prospettiva è g, e l'asse di prospettiva G (che passa per g) è determinato dall'equazione

$$\frac{sen\,GE}{sen\,GF}=\frac{\mu}{\nu}.$$

Similmente se rimanendo fissi e ed f, il punto g cade in G, indicando con (E_1, E') ed (F_1, F') coppie di archi omologhi condotti rispettivamente per e ed f, si avranno le relazioni

$$(5)\qquad \frac{sen\,E_1E'}{sen\,GE_1\,sen\,GE'}=\mu\,,\qquad \frac{sen\,F_1F'}{sen\,GF_1\,sen\,GF'}=\nu\,;$$

i sistemi sono prospettici; l'asse di prospettiva è G, ed il centro di prospettiva g (che cade in G) è determinato dall'equazione $\frac{sen\,ge}{sen\,gf}=\frac{\mu}{\nu}$.

È facile modificare le formole ed i risultati precedenti allorchè (s_1, S_1) ed (s', S') sono sistemi di punti e di rette giacenti in un medesimo piano. Quando le rette all'infinito nei due sistemi sono rette omologhe, una delle rette doppie G cade all'infinito; indicando con (A_1, B_1) ed (A', B') le coppie principali omologhe corrispondenti a due punti omologhi qualunque, e con μ e ν quantità costanti, il punto doppio g sarà dato dall'intersezione delle due rette $\frac{\omega A_1}{\omega A'}=\frac{\mu_1}{\mu'}$, $\frac{\omega B_1}{\omega B'}=\frac{\nu_1}{\nu'}$.

Se ora (A_1, B_1) ed (A', B') dinotino le rette parallele alle precedenti, e condotte per g, le rette doppie E ed F saranno le due rette Ω determinate dall'equazione $\frac{tan\,\Omega A_1}{tan\,\Omega A'}=\frac{\mu_1\nu'}{\nu_1\mu'}=\frac{tan\,\Omega B'}{tan\,\Omega B_1}$.

Allorchè i sistemi sono simili e diretti per lo stesso verso, (E, F) sarà la coppia immaginaria all'infinito corrispondente al punto g; se poi i sistemi sono simili e diretti in verso contrario, E ed F saranno le bisecanti interne ed esterne degli angoli $A_1\,A'$, $B_1\,B'$.

8. Cerchiamo ora di determinare rispetto ad (efg, EFG) la posizione dei centri, degli assi, degli archi ciclici e dei punti focali di (s_1, S_1) ed (s', S'). In generale gli archi ciclici saranno le coppie dei lati opposti del quadrangolo che ha per vertici i punti comuni ai due sistemi di 2° ordine dati dall'equazioni

$$(1)\qquad \begin{aligned} x^2+y^2+z^2+2yz\cos fg+2zx\cos ge+2xy\cos ef=0\,,\\ u^2x^2+v^2y^2+w^2z^2+2vw\,yz\cos fg+2wu\,zx\cos ge+2uv\,xy\cos ef=0\,,\end{aligned}$$

ed i centri saranno determinati da due qualunque dell'equazioni

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
&x(1-ru^2)+y(1-ruv)\cos ef+z(1-ruw)\cos eg=0\,,\\
&x(1-rvu)\cos fe+y(1-rv^2)+z(1-rvw)\cos fg=0\,,\\
&x(1-rwu)\cos ge+y(1-rwv)\cos gf+z(1-rw^2)=0\,,
\end{aligned}
$$

ponendo successivamente in esse per r le radici dell'equazione

$$
(3)\qquad
\begin{vmatrix}
(1-ru^2)\,, & (1-ruv)\cos ef\,, & (1-ruw)\cos eg\\
(1-rvu)\cos fe\,, & (1-rv^2)\,, & (1-rvw)\cos fg\,,\\
(1-rwu)\cos ge\,, & (1-rwv)\cos gf\,, & (1-rw^2)
\end{vmatrix}=0\,.
$$

Cambiando le lettere minuscole in maiuscole si avranno le formole analoghe per determinare i punti focali, e gli assi, e si parlerà del 1° o del 2° sistema secondo che alle lettere si porrà l'indice o l'apice.

Le formole precedenti si semplificano alquanto allorchè (e,f) o (E,F) è coppia principale, e maggiormente allorchè è principale la terna (efg, EFG), nel qual caso i punti e gli archi di questa terna sono i centri e gli assi comuni ai due sistemi. Se (e,f) o pure (E,F) è la coppia immaginaria all'infinito corrispondente all'arco G, o pure al punto g, G sarà un arco ciclico, o pure g sarà un punto focale; verificandosi insieme queste due circostanze, i sistemi saranno in dipendenza equianarmonica *circolare*, vale a dire essi avranno infinite terne principali omologhe, che hanno di comune g e G, e coincideranno con quel punto i due punti focali reali, e con quell'arco i due archi ciclici reali; se inoltre i sistemi sono eguali e rivolti per lo stesso verso, ogni arco è ciclico, ed ogni punto è focale.

Le stesse proprietà si hanno allorchè i sistemi sono in involuzione parziale (simmetrica o ortogonale) relativa a G, a g, o a tutti e due questi elementi insieme; solamente in quest'ultimo caso i sistemi potranno essere eguali e rivolti per verso contrario, o per lo stesso verso, secondo che l'involuzione è simmetrica o ortogonale.

Supponiamo ora che i due sistemi siano prospettici, essendo g e G il centro e l'asse di prospettiva. Si potrà supporre GF un angolo retto, e gf un quadrante; un arco ciclico coinciderà con G, ed un punto focale con g; ponendo $u=v=\frac{\nu}{\mu}$, l'altro arco ciclico reale Ω passerà per f, e sarà determinato nel 1° e nel 2° sistema dall'equazioni

$$
(4)\qquad \cos ge\,\frac{\operatorname{sen}\Omega_1 E}{\operatorname{sen}\Omega_1 G}=-\frac{\mu+\nu}{2\nu}\,,\qquad \cos ge\,\frac{\operatorname{sen}\Omega' E}{\operatorname{sen}\Omega' G}=-\frac{\nu+\mu}{2\mu}\,,
$$

e l'altro punto focale reale ϖ apparterrà ad F, e sarà determinato nel 1° e nel 2° sistema dall'equazioni

$$(5 \qquad \cos GE \frac{sen\,\omega_1 e}{sen\,\omega_1 g} = -\frac{\nu+\mu}{2\mu}\,, \qquad \cos GE \frac{sen\,\omega' e}{sen\,\omega' g} = -\frac{\mu+\nu}{2\nu}\,.$$

Se la prospettiva è ortogonale, i sistemi avranno infinite terne principali omologhe, che hanno di comune g e G; i due punti focali reali coincideranno con g, ed i due archi ciclici reali con G.

Se i sistemi prospettici sono inoltre in involuzione, coincideranno con g ed e, e con G ed E, i due punti focali reali, ed i due archi ciclici reali; e finalmente se l'involuzione è simmetrica, i sistemi essendo eguali e rivolti per verso contrario, ogni punto è focale, ed ogni arco è ciclico.

Allorchè (s_1, S_1) ed (s', S') sono sistemi di punti e di rette giacenti in uno stesso piano, sarà facile in tutt'i casi la determinazione delle terne principali omologhe, delle rette cicliche, e dei punti focali; quando i sistemi sono prospettici le rette A_1 e B', che in ciascun sistema corrispondono rispettivamente alla retta all'infinito dell'altro, saranno parallele all'asse di prospettiva, e a distanze eguali ed opposte rispettivamente da quest'asse e dal centro di prospettiva; nel 1° o pure nel 2° sistema poi l'asse di prospettiva con l'altra retta ciclica, ed il centro di prospettiva con l'altro punto focale, saranno a distanze eguali ed opposte da A_1 o pure da B'.

Risulta evidentemente dalle cose dette che essendo dati due sistemi (s_1, S_1) ed (s', S') in dipendenza equianarmonica, su due sfere di raggio 1 ma di centri diversi, si possono far coincidere le due sfere in modo che i sistemi risultino in involuzione parziale simmetrica o ortogonale, o pure in prospettiva, e ciò facendo coincidere convenientemente tra loro due punti focali, o due archi ciclici omologhi; se i sistemi ammettono infinite terne principali omologhe, che hanno tutte un punto ed un arco di comune, l'involuzione sarà relativa ad un punto e ad un arco insieme, e la prospettiva sarà ortogonale; la prospettiva finalmente sarà in involuzione allorchè l'angolo compreso fra i due archi ciclici reali, o ciò che torna in tal caso lo stesso, l'arco compreso fra i due punti focali reali, ha la stessa grandezza nell'uno e nell'altro sistema.

9. Ogni sistema di 2° ordine (σ, ϖ) costituito dai punti d'incontro degli archi omologhi condotti per due punti omologhi ϖ_1, ϖ' è circoscritto alla terna (e, f, g), viceversa ogni sistema di 2° ordine σ circoscritto ad (e, f, g) può considerarsi come un sistema (σ, ϖ), essendo ϖ_1 o ϖ' il punto

comune (oltre di e, f, g) a σ, considerato come appartenente ad s' o ad s_1, ed al sistema omologo in s_1 o in s'; supponendo σ rappresentato dall'equazione

$$lyz+mzx+nxy=0\ ,$$

il punto ω sarà dato dalle formole

$$\frac{u(v-w)x}{l}=\frac{v(w-u)y}{m}=\frac{w(u-v)z}{n}\ .$$

Tra i sistemi σ ve ne sono quattro che hanno un doppio contatto col sistema di 2° ordine (i, j) immaginario all'infinito; gli archi che congiungono i due punti comuni ad (i, j) e σ sono i lati Ω del quadrilatero che ha per vertici i punti che bisegano internamente ed esternamente gli archi fg, ge, ef; il punto armonico rispetto a σ di Ω, è nello stesso tempo il polo o di Ω; con Ω coincidono due archi ciclici di σ, e con o due punti focali.

Similmente ogni sistema di 2° ordine (Σ, Ω) costituito dagli archi che congiungono i punti omologhi appartenenti a due archi omologhi Ω_1, Ω' è inscritto nella terna (E, F, G); viceversa ogni sistema di 2° ordine Σ inscritto in (E, F, G) può considerarsi come un sistema (Σ, Ω), essendo Ω_1 o Ω' l'arco comune (oltre di E, F, G) a Σ, considerato come appartenente ad S' o ad S_1 ed al sistema omologo in S_1 o in S'; supponendo Σ rappresentato dall'equazione

$$LYZ+MZX+NXY=0\ ,$$

l'arco Ω sarà dato dalle formole

$$\frac{U(V-W)X}{L}=\frac{V(W-U)Y}{M}=\frac{W(U-V)Z}{N}\ .$$

Tra i sistemi Σ ve ne sono anche quattro che hanno un doppio contatto col sistema di 2° ordine (I, J) immaginario all'infinito; i punti d'incontro dei due archi comuni ad (I, J) e Σ sono i vertici ω del quadrangolo che ha per lati gli archi che bisegano, internamente ed esternamente, gli angoli FG, GE, EF; l'arco armonico di ω rispetto a Σ è nello stesso tempo l'arco O che ha per polo ω; con ω coincidono due punti focali di Σ, e con O due archi ciclici.

Siano ora (σ_1, Σ_1) e (σ', Σ') due sistemi omologhi di 2° ordine di punti e di archi; se (e, f, g) appartiene a σ_1, (E, F, G) appartiene a Σ_1,

o finalmente (efg, EFG) è una terna coniugata rispetto a (σ_1, Σ_1), apparterrà ancora (e,f,g) a σ', (E, F, G) a Σ', o pure sarà la terna (efg, EFG) coniugata rispetto a (σ', Σ'). Se (σ_1, Σ_1) è un sistema omociclico, o pure omofocale con (s_1, S_1), sarà anche (σ', Σ') un sistema omociclico, o pure omofocale con (s', S').

In generale σ_1 e σ' coincideranno tra loro solamente allorchè si riducano alle coppie di archi (F, G), (G, E), (E, F), e Σ_1, Σ' coincideranno tra loro allorchè si riducano alle coppie di punti (f,g), (g,e), (e,f); però se si ha la condizione $w^2=uv$, e quindi anche l'altra $W^2=UV$, ogni sistema (σ_1, Σ_1) che passa per (e, f) e tocca (E, F) coinciderà col suo omologo (σ', Σ'); se poi si hanno le relazioni $u=v=-w$, e quindi anche le altre $U=V=-W$, quella coincidenza avrà luogo per ogni sistema di 2° ordine (σ, Σ) pel quale g e G sono elementi armonici tra loro; finalmente se $u=v=w$, e quindi anche $U=V=W$, ogni sistema di 2° ordine in (s_1, S_1) coinciderà col suo omologo in (s', S').

I punti omologhi ω_1, ω' tali che gli archi che li congiungono passino per un dato punto o, costituiscono due sistemi omologhi di 2° ordine (σ_1, o), (σ', o); i punti in cui σ_1 e σ' incontrano due archi omologhi Ω_1, Ω' sono i punti in cui questi archi sono incontrati dagli archi del sistema di 2° ordine (Σ, Ω) che passano per o; σ_1 e σ' passano entrambi per o, e ciascuno di essi passa rispettivamente pel punto che in s_1 o in s' corrisponde al punto o considerato come appartenente ad s' o ad s_1.

Similmente gli archi omologhi Ω_1, Ω' tali che i loro punti d'incontro appartengano ad un dato arco O, costituiscono due sistemi omologhi di 2° ordine (Σ_1, O), (Σ', O); gli archi di Σ_1 e Σ' che passano per due punti omologhi ω_1, ω' sono gli archi condotti da questi punti ai punti del sistema di 2° ordine (σ, ω) appartenenti ad O; Σ_1 e Σ' toccano entrambi O, e ciascuno di essi tocca rispettivamente l'arco che in S_1 o in S' corrisponde all'arco O considerato come appartenente ad S' o ad S_1.

10. Supponiamo ora che alla stessa forma geometrica appartengano due sistemi eterografici in dipendenza equianarmonica.

Indichiamo con (S_1, s_1) ed (S', s') i sistemi costituiti dagli archi Ω_1, Ω' e dai punti ω_1, ω' che corrispondono rispettivamente al punto ω, ed all'arco Ω considerati come appartenenti al 2° o al 1° dei due sistemi eterografici proposti, e dinotiamo con (s, S) il sistema dei punti ω e degli archi Ω. I punti ω per i quali passano gli archi omologhi Ω_1, Ω' costituiscono uno stesso sistema σ di 2° ordine, e similmente gli archi Ω sui quali si trovano i punti omologhi ω_1, ω' costituiscono ancora uno

stesso sistema Σ di 2° ordine. Gli archi di Σ condotti per un punto ϖ di σ sono i due archi Ω_1 ed Ω' che corrispondono ad ϖ, ed i punti di σ appartenenti ad un arco di Σ sono i due punti ϖ_1, ϖ' che corrispondono ad Ω. Se poi i due archi di Σ condotti per un punto arbitrario ϖ incontrano σ nelle coppie di punti (m_1, m'), (n_1, n') in modo che m_1m', n_1n' siano gli archi di S' che corrispondono ai punti m_1, n_1 considerati in s, e quindi siano $m'm_1$, $n'n_1$ gli archi di S_1 che corrispondono ai punti m',n' di s, saranno m_1n_1 ed $m'n'$ gli archi Ω_1 ed Ω' corrispondenti al punto ϖ; similmente se per i due punti di σ appartenenti ad un arco arbitrario Ω passano le coppie di archi di Σ (M_1, M'), (N_1, N') in modo che M_1M', N_1N' siano i punti di s' che corrispondono agli archi M_1, N_1 considerati in S, e quindi $M'M_1$, $N'N_1$ siano i punti di s_1 che corrispondono agli archi M', N' di S, saranno M_1N_1 ed $M'N'$ i punti ϖ_1 ed ϖ' corrispondenti all'arco Ω. Nel caso particolare che ϖ sia un punto di Σ, i due archi corrispondenti Ω_1 ed Ω' saranno gli archi che toccano σ nei suoi punti d'incontro con l'arco tangente di Σ in ϖ; e se Ω è un arco tangente di σ, i due punti corrispondenti ϖ_1 ed ϖ' saranno i punti di contatto di Σ con gli archi tangenti condotti pel punto di contatto di σ con Ω.

I due sistemi di 2° ordine σ e Σ hanno tra loro un doppio contatto; ciascuno dei due punti comuni e o f di σ e Σ, considerato in s, ha per archi omologhi in S_1 ed in S' l'arco tangente comune F o E di σ e Σ in quel punto, come ciascuno dei due archi comuni E o F di Σ e σ, considerato in S, ha per punti omologhi in s_1 ed in s' il punto di contatto comune f o e di Σ e σ su quell'arco; e finalmente il punto d'incontro g di E ed F ha per archi omologhi nei due sistemi S_1 ed S' l'arco G che passa per e ed f, o pure viceversa G ha per punti omologhi nei due sistemi s_1 ed s' il punto g. Si diranno e, f, g i punti *doppii*, ed E, F, G gli archi *doppii* dei sistemi eterografici.

Essendo O l'arco che ha per polo ϖ, ed o il polo dell'arco Ω, gli archi O, Ω_1, Ω' apparterranno a tre sistemi omografici Θ, S_1, S', ed i punti o, ϖ_1, ϖ' apparterranno a tre altri sistemi omografici θ, s_1 s'; gli archi doppii di Θ ed S_1, ed i punti doppii di θ ed s_1 costituiranno una stessa terna $(efg, EFG)_1$ e similmente gli archi doppii di Θ ed S', ed i punti doppii di θ ed s' costituiranno un'altra terna $(efg, EFG)'$: le due terne $(efg, EFG)_1$ ed $(efg, EFG)'$ sono polari tra loro, ed i punti di ciascuna con gli archi corrispondenti dell'altra, o viceversa, saranno elementi omologhi dei sistemi eterografici proposti; si diranno perciò quelle due terne le terne *polari* dei medesimi sistemi.

11. Siano $(abc,ABC)_1$ ed $(abc,ABC)'$ le terne che in (s_1,S_1) ed in (s',S') corrispondono alla terna (ABC,abc) di (S,s); ponendo in generale, come al solito,

$$x=\frac{sen\,\omega A}{sen\,aA}\,,\ y=\frac{sen\,\omega B}{sen\,bB}\,,\ z=\frac{sen\,\omega C}{sen\,cC}\,;\ X=\frac{sen\,\Omega a}{sen\,Aa}\,,\ Y=\frac{sen\,\Omega b}{sen\,Bb}\,,\ Z=\frac{sen\,\Omega c}{sen\,Cc}$$

si avrà, per la dipendenza equianarmonica, indicando con u,v,w,U,V,W quantità costanti,

$$X_1 : Y_1 : Z_1 :: u_1x : v_1y : w_1z \ ; \quad X' : Y' : Z' :: u'x : v'y : w'z \ ,$$
$$x_1 : y_1 : z_1 :: U_1X : V_1Y : W_1Z \ ; \quad x' : y' : z' :: U'X : V'Y : W'Z \ .$$

Osservando che si ha generalmente

$$sen\,\omega\Omega=\frac{sen\,\omega A\,sen\,\Omega a}{sen\,Aa}+\frac{sen\,\omega B\,sen\,\Omega b}{sen\,Bb}+\frac{sen\,\omega C\,sen\,\Omega c}{sen\,Cc}\ ,$$

si troverà

$$\frac{u_1x\,sen\,aA_1+v_1y\,sen\,aB_1+w_1z\,sen\,aC_1}{sen\,\Omega_1a}=\frac{u_1x\,sen\,bA_1+v_1y\,sen\,bB_1+w_1z\,sen\,bC_1}{sen\,\Omega_1b}$$
$$=\frac{u_1x\,sen\,cA_1+v_1y\,sen\,cB_1+w_1z\,sen\,cC_1}{sen\,\Omega_1c}\ ,$$

e quindi

$$\frac{u_1(x\,sen\,aA_1+y\,sen\,bA_1+z\,sen\,cA_1)}{sen\,\Omega'a}=\frac{v_1(x\,sen\,aB_1+y\,sen\,bB_1+z\,sen\,cC_1)}{sen\,\Omega'b}$$
$$=\frac{w_1(x\,sen\,aC_1+y\,sen\,bC_1+z\,sen\,cC_1)}{sen\,\Omega'c}\ . \tag{1}$$

Segue da ciò che l'equazione di σ sarà

$$\begin{aligned} &u_1x^2\,sen\,aA_1+yz(w_1\,sen\,bC_1+v_1\,sen\,cB_1)\\ &+v_1y^2\,sen\,bB_1+zx(u_1\,sen\,cA_1+w_1\,sen\,aC_1)\\ &+w_1z^2\,sen\,cC_1+xy(v_1\,sen\,aB_1+u_1\,sen\,bA_1)=0\ , \end{aligned} \tag{2}$$

e pel punto doppio g si avrà

$$\frac{x}{v_1\,sen\,cB_1-w_1\,sen\,bC_1}=\frac{y}{w_1\,sen\,aC_1-u_1\,sen\,cA_1}=\frac{z}{u_1\,sen\,bA_1-v_1\,sen\,aB_1}\ . \tag{3}$$

Cambiando tra loro in (1), (2), (3) le lettere minuscole e le maiuscole si avranno le formole per determinare, rispetto ad $(abc,\,ABC)$, ω_1 ed ω'

per mezzo di Ω, e per determinare Σ e l'arco doppio G. Si potranno poi in tutte queste formole scambiare tra loro l'indice e l'apice, e con ciò si otterranno alcune relazioni tra le costanti u, v, w, U, V, W e gli elementi delle terne (ABC, abc), $(abc, ABC)_1$, $(abc, ABC)'$.

Se la terna (a,b,c) appartiene a σ, $(A,B,C)_1$ ed $(A,B,C)'$ apparterranno a Σ, e se (A,B,C) appartiene a Σ, $(a,b,c)_1$ ed $(a,b,c)'$ apparterranno a σ; se (a,b,c) è una terna coniugata rispetto a σ, gli archi che congiungono le coppie di punti (a, AA_1), (b, BB_1), (c, CC_1), o pure (a, AA'), (b, BB'), (c, CC') passeranno per uno stesso punto, ed i punti d'incontro delle coppie di archi $(A_1, a_1 a)$, $(B_1, b_1 b)$, $(C_1, c_1 c)$, o pure $(A', a'a)$, $(B', b'b)$, $(C', c'c)$ apparterranno ad uno stesso arco; similmente se (A,B,C) è una terna coniugata rispetto a Σ, i punti d'incontro delle coppie di archi (A, aa_1), (B, bb_1), (C, cc_1), o pure (A, aa'), (B, bb'), (C, cc') apparterranno ad uno stesso arco, e gli archi che congiungono le coppie di punti $(a_1, A_1 A)$, $(b_1, B_1 B)$, $(c_1, C_1 C)$, o pure $(a', A'A)$, $(b', B'B)$, $(c', C'C)$ passeranno per uno stesso punto.

Consideriamo i due determinanti

$$\begin{vmatrix} u_1 \operatorname{sen} aA_1, & v_1 \operatorname{sen} aB_1, & w_1 \operatorname{sen} aC_1 \\ u_1 \operatorname{sen} bA_1, & v_1 \operatorname{sen} bB_1, & w_1 \operatorname{sen} bC_1 \\ u_1 \operatorname{sen} cA_1, & v_1 \operatorname{sen} cB_1, & w_1 \operatorname{sen} cC_1 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} U_1 \operatorname{sen} Aa_1, & V_1 \operatorname{sen} Ab_1, & W_1 \operatorname{sen} Ac_1 \\ U_1 \operatorname{sen} Ba_1, & V_1 \operatorname{sen} Bb_1, & W_1 \operatorname{sen} Bc_1 \\ U_1 \operatorname{sen} Ca_1, & V_1 \operatorname{sen} Cb_1, & W_1 \operatorname{sen} Cc_1 \end{vmatrix}$$

se uno di essi è simmetrico, l'altro lo sarà parimenti; σ e Σ costituiranno uno stesso sistema di 2° ordine (σ, Σ) di punti e di archi, coincideranno insieme Ω_1, Ω' con l'arco armonico di ω, ed ω_1, ω' col punto armonico di Ω rispetto a (σ, Σ), ed infine la terna (abc, ABC) sarà in prospettiva con la sua omologa; in tal caso i sistemi eterografici in dipendenza equianarmonica si diranno in *involuzione*.

Se poi il primo, o pure il secondo, dei suddetti determinanti è gobbo simmetrico, σ o pure Σ sarà indeterminato, Ω_1 ed Ω' coincideranno con l'arco che congiunge ω con un punto fisso o, o pure ω_1 ed ω' coincideranno col punto d'incontro di Ω con un arco fisso O; l'arco omologo di o, ed il punto omologo di O saranno poi del tutto indeterminati.

12. Riferendo i sistemi (s, S), (S_1, s_1), (S', s') alla medesima terna (efg, EFG) degli elementi doppii, la loro dipendenza equianarmonica sarà espressa dall'equazioni

$$(1) \quad \begin{aligned} X_1 : Y_1 : Z_1 :: v_1 y : u_1 x : w_1 z \;, \quad X' : Y' : Z' :: v'y : u'x : w'z \;, \\ x_1 : y_1 : z_1 :: V_1 Y : U_1 X : W_1 Z \;, \quad x' : y' : z' :: V'Y : U'X : W'Z \;, \end{aligned}$$

essendo

$$\frac{u_1 sen fF}{v' sen eE}=\frac{v_1 sen eE}{u' sen fF}=\frac{w_1}{w'}\,, \quad u_1V'=v_1U'=w_1W',$$

$$\frac{U_1 sen fF}{V' sen eE}=\frac{V_1 sen eE}{U' sen fF}=\frac{W_1}{W'}\,, \quad U_1v'=V_1u'=W_1w';$$

o pure, indicando con α, β, γ quantità costanti, dall'equazioni

$$\alpha:\beta:\gamma::\frac{sen\,\omega E}{sen\,\Omega_1 f}:\frac{sen\,\omega F}{sen\,\Omega_1 e}:\frac{sen\,\omega G}{sen\,\Omega_1 g}::\frac{sen\,\omega' E}{sen\,\Omega f}:\frac{sen\,\omega' F}{sen\,\Omega e}:\frac{sen\,\omega' G}{sen\,\Omega g}$$

$$(2)\qquad ::\frac{sen\,\omega F}{sen\,\Omega' e}sen^2 eE:\frac{sen\,\omega E}{sen\,\Omega' f}sen^2 fF:\frac{sen\,\omega G}{sen\,\Omega' g}sen\,eE\,sen\,fF$$

$$::\frac{sen\,\omega_1 F}{sen\,\Omega e}sen^2 eE:\frac{sen\,\omega_1 E}{sen\,\Omega f}sen^2 fF:\frac{sen\,\omega_1 G}{sen\,\Omega g}sen\,eE\,sen\,fF\,.$$

Le equazioni di σ, considerato come sistema di punti o di archi, saranno

$$(3)\qquad \begin{aligned} &xy(\beta\,sen\,eE+\alpha\,sen\,fF)+z^2\frac{\alpha\beta}{\gamma}sen\,gG=0\,,\\ &4XY\frac{\alpha\beta}{\gamma}sen\,eE\,sen\,fF+Z^2(\beta\,sen\,eE+\alpha\,sen\,fF)sen\,gG=0\,,\end{aligned}$$

e quelle di Σ, considerato come sistema di archi o di punti, saranno

$$(4)\qquad \begin{aligned} &XY(\beta\,sen\,eE+\alpha\,sen\,fF)+Z^2\gamma\,sen\,gG=0\,,\\ &4xy\gamma\,sen\,eE\,sen\,fF+z^2(\beta\,sen\,eE+\alpha\,sen\,fF)sen\,gG=0\,.\end{aligned}$$

I sistemi (s_1, S_1) ed (s', S') sono in dipendenza equianarmonica espressa dall'equazioni

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\frac{sen\,\omega_1 E}{sen\,\omega' E}:\frac{sen\,\omega_1 F}{sen\,\omega' F}:\frac{sen\,\omega_1 G}{sen\,\omega' G}::\frac{sen\,\Omega' e}{sen\,\Omega_1 e}:\frac{sen\,\Omega' f}{sen\,\Omega_1 f}:\frac{sen\,\Omega' g}{sen\,\Omega_1 g}\\ &::\beta^2 sen^2 eE:\alpha^2 sen^2 fF:\alpha\beta\,sen\,eE\,sen\,fE\,,\end{aligned}$$

ed i diversi casi particolari di questa dipendenza danno quelli che corrispondono ai sistemi eterografici proposti. I due casi più notevoli si hanno: 1° allorchè $\beta\,sen\,eE=-\alpha\,sen\,fF$; allora (s_1, S_1) ed (s', S') sono in involuzione totale, σ secondo che si considera come sistema di punti o di archi si riduce all'arco G preso due volte, o pure alla coppia di

punti (e,f); e Σ secondo che si considera come sistema di archi o di punti si riduce al punto g preso due volte, o pure alla coppia di archi (E,F); gli archi Ω_1 ed Ω' corrispondenti al punto ω passano pel punto d'incontro di G con ωg, e sono coniugati armonici rispetto a questi due archi, come i punti ω_1 ed ω' corrispondenti all'arco Ω appartengono all'arco che congiunge g con ΩG, e sono coniugati armonici rispetto a questi due punti: 2° allorchè si ha $\beta sen e E = \alpha sen f F$; allora (s_1, S_1) ed (s', S') sono sistemi identici, σ e Σ si riducono ad un solo sistema di 2° ordine (σ, Σ), ed i sistemi eterografici sono in involuzione.

Non ci tratteniamo sull'ipotesi dei valori nulli o infiniti di α, β o γ, nè su quella della coincidenza di due elementi doppii.

Se in (s,S) un sistema di 2° ordine passa per (e,f) e tocca (E,F), i sistemi omologhi in (S_1, s_1) ed in (S', s') coincideranno in uno stesso sistema di 2° ordine che passa anche per (e,f) e tocca (E,F); se poi si considera l'uno o l'altro dei due sistemi di 2° ordine di punti e di archi rappresentati dall'equazioni

$$(6)\qquad \begin{aligned} &\pm 2xy\sqrt{\alpha\beta\, sen eE\, sen fF} + z^2\frac{\alpha\beta}{\gamma} sen gG = 0\,, \\ &\pm 2XY\sqrt{\alpha\beta\, sen eE\, sen fF} + Z^2\,\gamma\, sen gG = 0\,, \end{aligned}$$

ciascuno di essi considerato in (s,S) coinciderà col suo omologo in (S_1, s_1) ed in (S', s').

Supponiamo i sistemi eterografici in involuzione, e riferiamoli alla terna ortogonale (abc, ABC), coniugata comune rispetto a (σ, Σ) ed al sistema di 2° ordine immaginario all'infinito. I sistemi σ e Σ di punti e di archi saranno rappresentati da equazioni della forma

$$(7)\qquad \lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 = 0\,, \qquad \frac{X^2}{\lambda} + \frac{Y^2}{\mu} + \frac{Z^2}{\nu} = 0\,,$$

e la dipendenza equianarmonica tra i sistemi eterografici (s,S) ed (S,s) sarà espressa dalle relazioni

$$(8)\qquad X : Y : Z :: \lambda x : \mu y : \nu z\,; \qquad x : y : z :: \frac{X}{\lambda} : \frac{Y}{\mu} : \frac{Z}{\nu}\,.$$

Ad ogni arco ciclico in uno dei sistemi corrisponde un punto focale nell'altro, che è il punto armonico di quell'arco rispetto a (σ, Σ), e vi-

ceversa ; le coppie degli archi ciclici e dei punti focali corrispondenti sono rappresentate rispettivamente dall'equazioni

$$(\mu^2-\lambda^2)y^2+(\nu^2-\lambda^2)z^2=0\ ; \qquad \frac{\mu^2-\lambda^2}{\mu^2}Y^2+\frac{\nu^2-\lambda^2}{\nu^2}Z^2=0\ ,$$

$$(9) \qquad (\nu^2-\mu^2)z^2+(\lambda^2-\mu^2)x^2=0\ ; \qquad \frac{\nu^2-\mu^2}{\nu^2}Z^2+\frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2}X^2=0\ ,$$

$$(\lambda^2-\nu^2)x^2+(\mu^2-\nu^2)y^2=0\ ; \qquad \frac{\lambda^2-\nu^2}{\lambda^2}X^2+\frac{\mu^2-\nu^2}{\mu^2}Y^2=0\ .$$

Se due tra le quantità λ, μ, ν sono eguali, coincideranno due coppie di archi ciclici in un solo arco A, B o C, e due coppie di punti focali in un solo punto a, b o c; l'involuzione dei sistemi si dirà allora *circolare*: se poi λ, μ e ν sono tutte e tre eguali tra loro, gli archi ciclici ed i punti focali saranno del tutto indeterminati ; in tal caso ogni punto in un sistema è il polo del suo arco omologo nell' altro, l' involuzione perciò si dirà allora *ortogonale*.

Se due sistemi eterografici appartengono a due superficie sferiche di raggio 1, ma di centri diversi, si possono sempre far coincidere le due superficie sferiche in modo che i sistemi siano in involuzione, e ciò facendo coincidere convenientemente tra loro le terne principali omologhe dei due sistemi; se vi sono infinite terne principali omologhe, che in ciascun sistema hanno un punto ed un arco di comune , vale a dire se la dipendenza equianarmonica è *circolare*, l'involuzione risulterà anche circolare; e finalmente se i sistemi sono eguali, vale a dire se l'arco compreso fra due punti qualunque in uno dei sistemi è eguale a quello che misura l'angolo compreso dagli archi omologhi nell'altro, l'involuzione sarà ortogonale.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA
DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SULLE INVOLUZIONI DEI DIVERSI ORDINI NEI SISTEMI DI 2ª SPECIE

MEMORIA

DEL SOCIO ORDINARIO G. BATTAGLINI

letta nell' adunanza del dì 4 luglio 1865.

Allorchè in due sistemi di 1ª o di 2ª specie in dipendenza equianarmonica ed appartenenti ad una stessa forma geometrica si considerano gli elementi omologhi *consecutivi* di un dato elemento, se due di essi coincidano tra loro, i due sistemi saranno in *involuzione* di un certo ordine. La discussione delle involuzioni dei diversi ordini nei sistemi di 1ª specie forma l'oggetto di una Memoria già pubblicata nel 1° Volume degli Atti dell'Accademia; con questo scritto vengo ora ad estendere gli stessi principii ai sistemi di 2ª specie. Per darsi facilmente ragione delle formole e dei risultati seguenti giova consultare, oltre della suddetta Memoria, l'altra *sulle forme geometriche di 2ª specie*, precedentemente presentata all'Accademia, come anche la Nota sullo stesso argomento inserita nel Rendiconto.

1. Siano in due sistemi omografici di 2ª specie, in dipendenza equianarmonica, appartenenti ad una stessa forma geometrica (sistemi di punti e di archi appartenenti ad una stessa superficie sferica) i punti $\omega_1, \omega_2 \dots \omega_i$ e gli archi $\Omega_1, \Omega_2 \dots \Omega_i$ omologhi rispettivamente de' punti $\omega_0, \omega_1 \dots \omega_{i-1}$ e degli archi $\Omega_0, \Omega_1 \dots \Omega_{i-1}$ passando dal primo sistema nel secondo, e similmente siano $\omega_{-1}, \omega_{-2} \dots \omega_{-i}$ ed $\Omega_{-1}, \Omega_{-2} \dots \Omega_{-i}$ omologhi rispettivamente di $\omega_0, \omega_{-1} \dots \omega_{-i+1}$ e di $\Omega_0, \Omega_{-1} \dots \Omega_{-i+1}$ passando dal secondo sistema nel primo; due qualunque di questi elementi ω_μ, ω_ν ed Ω_μ, Ω_ν si potranno considerare come punti ed archi omologhi

in due sistemi in dipendenza equianarmonica; le coppie (ω_0, ω_i), (Ω_0, Ω_i) o pure (ω_0, ω_{-i}), (Ω_0, Ω_{-i}) si diranno *appartenenti a due sistemi equianarmonici consecutivi d'ordine* i, *o pure* —i; le coppie (ω_μ, ω_ν) ed (Ω_μ, Ω_ν) apparterranno quindi a due sistemi consecutivi d' ordine $\nu - \mu$.

Sia (efg, EFG) la terna degli elementi doppii dei sistemi equianarmonici proposti; indicando con α, β, γ quantità costanti si avranno le relazioni (*)

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\frac{sen\,E\omega_i}{sen\,E\omega_{i-1}} : \frac{sen\,F\omega_i}{sen\,F\omega_{i-1}} : \frac{sen\,G\omega_i}{sen\,G\omega_{i-1}} :: \alpha : \beta : \gamma\,, \\ &\frac{sen\,e\Omega_{i-1}}{sen\,e\Omega_i} : \frac{sen\,f\Omega_{i-1}}{sen\,f\Omega_i} : \frac{sen\,g\Omega_{i-1}}{sen\,g\Omega_i} :: \alpha : \beta : \gamma\,, \end{aligned}$$

e quindi, qualunque sia il segno di i, sarà

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\frac{sen\,E\omega_i}{sen\,E\omega_0} : \frac{sen\,F\omega_i}{sen\,F\omega_0} : \frac{sen\,G\omega_i}{sen\,G\omega_0} :: \alpha' : \beta' : \gamma'\,, \\ &\frac{sen\,e\Omega_0}{sen\,e\Omega_i} : \frac{sen\,f\Omega_0}{sen\,f\Omega_i} : \frac{sen\,g\Omega_0}{sen\,g\Omega_i} :: \alpha' : \beta' : \gamma'\,. \end{aligned}$$

Si suppongano per ora le quantità $\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^i$, $\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^i$, $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^i$ diverse dall'unità; non potrà coincidere ω_i con ω_0 ed Ω_i con Ω_0 se non quando coincide ω_0 con uno dei punti e, f, g ed Ω_0 con uno degli archi E, F, G; adunque *due sistemi equianarmonici consecutivi d'ordine qualunque hanno sempre gli stessi elementi doppii.*

Due tra le quantità $\frac{\beta}{\gamma}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$, $\frac{\alpha}{\beta}$ si possono supporre insieme minori o maggiori dell' unità; supponendo $\frac{\beta}{\gamma} < 1$, e $\frac{\gamma}{\alpha} < 1$, per i infinito coincideranno rispettivamente i punti ω_i ed ω_{-i} con e ed f, e gli archi Ω_i ed Ω_{-i} con F ed E, e supponendo $\frac{\beta}{\gamma} > 1$ e $\frac{\gamma}{\alpha} > 1$ coincideranno viceversa ω_i ed ω_{-i} con f ed e, Ω_i ed Ω_{-i} con E ed F; adunque *nei sistemi equianarmonici consecutivi due punti e due archi doppii reali sono limiti ai quali si avvicinano rispettivamente i punti e gli archi omologhi consecutivi di un punto e di un arco qualunque, crescendo positivamente e negativamente l'indice che dinota l'ordine di quegli elementi omologhi.*

(*) Memoria sulle forme geometriche di 2ª specie.

Se i due punti ω_0 ed ω_{-0} ed i due archi Ω_0 ed Ω_{-0} sono *coniugati* (*) rispetto al quadrilatero Q che ha per vertici i punti che bisegano internamente ed esternamente gli archi fg, ge, ef, o pure sono *coniugati* rispetto al quadrangolo q che ha per lati gli archi che bisegano internamente ed esternamente gli angoli FG, GE, EF, si troverà facilmente, per le formole (2), che gli elementi omologhi consecutivi d'ordini eguali e di segni contrarii (ω_i, ω_{-i}) di (ω_0, ω_{-0}), (Ω_i, Ω_{-i}) di (Ω_0, Ω_{-0}) saranno anche coniugati rispetto al quadrilatero Q, o pure coniugati rispetto al quadrangolo q. Questi elementi coniugati si diranno *simmetrici* rispetto ai bisettori degli archi, o pure degli angoli, della terna (efg, EFG).

Considerando le coppie (ω_i, ω_{-i}) ed (Ω_i, Ω_{-i}) dei punti e degli archi consecutivi di ω_0 ed Ω_0, si avrà per l'equazioni (2)

$$(3)\qquad \begin{aligned} &\frac{sen\,E\omega_i\, sen\,E\omega_{-i}}{sen^2 E\omega_0} = \frac{sen\,F\omega_i\, sen\,F\omega_{-i}}{sen^2 F\omega_0} = \frac{sen\,G\omega_i\, sen\,G\omega_{-i}}{sen^2 G\omega_0}, \\ &\frac{sen\,e\Omega_i\, sen\,e\Omega_{-i}}{sen^2 e\Omega_0} = \frac{sen\,f\Omega_i\, sen\,f\Omega_{-i}}{sen^2 f\Omega_0} = \frac{sen\,g\Omega_i\, sen\,g\Omega_{-i}}{sen^2 g\Omega_0}; \end{aligned}$$

segue da ciò (**) che le coppie di archi $(e\omega_i, e\omega_{-i})$, $(f\omega_i, f\omega_{-i})$, $(g\omega_i, g\omega_{-i})$, o pure le coppie di punti $(E\Omega_i, E\Omega_{-i})$, $(F\Omega_i, F\Omega_{-i})$, $(G\Omega_i, G\Omega_{-i})$, determinano rispettivamente con le coppie (F, G), (G, E), (E, F), o pure con le coppie (f, g), (g, e), (e, f), involuzioni di archi o di punti, in cui uno degli archi doppii è $e\omega_0$, $f\omega_0$, $g\omega_0$, o pure uno dei punti doppii è $E\Omega_0$, $F\Omega_0$, $G\Omega_0$; in altri termini i punti ω_i, ω_{-i} sono *coniugati* rispetto al quadrilatero che ha per archi diagonali E, F, G e per uno dei suoi lati l'arco coniugato armonico di ω_0 rispetto alla terna (E, F, G), e similmente gli archi Ω_i, Ω_{-i} sono coniugati rispetto al quadrangolo che ha per punti diagonali e, f, g e per uno dei suoi vertici il punto coniugato armonico di Ω_0 rispetto alla terna (e, f, g). Si avrà dunque la proprietà: *Nei sistemi equianarmonici consecutivi, l'arco coniugato armonico di un punto, rispetto alla coppia degli archi che congiungono i suoi punti consecutivi di ordini eguali e di segni contrarii con un punto doppio, è anche coniugato armonico del punto proposto rispetto alla coppia degli archi doppii che passano per quel punto doppio; e similmente il punto coniugato armonico di un arco, rispetto alla coppia dei punti d'intersezione dei suoi*

(*) Nota sulle forme geometriche di 2ª specie

(**) Nota citata.

archi consecutivi di ordini eguali e di segni contrarii con un arco doppio, è anche coniugato armonico dell'arco proposto, rispetto alla coppia dei punti doppii che appartengono a quell'arco doppio.

Se i punti doppii e ed f coincidono in un punto o, e quindi gli archi doppii E ed F coincidono in un arco O, indicando con (o_{i-1}, o_i) e (g_{i-1}, g_i) coppie di punti omologhi appartenenti rispettivamente ad O e G, con (O_{i-1}, O_i) e (G_{i-1}, G_i) coppie di archi omologhi condotti rispettivamente per o e g, e con μ e ν due costanti, si avrà per la dipendenza equianarmonica dei sistemi proposti (*)

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{sen\, oo_i}{sen\, oo_{i-1}} : \dfrac{sen\, go_i}{sen\, go_{i-1}} = \mu = \dfrac{sen\, OO_{i-1}}{sen\, OO_i} : \dfrac{sen\, GO_{i-1}}{sen\, GO_i}, \\ sen\, go\left(\dfrac{1}{tan\, og_i} - \dfrac{1}{tan\, og_{i-1}}\right) = \nu = sen\, GO\left(\dfrac{1}{tan\, OG_i} - \dfrac{1}{tan\, OG_{i-1}}\right) \end{cases}$$

e quindi sarà

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{sen\, oo_i}{sen\, oo_0} : \dfrac{sen\, go_i}{sen\, go_0} = \mu^i = \dfrac{sen\, OO_0}{sen\, OO_i} : \dfrac{sen\, GO_0}{sen\, GO_i}, \\ sen\, go\left(\dfrac{1}{tan\, og_i} - \dfrac{1}{tan\, og_0}\right) = i\nu = sen\, GO\left(\dfrac{1}{tan\, OG_i} - \dfrac{1}{tan\, OG_0}\right). \end{cases}$$

Se poi rimanendo fissi E ed F, l'arco G passa per g, o pure rimanendo fissi e ed f il punto g cade in G, indicando con (e_{i-1}, e_i) ed (f_{i-1}, f_i) coppie di punti omologhi appartenenti rispettivamente ad E ed F, o pure indicando con (E_{i-1}, E_i) ed (F_{i-1}, F_i) coppie di archi omologhi condotti rispettivamente per e ed f, si avrà

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{tan\, ge_i} - \dfrac{1}{tan\, ge_{i-1}} = \mu, \quad \dfrac{1}{tan\, gf_i} - \dfrac{1}{tan\, gf_{i-1}} = \nu, \\ \text{o pure} \\ \dfrac{1}{tan\, GE_i} - \dfrac{1}{tan\, GE_{i-1}} = \mu, \quad \dfrac{1}{tan\, GF_i} - \dfrac{1}{tan\, GF_{i-1}} = \nu, \end{cases}$$

e quindi verrà

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{tan\, ge_i} - \dfrac{1}{tan\, ge_0} = i\mu, \quad \dfrac{1}{tan\, gf_i} - \dfrac{1}{tan\, gf_0} = i\nu, \\ \dfrac{1}{tan\, GE_i} - \dfrac{1}{tan\, GE_0} = i\mu, \quad \dfrac{1}{tan\, GF_i} - \dfrac{1}{tan\, GF_0} = i\nu. \end{cases}$$

Queste formole mostrano come le proprietà stabilite precedentemente

(*) Memoria sulle forme geometriche di 2ª specie.

sui sistemi equianarmonici consecutivi, definiti dalle relazioni (2), reggono ancora nei casi speciali corrispondenti alle relazioni (5) e (7).

2. Se nell'equazioni (2) del numero precedente si supponga, per un valore m di i, $\alpha^m = -\beta^m$, le coppie dei punti omologhi consecutivi d'ordine m appartenenti a G saranno in involuzione, del pari che le coppie di archi omologhi consecutivi dello stesso ordine condotti per g: i sistemi consecutivi si diranno allora in *involuzione parziale d'ordine* $2m$, relativa ad un punto e ad un arco doppio. Se g_0 è il punto medio dell'arco ef, e G_0 è l'arco che divide per metà l'angolo EF, ponendo $g_0 g_i = \theta_i$, $G_0 G_i = \Theta_i$, essendo

$$\alpha = \beta\left(cos\frac{(2\mu+1)\pi}{m} + \sqrt{-1}\, sen\frac{(2\mu+1)\pi}{m}\right),$$

(in cui μ dinota un numero intero arbitrario, e π il rapporto della circonferenza al diametro) si troverà, qualunque sia i, (*)

$$(1)\qquad \begin{aligned} tan\, eg_0 = tan\, g_0 f = \sqrt{-1}\,\frac{tan\theta_i}{tan\, i\frac{(2\mu+1)\pi}{2m}}, \\ tan\, FG_0 = tan\, G_0 E = \sqrt{-1}\,\frac{tan\Theta_i}{tan\, i\frac{(2\mu+1)\pi}{2m}}. \end{aligned}$$

Sia in secondo luogo $\alpha^m = \beta^m$; due punti omologhi consecutivi d'ordine m apparterranno ad un arco che passa per g, e due archi omologhi consecutivi dello stesso ordine concorreranno in un punto di G; i sistemi consecutivi si diranno allora in *involuzione parziale d'ordine* m, relativa ad un punto e ad un arco doppio, o pure *prospettici d'ordine* m, essendo g e G il centro e l'asse di prospettiva. Ritenute le denominazioni precedenti, essendo in tal caso

$$\alpha = \beta\left(cos\frac{2\mu\pi}{m} + \sqrt{-1}\, sen\frac{2\mu\pi}{m}\right),$$

verrà

$$(2)\qquad tan\, eg_0 = tan\, g_0 f = \sqrt{-1}\,\frac{tan\theta_i}{tan\, i\frac{\mu\pi}{m}},\quad tan\, FG_0 = tan\, G_0 E = \sqrt{-1}\,\frac{tan\Theta_i}{tan\, i\frac{\mu\pi}{m}}.$$

Sia ora $\alpha^m = \beta^m = -\gamma^m$; i sistemi consecutivi saranno ancora prospettici

(*) Memoria sulle involuzioni dei diversi ordini.

d'ordine m, ma oltre a ciò le coppie di punti omologhi consecutivi d'ordine m formeranno sull'arco Ω che li congiunge un'involuzione che ha per punti doppii g e ΩG, e similmente le coppie di archi omologhi consecutivi d' ordine m formeranno intorno al loro punto di concorso ϖ un'involuzione che ha per archi doppii G ed ϖg; si diranno perciò i sistemi consecutivi in *involuzione totale d' ordine* $2m$.

Indicando con o_i il punto in cui l'arco $g\varpi_i$ incontra l'arco G si avrà evidentemente

$$(3)\quad \begin{aligned} &\frac{sen\, g\omega_i}{sen\, \omega_i o_i} : \frac{sen\, g\omega_{i-1}}{sen\, \omega_{i-1} o_{i-1}} = \frac{\alpha}{\gamma} : \frac{sen\, fo_i}{sen\, fo_{i-1}} = \frac{\beta}{\gamma} : \frac{sen\, eo_i}{sen\, eo_{i-1}}, \\ &\frac{sen\, g\omega_i}{sen\, \omega_i o_i} : \frac{sen\, g\omega_0}{sen\, \omega_0 o_0} = \frac{\alpha^i}{\gamma^i} : \frac{sen\, fo_i}{sen\, fo_0} = \frac{\beta^i}{\gamma^i} : \frac{sen\, eo_i}{sen\, eo_0}, \end{aligned}$$

quindi supponendo che o_0 coincida con g_0, e ponendo

$$\alpha = \gamma\left(cos\frac{\mu\pi}{m} + \sqrt{-1}\, sen\frac{\mu\pi}{m}\right), \quad \beta = \gamma\left(cos\frac{\mu\pi}{m} - \sqrt{-1}\, sen\frac{\mu\pi}{m}\right),$$

con μ numero dispari, verrà

$$(4)\quad \frac{sen\, g\omega_i}{sen\, \omega_i g_i} : \frac{sen\, g\omega_0}{sen\, \omega_0 g_0} = \left(\frac{\alpha^i}{\gamma^i} + \frac{\beta^i}{\gamma^i}\right) \frac{sen\, \frac{1}{2} ef}{sen\, eg_i + sen\, g_i f} = \frac{cos\, i\frac{\mu\pi}{m}}{cos\, \theta_i}.$$

Similmente indicando con O_i l'arco condotto dal punto $G\Omega_i$ al punto g si avrà

$$(3)\quad \begin{aligned} &\frac{sen\, G\Omega_i}{sen\, \Omega_i O_i} : \frac{sen\, G\Omega_{i-1}}{sen\, \Omega_{i-1} O_{i-1}} = \frac{\gamma}{\alpha} : \frac{sen\, FO_i}{sen\, FO_{i-1}} = \frac{\gamma}{\beta} : \frac{sen\, EO_i}{sen\, EO_{i-1}}, \\ &\frac{sen\, G\Omega_i}{sen\, \Omega_i O_i} : \frac{sen\, G\Omega_0}{sen\, \Omega_0 O_0} = \frac{\gamma^i}{\alpha^i} : \frac{sen\, FO_i}{sen\, FO_0} = \frac{\gamma^i}{\beta^i} : \frac{sen\, EO_i}{sen\, EO_0}, \end{aligned}$$

quindi supponendo che O_0 coincida con G_0, si avrà

$$(4)\quad \frac{sen\, G\Omega_i}{sen\, \Omega_i G_i} : \frac{sen\, G\Omega_0}{sen\, \Omega_0 G_0} = \left(\frac{\gamma^i}{\alpha^i} + \frac{\gamma^i}{\beta^i}\right) \frac{sen\, \frac{1}{2} EF}{sen\, EG_i + sen\, G_i F} = \frac{cos\, i\frac{\mu\pi}{m}}{cos\, \Theta_i}.$$

Le formole (2) e (4) adunque definiscono l'involuzione totale d'ordine $2m$.

Finalmente supponiamo che si abbia $\alpha^m = \beta^m = \gamma^m$; due punti e due archi omologhi consecutivi d'ordine m coincideranno tra loro; i sistemi

si diranno allora in *involuzione totale d'ordine* m, o pure *identici d'ordine* m. In tal caso dovranno verificarsi le formole (2) e (4), supponendo però che μ sia un numero pari.

Nel caso dell' equazioni (5) del numero precedente se si suppone $\nu=0$, e $\mu=\pm 1$, i sistemi o saranno identici di primo ordine, o pure due archi omologhi consecutivi d' ordine dispari concorreranno in un punto ω di G e saranno coniugati armonici rispetto a G ed ωg, e due punti omologhi consecutivi d'ordine dispari apparterranno ad un arco Ω che passa per g, e saranno coniugati armonici rispettto a g ed ΩG. Finalmente nel caso dell'equazione (7) del medesimo numero, supponendo $\mu=0$, e $\nu=0$, i sistemi saranno identici di primo ordine.

Risulta dalle formole precedenti che per le involuzioni, parziali o totali, d'ordine superiore a 2, due punti e due archi doppii saranno sempre immaginarii, e potranno avere diverse posizioni in ciascun ordine (supponendo dati il punto e l'arco doppio reali) per l'indeterminazione del numero μ; inoltre se $m=m_1 m_2 \ldots . m_n$, le involuzioni relative al numero m comprenderanno quelle relative ai numeri $m_1, m_2 \ldots . m_n$.

3. Se i sistemi equianarmonici proposti sono in involuzione parziale d'ordine $m>2$, relativa al punto doppio g e all'arco doppio G, i punti o_i e gli archi O_i costituiranno sistemi di 1ª specie in involuzione d'ordine m, quindi i rapporti anarmonici $(e, o_{i-1} o_i o_{i+1})$, $(f, o_{i-1} o_i o_{i+1})$ o pure $(E, O_{i-1} O_i O_{i+1})$, $(F, O_{i-1} O_i O_{i+1})$ (*) che i punti doppii e ed f determinano con tre punti consecutivi qualunque o_{i-1}, o_i, o_{i+1} di G, o pure che gli archi doppii E ed F determinano con tre archi consecutivi qualunque O_{i-1}, O_i, O_{i+1} condotti per g, saranno eguali ad una radice immaginaria m^a dell' unità positiva o negativa, secondo che l'ordine m dell' involuzione è pari o dispari.

Se l'ordine dell' involuzione è un numero pari $2m$, ed i sistemi non sono anche in involuzione parziale d'ordine m, gli archi che congiungono i punti ω_1, ω_m con g saranno coniugati armonici rispetto alla coppia (E, F), ed i punti d'incontro degli archi Ω_1, Ω_m con G saranno coniugati armonici rispetto alla coppia (e, f).

Nell'involuzione parziale d'ordine m, relativa a g e G, chiamando *ciclo* di punti o di archi il gruppo dei punti $(o_1, o_2 \ldots . o_m)$ o degli archi $(O_1, O_2 \ldots . O_m)$, *punti armonici* dei diversi ordini di un arco Ω rispetto

(*) Memoria sulle involuzioni dei diversi ordini.

ad $(o_1, o_2 \ldots o_m)$ i punti armonici (*) rispetto a questo ciclo del punto ΩG, ed *archi armonici* dei diversi ordini di un punto ω rispetto ad $(O_1, O_2 \ldots O_m)$ gli archi armonici rispetto a questo ciclo dell'arco ωg, si avranno le proprietà:

1° In un' involuzione parziale d' ordine m, *i punti o gli archi armonici d'ordine* n$<$m *di un arco o di un punto, rispetto ad un ciclo qualunque di punti o di archi dell' involuzione, costituiscono un ciclo di un' involuzione parziale d' ordine* n, *che ha gli stessi elementi doppii con la proposta involuzione.*

2° In un' involuzione parziale, i punti e gli archi doppii immaginarii sono elementi armonici gli uni degli altri, dei diversi ordini, rispetto ad un ciclo qualunque dell' involuzione.

3° Considerando il gruppo di punti o di archi armonici d' ordine n, *di un arco o di un punto, rispetto ad un ciclo di punti o di archi di un' involuzione parziale d'ordine* m, *i punti o gli archi armonici dei diversi ordini di quell' arco, o di quel punto, rispetto al gruppo proposto, saranno anche punti ed archi armonici dei medesimi ordini, dello stesso arco o dello stesso punto, rispetto a quel ciclo della proposta involuzione.*

4° Due punti, o due archi, rispettivamente armonici dello stesso ordine di due archi o di due punti, rispetto ad un ciclo di punti o di archi di un involuzione parziale, apparterranno, al variare di quel ciclo, a due sistemi equianarmonici, che hanno gli stessi elementi doppii con la data involuzione.

Consideriamo ora un' involuzione totale d' ordine $m > 2$. Essendo in tal caso (supposto μ un numero pari)

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \cos\frac{\mu\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{\mu\pi}{m}\,, \qquad \frac{\beta}{\gamma} = \cos\frac{\mu\pi}{m} - \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{\mu\pi}{m}\,,$$

sarà $\alpha\beta = \gamma^2$, e quindi verrà

$$(1)\quad \frac{\mathrm{sen}\,E\omega_i\,\mathrm{sen}\,F\omega_i}{\mathrm{sen}^2 G\omega_i} = \frac{\mathrm{sen}\,E\omega_0\,\mathrm{sen}\,F\omega_0}{\mathrm{sen}^2 G\omega_0}\,, \qquad \frac{\mathrm{sen}\,e\Omega_i\,\mathrm{sen}\,f\Omega_i}{\mathrm{sen}^2 g\Omega_i} = \frac{\mathrm{sen}\,e\Omega_0\,\mathrm{sen}\,f\Omega_0}{\mathrm{sen}^2 g\Omega_0}\,,$$

adunque i punti $(\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_m)$ e gli archi $(\Omega_1, \Omega_2 \ldots \Omega_m)$ che costituiscono *cicli* della proposta involuzione, apparterranno ad un sistema di 2° ordine di punti o di archi; tutti questi sistemi, corrispondenti alle diverse posizioni di ω_0 e di Ω_0 hanno tra loro un doppio contatto imma-

(*) Memoria citata.

ginario, i punti e gli archi di contatto essendo i punti e gli archi doppii immaginarii (e, f) ed (E, F) della involuzione.

Indicando con ω ed Ω uno qualunque degli elementi di un ciclo di punti o di archi di un'involuzione d'ordine m, e con ω_i ed Ω_i un elemento determinato di quel ciclo, si avrà

$$\frac{sen^m E\omega}{sen^m E\omega_i} = \frac{sen^m F\omega}{sen^m F\omega_i} = \frac{sen^m G\omega}{sen^m G\omega_i} .$$

$$\frac{sen^m e\Omega}{sen^m e\Omega_i} = \frac{sen^m f\Omega}{sen^m f\Omega_i} = \frac{sen^m g\Omega}{sen^m g\Omega_i} .$$

Viceversa se m punti ω, o m archi Ω sono determinati da equazioni di questa forma, quei punti e quegli archi costituiranno cicli di un'involuzione d'ordine m.

Se l'ordine dell'involuzione è un numero pari $2m$, ed i sistemi non sono anche in involuzione d'ordine m, i punti ω_1, ω_m apparterranno ad un arco che passa per g, e gli archi Ω_1, Ω_m concorreranno in un punto di G.

Chiamiamo due punti ω', ω'' armonici l'uno dell'altro, di un certo ordine, rispetto al ciclo $(\omega_1, \omega_2 \ldots . \omega_m)$ allorchè gli archi (immaginarii o reali) che li congiungono con ciascuno dei punti doppii e, f o g, sono armonici l'uno dell'altro, del dato ordine, rispetto al gruppo degli archi che congiungono i punti di quel ciclo con lo stesso punto doppio; e similmente chiamiamo due archi Ω', Ω'' armonici l'uno dell'altro, di un certo ordine, rispetto al ciclo $(\Omega_1, \Omega_2 \ldots . \Omega_m)$ allorchè i loro punti d'intersezione (immaginarii o reali) con ciascuno degli archi doppii E, F o G sono armonici l'uno dell'altro, del dato ordine, rispetto al gruppo dei punti d'intersezione degli archi di quel ciclo con lo stesso arco doppio. Supposto $m' + m'' = m$, se (ω', ω'') ed (Ω', Ω'') verificano rispettivamente l'equazioni

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{sen^{m'} E\omega' \, sen^{m''} E\omega''}{sen^m E\omega_i} = \dfrac{sen^{m'} F\omega' \, sen^{m''} F\omega''}{sen^m F\omega_i} = \dfrac{sen^{m'} G\omega' \, sen^{m''} G\omega''}{sen^m G\omega_i} \\[2ex] \dfrac{sen^{m'} e\Omega' \, sen^{m''} e\Omega''}{sen^m e\Omega_i} = \dfrac{sen^{m'} f\Omega' \, sen^{m''} f\Omega''}{sen^m f\Omega_i} = \dfrac{sen^{m'} g\Omega' \, sen^{m''} g\Omega''}{sen^m g\Omega_i} \end{cases}$$

saranno (*) rispettivamente ω'' ed Ω'' armonici d'ordine m'' di ω' ed Ω',

(*) Memoria sulle involuzioni dei diversi ordini.

e viceversa ω' ed Ω' armonici d'ordine m' di ω'' ed Ω'' rispetto ai cicli $(\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_m)$ ed $(\Omega_1, \Omega_2 \ldots \Omega_m)$.

Se ω'_i ed ω''_i verificano l'equazione (2) e rimane fisso ω'_i o pure ω''_i, le m'' posizioni del punto ω'', o pure le m' posizioni del punto ω', determinate rispettivamente dall'equazioni

$$\frac{sen^{m''} E\omega''}{sen^{m''} E\omega''_i} = \frac{sen^{m''} F\omega''}{sen^{m''} F\omega''_i} = \frac{sen^{m''} G\omega''}{sen^{m''} G\omega''_i} \,; \qquad \frac{sen^{m'} E\omega'}{sen^{m'} E\omega'_i} = \frac{sen^{m'} F\omega'}{sen^{m'} F\omega'_i} = \frac{sen^{m'} G\omega'}{sen^{m'} G\omega'_i}$$

saranno rispettivamente i punti armonici d'ordine m'' di ω'_i, ed i punti armonici d'ordine m' di ω''_i rispetto ad $(\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_m)$. Similmente se Ω'_i ed Ω''_i verificano l'equazione (2) e rimane fisso Ω'_i o pure Ω''_i, le m'' posizioni dell'arco Ω'', o pure le m' posizioni dell'arco Ω' determinate rispettivamente dall'equazioni

$$\frac{sen^{m''} e\Omega''}{sen^{m''} e\Omega''_i} = \frac{sen^{m''} f\Omega''}{sen^{m''} f\Omega''_i} = \frac{sen^{m''} g\Omega''}{sen^{m''} g\Omega''_i} \,; \qquad \frac{sen^{m'} e\Omega'}{sen^{m'} e\Omega'_i} = \frac{sen^{m'} f\Omega'}{sen^{m'} f\Omega'_i} = \frac{sen^{m'} g\Omega'}{sen^{m'} g\Omega'_i} \,,$$

saranno rispettivamente gli archi armonici d'ordine m'' di Ω'_i, e gli archi armonici d'ordine m' di Ω''_i rispetto ad $(\Omega_1, \Omega_2 \ldots \Omega_m)$. Adunque: *In un'involuzione totale d'ordine* m, *i punti o gli archi armonici d'ordine* n$<$m *di un punto o di un arco rispetto ad un ciclo qualunque di punti o di archi dell'involuzione, costituiscono un ciclo di un'involuzione totale d'ordine* n, *che ha gli stessi elementi doppii con la data involuzione. Inoltre se* m'$+$m''$=$m, *ed è ω' o Ω' un elemento armonico di ω'' o di Ω'' d'ordine* m' *rispetto ad un ciclo dell'involuzione, sarà viceversa ω'' o Ω'' elemento armonico di ω' o Ω' d'ordine* m'' *rispetto allo stesso ciclo.*

È chiaro poi per le cose dette che gli elementi armonici, dei diversi ordini, di un elemento rispetto ad un ciclo qualunque di un'involuzione appartengono sempre a sistemi di 2° ordine che sono toccati nei punti e ed f dagli archi E ed F.

Se il punto ω coincide con uno dei punti ω_i del ciclo $(\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_m)$, e l'arco Ω coincide con uno degli archi Ω_i del ciclo $(\Omega_1, \Omega_2 \ldots \Omega_m)$, ω_i ed Ω_i faranno parte rispettivamente dei punti e degli archi armonici d'ordine qualunque di ω o di Ω rispetto a quei cicli. Se poi ω appartiene a G, o pure Ω passa per g, i punti armonici dei diversi ordini di ω, rispetto ad un ciclo qualunque di punti coincideranno tutti con g, e gli archi armonici dei diversi ordini di Ω, rispetto ad un ciclo qualunque di archi, coincideranno tutti con G.

Dalle formole (2) si deduce facilmente la proprietà: *Considerando il ciclo di un' involuzione totale d' ordine* n, *costituito dal gruppo dei punti o degli archi armonici d'ordine* n *di un punto o di un arco, rispetto ad un ciclo di punti o di archi di una data involuzione totale d' ordine* m, *i punti o gli archi armonici dei diversi ordini, di quel punto o di quell'arco, rispetto al gruppo proposto, saranno anche punti ed archi armonici dei medesimi ordini, dello stesso punto o dello stesso arco, rispetto a quel ciclo della data involuzione.*

Se p_i, q_i sono rispettivamente punti armonici d'ordine n di p, q rispetto al ciclo $(\omega_1, \omega_2 \ldots . \omega_m)$, e P_i, Q_i sono rispettivamente archi armonici d'ordine n di P, Q rispetto al ciclo $(\Omega_1, \Omega_2 \ldots . \Omega_m)$ sarà

$$\frac{sen^n Ep_i}{sen^n Eq_i} : \frac{sen^n Fp_i}{sen^n Fq_i} : \frac{sen^n Gp_i}{sen^n Gq_i} :: \frac{sen^{m-n} Eq}{sen^{m-n} Ep} : \frac{sen^{m-n} Fq}{sen^{m-n} Fp} : \frac{sen^{m-n} Gq}{sen^{m-n} Gp},$$

$$\frac{sen^n eP_i}{sen^n eQ_i} : \frac{sen^n fP_i}{sen^n fQ_i} : \frac{sen^n gP_i}{sen^n gQ_i} :: \frac{sen^{m-n} eQ}{sen^{m-n} eP} : \frac{sen^{m-n} fQ}{sen^{m-n} fP} : \frac{sen^{m-n} gQ}{sen^{m-n} gP},$$

sicchè indicando con u, v, w, U, V, W quantità costanti al variare di quei cicli, sarà

$$(3) \quad \begin{aligned} &\frac{sen\, Ep_i}{sen\, Eq_i} : \frac{sen\, Fp_i}{sen\, Fq_i} : \frac{sen\, Gp_i}{sen\, Gq_i} :: u : v : w, \\ &\frac{sen\, eP_i}{sen\, eQ_i} : \frac{sen\, fP_i}{sen\, fQ_i} : \frac{sen\, gP_i}{sen\, gQ_i} :: U : V : W, \end{aligned}$$

e quindi (p_i, q_i) e (P_i, Q_i) saranno coppie di elementi omologhi di sistemi equianarmonici; adunque: *Due punti o due archi, rispettivamente armonici dello stesso ordine, di due altri punti o di due altri archi, rispetto ad un ciclo di punti o di archi di un'involuzione totale, apparterranno, al variare di quel ciclo, a due sistemi equianarmonici, che hanno gli stessi elementi doppii con la data involuzione.*

4. Cerchiamo ora il luogo dei diversi punti consecutivi di un punto ω_0, e l'inviluppo dei diversi archi consecutivi di un arco Ω_0 nel caso più generale della dipendenza equianarmonica. Ponendo in generale

$$x = \frac{sen\,\omega E}{sen\, eE}, \; y = \frac{sen\,\omega F}{sen\, fF}, \; z = \frac{sen\,\omega G}{sen\, gG}; \; X = \frac{sen\,\Omega e}{sen\, Ee}, \; Y = \frac{sen\,\Omega f}{sen\, Ff}, \; Z = \frac{sen\,\Omega g}{sen\, Gg},$$

l'equazioni (2) del numero 1 diverranno

$$\frac{x_i}{x_0} : \frac{y_i}{y_0} : \frac{z_i}{z_0} :: \alpha' : \beta' : \gamma' :: \frac{X_0}{X_i} : \frac{Y_0}{Y_i} : \frac{Z_0}{Z_i},$$

sicchè posto

$$\log\beta - \log\gamma = \xi\,, \qquad \log\gamma - \log\alpha = \eta\,, \qquad \log\alpha - \log\beta = \zeta\,,$$

(onde $\xi+\eta+\zeta=0$) si troverà che i punti ω_i apparterranno ad una curva σ, e che gli archi Ω_i toccheranno una curva Σ, curve rappresentate rispettivamente dall'equazioni

$$(1) \qquad \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\xi}\left(\frac{y}{y_0}\right)^{\eta}\left(\frac{z}{z_0}\right)^{\zeta}=1\,, \qquad \left(\frac{X}{X_0}\right)^{\xi}\left(\frac{Y}{Y_0}\right)^{\eta}\left(\frac{Z}{Z_0}\right)^{\zeta}=1\,.$$

Se una delle quantità α, β o γ è negativa, indicando sempre con ξ, η, ζ i logaritmi dei valori assoluti di $\frac{\beta}{\gamma}, \frac{\gamma}{\alpha}, \frac{\alpha}{\beta}$, i punti ω_i e gli archi Ω_i per i pari apparterranno ancora σ e Σ, e per i dispari apparterranno invece alle curve le di cui equazioni si deducono da (1) col cambiare il segno ad una delle coppie di frazioni $\left(\frac{x}{x_0}, \frac{X}{X_0}\right)$, $\left(\frac{y}{y_0}, \frac{Y}{Y_0}\right)$, $\left(\frac{z}{z_0}, \frac{Z}{Z_0}\right)$.

Risulta dalla forma dell'equazioni (1) che se sulla curva σ corrispondente al punto ω_0 si prende un punto qualunque, i suoi punti consecutivi apparterranno anche a σ; e similmente se alla curva Σ corrispondente all'arco Ω_0 si tira un arco tangente qualunque, i suoi archi consecutivi toccheranno ancora Σ. Segue da ciò che se Ω_0 è l'arco tangente di σ in ω_0, o pure ω_0 è il punto di contatto di Σ con Ω_0, le due curve σ e Σ costituiranno uno stesso sistema di punti e di archi (σ, Σ).

Se ξ ed η si suppongano positive, l'equazioni (1) messe sotto la forma

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\xi}\left(\frac{y}{y_0}\right)^{\eta}=\left(\frac{z}{z_0}\right)^{\xi+\eta}, \qquad \left(\frac{X}{X_0}\right)^{\xi}\left(\frac{Y}{Y_0}\right)^{\eta}=\left(\frac{Z}{Z_0}\right)^{\xi+\eta}$$

mostrano che σ passa per e ed f, e che Σ tocca E ed F.

Se, indicando con λ, μ, ν numeri interi, si abbia tra le quantità ξ, η, ζ, generalmente irrazionali, la relazione $\lambda\xi+\mu\eta+\nu\zeta=0$, l'equazioni (1) diverranno

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\mu-\nu}\left(\frac{y}{y_0}\right)^{\nu-\lambda}\left(\frac{z}{z_0}\right)^{\lambda-\mu}=1\,, \qquad \left(\frac{X}{X_0}\right)^{\mu-\nu}\left(\frac{Y}{Y_0}\right)^{\nu-\lambda}\left(\frac{Z}{Z_0}\right)^{\lambda-\mu}=1\,.$$

È notevole il caso in cui si ha $\alpha\beta=\gamma^2$ onde $\xi=\eta$, o pure $\lambda+\mu=2\nu$: si avrà allora che σ e Σ si riducono ai sistemi di 2° ordine

$$(2) \qquad \frac{xy}{x_0 y_0}=\frac{z^2}{z_0^2}\,, \qquad \frac{XY}{X_0 Y_0}=\frac{Z^2}{Z_0^2}\,;$$

che passano per e ed f e toccano E ed F; adunque: *Nei sistemi equia-*

narmonici consecutivi, se al sistema di 2° ordine che passa per due punti doppii e tocca due archi doppii, appartengono due elementi omologhi consecutivi (punti o archi) d' ordine qualunque, tutti gli elementi consecutivi di ciascuno di essi apparterranno allo stesso sistema di 2° ordine.

Si è veduto precedentemente che uno dei casi in cui questa circostanza si verifica si è quando i sistemi sono in involuzione totale di un ordine qualunque.

Allorchè i punti doppii e, f sono immaginarii, ponendo

$$\frac{\alpha}{\gamma}=\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\,sen\,\varphi)\,,\quad \frac{\beta}{\gamma}=\rho(\cos\varphi-\sqrt{-1}\,sen\,\varphi)\,,$$

$$tan\,eg_0=tan\,g_0f=k\sqrt{-1}\,,\quad tan\,g_0o_i=s_i\,,\quad \frac{sen\,g\omega_i}{sen\,\omega_i o_i}=t_i\,,$$

per le formole (3) del numero 2 si avrà

$$\frac{t_i}{t_0}=\rho^i e^{i\varphi\sqrt{-1}}\frac{s_0-k\sqrt{-1}}{s_i-k\sqrt{-1}}\cdot\frac{\sqrt{1+s_i^2}}{\sqrt{1+s_0^2}}=\rho^i e^{-i\varphi\sqrt{-1}}\frac{s_0+k\sqrt{-1}}{s_i+k\sqrt{-1}}\cdot\frac{\sqrt{1+s_i^2}}{\sqrt{1+s_0^2}}\,,$$

da cui si ricava

$$i\varphi=arc.tan\frac{(s_i-s_0)k}{s_i s_0+k^2}\,,\quad \frac{t_i}{t_0}\sqrt{\frac{(1+s_0^2)(k^2+s_i^2)}{(1+s_i^2)(k^2+s_0^2)}}=\rho^i\,,$$

sicchè l'equazione di σ prenderà la forma

$$(3)\qquad \frac{t}{t_0}\sqrt{\frac{(1+s_0^2)(k^2+s^2)}{(1+s^2)(k^2+s_0^2)}}=\rho^{\frac{1}{\varphi}arc.tan\frac{(s-s_0)k}{ss_0+k^2}}\,.$$

Similmente allorchè gli archi doppii E, F sono immaginarii ritenendo le espressioni precedenti di $\frac{\alpha}{\gamma}$, e $\frac{\beta}{\gamma}$, e ponendo inoltre

$$tan\,EG_0=tan\,G_0F=K\sqrt{-1}\,,\quad tan\,G_0O_i=S_i\,,\quad \frac{sen\,G\Omega_i}{sen\,\Omega_i O_i}=T_i$$

si troverà per l'equazione di Σ

$$(3)\qquad \frac{T}{T_0}\sqrt{\frac{(1+S_0^2)(K^2+S^2)}{(1+S^2)(K^2+S_0^2)}}=\rho^{\frac{1}{\Phi}arc.tan\frac{(S-S_0)K}{SS_0+K^2}}\,.$$

Le formole (3), ponendo per k o K i convenienti valori, si adattano

al caso delle involuzioni parziali relative a g e G: questo punto doppio e questo arco doppio sono allora *asintotici* rispetto a σ e Σ.

Nell' ipotesi dell' equazioni (5) del numero 1, essendo o_i e g_i i punti in cui l' arco Ω_i incontra O e G, ed O_i e G_i gli archi che congiungono ω_i con o e g, se si pone

$$\frac{sen\, o_i g}{sen\, o_i o}=u\,,\quad \frac{1}{tan\, og_i}=v\,;\quad \frac{sen\, O_i G}{sen\, O_i O}=U\,,\quad \frac{1}{tan\, OG_i}=V\,,$$

le curve Σ e σ saranno rappresentate rispettivamente dall' equazioni tra $(u\,,v)$ e tra $(U,\,V)$

$$(4)\qquad u=u_0\mu^{\frac{v_0-v}{\nu}sen\, go}\,,\qquad U=U_0\mu^{\frac{V-V_0}{\nu}sen\, GO}\,.$$

Finalmente nell'ipotesi dell'equazioni (7) del numero 1, i punti consecutivi di un punto ω_0 appartengono ad un arco che passa per g, e gli archi consecutivi di un arco Ω_0 concorrono in un punto dell'arco G condotto per g, e determinato dall' equazione $\frac{sen\, GE}{sen\, GF}=\frac{\mu}{\nu}$; o pure gli archi consecutivi di Ω_0 concorrono in un punto di G, ed i punti consecutivi di ω_0 appartengono ad un arco che passa pel punto g di G determinato dall' equazione $\frac{sen\, ge}{sen\, gf}=\frac{\mu}{\nu}$.

5. Finora si è supposto che i dati sistemi equianarmonici fossero omografici; allorchè essi sono eterografici, se $(efg\,, EFG)$ è la terna degli elementi doppii, indicando con Ω_{i-1} ed ω_{i-1} l' arco ed il punto del secondo sistema che corrispondono rispettivamente al punto ω_i ed all' arco Ω_i del primo sistema, si avranno le relazioni (*)

$$(1)\qquad \begin{gathered}\frac{sen\, E\omega_{i-1}}{sen\, f\Omega_i} : \frac{sen\, F\omega_{i-1}}{sen\, e\Omega_i} : \frac{sen\, G\omega_{i-1}}{sen\, g\Omega_i} :: \alpha : \beta : \gamma \\ \frac{sen\, F\omega_i}{sen\, e\Omega_{i-1}} sen^2 eE : \frac{sen\, E\omega_i}{sen\, f\Omega_{i-1}} sen^2 fF : \frac{sen\, G\omega_i}{sen\, g\Omega_{i-1}} sen\, eE\, sen\, fF :: \alpha : \beta : \gamma\end{gathered}$$

(*) Memoria sulle forme geometriche di 2ª specie.

quindi, ponendo $\alpha sen fF = \mu$, $\beta sen eE = \nu$, verrà

$$(2)\quad \begin{aligned} &\frac{sen E\omega_{2i}}{sen E\omega_0} : \frac{sen F\omega_{2i}}{sen F\omega_0} : \frac{sen G\omega_{2i}}{sen G\omega_0} :: \mu^{2i} : \nu^{2i} : \mu^i \nu^i, \\ &\frac{sen e\Omega_0}{sen e\Omega_{2i}} : \frac{sen f\Omega_0}{sen f\Omega_{2i}} : \frac{sen g\Omega_0}{sen g\Omega_{2i}} :: \mu^{2i} : \nu^{2i} : \mu^i \nu^i, \end{aligned}$$

$$(3)\quad \begin{aligned} &\frac{sen E\omega_{2i-1}}{sen f\Omega_0} : \frac{sen F\omega_{2i-1}}{sen e\Omega_0} : \frac{sen G\omega_{2i-1}}{sen g\Omega_0} :: \alpha\mu^{2i} : \beta\nu^{2i} : \gamma\mu^i\nu^i, \\ &\frac{sen F\omega_0}{sen e\Omega_{2i-1}} sen^2 eE : \frac{sen E\omega_0}{sen f\Omega_{2i-1}} sen^2 fF : \frac{sen G\omega_0}{sen g\Omega_{2i-1}} sen eE\, sen fF \\ &\qquad :: \alpha\mu^{2i} : \beta\nu^{2i} : \gamma\mu^i\nu^i. \end{aligned}$$

Le formole (2) mostrano che i sistemi consecutivi d'ordine pari (i quali sono omografici) sono in quella particolare dipendenza equianarmonica nella quale gli elementi consecutivi di un dato elemento appartengono tutti ad un sistema di 2° ordine. Ponendo la condizione $\mu^{2m} = \nu^{2m}$, onde $\mu^m = \pm \nu^m$, coincideranno tra loro due elementi consecutivi d'ordine $2m$, o pure d'ordine $4m$, secondo che si prende il segno superiore, o pure l'inferiore; i sistemi eterografici si diranno allora in *involuzione d'ordine* $2m$, o $4m$. Le formole (3) poi mostrano che i sistemi consecutivi d'ordine dispari (i quali sono eterografici), saranno in involuzione d'ordine $4m+2$, vale a dire gli elementi consecutivi di questo ordine coincideranno tra loro, allorchè si ha $\mu^{2m+1} = \nu^{2m+1}$.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA
DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SULLA STIRPE JAPIGICA, E SOPRA TRE CRANÎ AD ESSA APPARTENENTI RINVENUTI PRESSO FASANO (*GNATHIA*), PRESSO RUGGE (*RUDIÆ*), E PRESSO CEGLIE (*CŒLIUM*) NELL' ITALIA MERIDIONALE

MEMORIA

DEL SOCIO ORDINARIO G. NICOLUCCI

letta nell' adunanza del dì 10 ottobre 1865.

PARTE I.

La Nazione Japigica

La stirpe Japigica ebbe sede antichissima nella nostra Italia, ed occupava quella parte sud-orientale del Continente, che dal fiume Frentone fino al capo di Leuca estendendosi, comprende le Province attuali di Capitanata, di Terra di Bari e di Terra d'Otranto. In tempi più vetusti i suoi confini si allargavano ancora di più dal lato di mezzogiorno, imperocchè Scilace, nel 400 circa di Roma, incontrava Japigî sulla spiaggia dell' Jonio fino ad Eraclea (1), ed Eforo Cumano chiamava Crotone antica città della Japigia (2). Oltrachè prische leggende, sotto le mitiche appellazioni di Enotro e di Peucezio, fratelli e figli di Pelasgo Arcade (3), ravvisavano altresì una origine comune fra i nativi della Japigia e gli abitatori della Brezia od Enotria, i quali erano, secondo altre tradizioni, discendenti di Bretto figlio di Ercole, e di Balezia figliuola di Baleto (4); nomi che si riscontrano con quel di Brento, prole erculea

(1) *Peripl.* Cap. XIV.

(2) Strabone, Lib. VI, 1, 12. Ὤικουν δὲ Ἰάπυγες τὸν Κρότωνα πρότερον, ὡς Ἔφορός φησι.

(3) Ferecid. *Fragment.* IX, 85 — Dionigi di Alicarnas. Lib. I, 11 — Pausania, Lib. VIII, 3, 5.

(4) Steph. Byzant. sub voce Βρέττος: — Βρέττος, πόλις Τυῤῥηνῶν, ἀπὸ Βρέττου τοῦ Ἡρακλέους, καὶ Βαλητίας τῆς Βαλήτου.

onde i Brindisini si pregiavano derivare la loro origine, e con quel di Balezia città distante poche miglia da Brindisi.

Tre popoli i Greci distinguevano nel territorio japigico, i *Messapî*, i *Peucezî* o *Pedicoli*, e i *Daunî;* i primi nella penisola ad oriente di Taranto, i Peucezî a settentrione di costoro sul littorale da Brindisi a Bari, e di là fino al Gargano i Daunî. I Messapî Strabone divideva in due altre minori nazioni, *Salentini* e *Calabri*, gli uni sulla spiaggia dell'Jonio da Manduria a Basta, gli altri sulla costiera adriatica da Basta a Brindisi; ma i Latini, più genericamente cognominando questi popoli, li dissero *Appuli* e *Calabri*, comprendendo fra i primi i Daunî ed i Peucezî, e fra i secondi i Calabri e i Salentini.

Erano i nativi della Japigia ben distinti dagli altri popoli italiani, e singolarmente dai Sanniti loro vicini, i quali dalla parte del Sannio non si estesero mai nella Puglia oltre *Teate Apulum*, *Luceria* ed *Ausculum Apulum*, e dal lato della Lucania non oltrepassarono *Venusia* e la sinistra sponda del Fortore. Peraltro i confini fra Lucani ed Appuli non furono mai ben fissati, imperciocchè lo stesso Orazio, nato in Venosa, non sapea neppur egli se chiamarsi appulo o lucano, e dicevasi *lucanus an apulus anceps*, benchè il nome di Venusia abbia troppa somiglianza con quel di *Canusium*, *Genusium*, *Brundusium* per non crederlo di origine pugliese.

Molte e diverse erano le opinioni de' Greci e de' Latini intorno alle origini japigiche. Affermavano alcuni che Japigia, Daunia, Peucezia e Messapia traessero il lor nome da altrettanti Licaonidi, e i loro abitanti da colonie arcadiche condottevi da quelli diciassette generazioni innanzi la guerra di Troja (1). Ricordavano alcuni altri altre provenienze, e si volgevano a rintracciarle sia nella Creta, sia nel Peloponneso stesso, sia nell'Epiro o nelle più prossime spiagge dell'Illirico.

Narrava Erodoto (2) come una mano di Cretesi, usciti di patria per vendicare contro Cocalo la morte di Minosse, sorpresi al ritorno in mare da fiera tempesta, fossero spinti sulle coste della Japigia, ed ivi incendiate le navi e postevi le abitazioni vi edificassero Iria, madre di tutte le altre città che vi si innalzarono, e vi cambiassero il lor nome con quello di Japigî-Messapî (3). Altri raccontavano il fatto molto diversamente. Chi voleva i Cretesi trasferiti in Italia per occasione della in-

(1) Nicandro ap. Anton. Liber. Lib. 31.—Dionigi, Lib. I. 11.

(2) Lib. VII.

(3) Strabone. Lib. VI.

fausta impresa di Minosse in Sicania (1), chi venuti quando n'andavano in traccia dello smarrito Glauco (2), chi finalmente quali seguaci di Idomeneo, scacciato di Creta, a cui s'erano aggiunti Illirici e Locrensi (3).

Il nome di Diomede risuona frequente ne' canti di Omero, come nelle antiche tradizioni japigiche. Prode in guerra, prudente ne' consigli è il terrore de' nemici, ed ha grande autorità fra gli amici. Compiuta l'impresa di Troja ritorna in Argo, e gli si fa nota la infedeltà della moglie Egialea. Risalite co' suoi compagni le navi, fugge tosto la terra nativa, e dopo lunghe e perigliose navigazioni approda finalmente nella Daunia, ove vinti i Monadi e i Dardi, sposa la figlia del re Dauno col quale partisce il territorio, e fonda una città, che in memoria della sua patria Argo chiama *Argos Hippium*, la quale di poi fu detta *Argyrippa* e quindi *Arpi* (4). Edificò pure, secondo Strabone, Venosa e Brindisi (5), nè v'era città di qualche conto nell'Italia sud-orientale, che non si dicesse da lui fondata, e non mostrasse sue reliquie per accertarlo. Sulle rive dell'Ofanto si additavano in fatti i campi di Diomede; in Luceria si serbavano, nel tempio di Minerva, i donativi e l'armatura dell'eroe, nè altri segni mancavano del di lui esteso imperio nella Puglia (6). Le due Isole dirimpetto il promontorio Gargano si nominarono dal figlio di Tideo, ed ivi favoleggiarono che egli scomparisse e i suoi compagni fossero convertiti in augelli (7), benchè altre voci dicessero esser egli sempre vissuto nella Daunia, ed aver quivi dato termine alla sua carriera mortale. S'ebbe fin gli onori divini a Metaponto ed a Turio (8), come fra i Veneti presso il Timavo (9), e fra gli Umbri vicino ad Ancona (10).

Oltre a queste argive colonie altre se ne piantavano dagli Elleni nella Japigia, come in quasi tutto il littorale dell'Italia del mezzogiorno. In

(1) Strabone, Ibid.

(2) Ateneo, XI. 5.

(3) Varro, *Fragm. ant. rer. hum.* apud Probum *ad Virgil. Eglog.* VI, 31—Festo s. v. *Sallentini*—Virg. III, 400; Servius ad loc.

(4) Strabone, VI. Plinio, III. 15—Virgil. Æneid. VIII. 9; X, 28: XI, 246, 47—Servius ad loc.—Livio, XXV. 11.—Giustino, XX, 1.

(5) Servius *ad Æneid.* VIII, 9; II, 246,

(6) Strab. VI. 9.

(7) Ibid.

(8) Schol. Pind. *ad Nem.* X, 12.

(9) Strab. V.

(10) Id. VI. X.

que' pingui campi pose Falanto la sua colonia di Laconi, e vi diede principio a Taranto, città nobilissima, circa quarantacinque anni innanzi la fondazione di Roma (1). Guidati da Daulio, despota di Crissa, coloni Achei diedero nascimento a Metaponto (2), della quale poi le leggende chiamavano autori Nestore ed Epeo (3). Siri fu fondata, al tempo di Aliatte e di Creso, da Jonî fuggiti da Colofone (4), ed ebbe accrescimento e potenza da' Tarentini (5). Anche Gallipoli, *urbs graia* (6), ebbe origine dallo Spartano Leucippo, riedificatore di Metaponto (7), e Rubi da Achei di Ripe, patria di Miscello, fondatore di Crotone (8).

Dall'Epiro, contrada che poco mare dalla Japigia divide, mossero parimenti colonie che vennero a popolare il mezzogiorno dell'Italia, e forse le più antiche immigrazioni elleniche, nel sud della nostra penisola, non partirono che dalle spiagge epirotiche. Egli è certo che i Caoni (9), potente tribù dell'Epiro, abitavano altresì quella parte della Japigia che indi appartenne, col nome di *Siritide*, alla Magna Grecia, e popolarono quella contrada molto tempo innanzi che vi ponessero il piede gli altri coloni Focesi, Jonî, Achei e Tarentini che vi edificarono le città di *Lagaria*, *Siri*, *Pandosia*, e la più chiara di tutte *Eraclea*.

Sono mute le antiche memorie sulla fondazione della *Dodona* pugliese, della quale non si trova fatta menzione che dal geografo Mnasea, ricordato da Stefano Bizantino (10). La sua origine era sì remota, che egli è difficile potere indicare altre città di eguale antichità. Ma quando si consideri, che altra celebre omonima città esisteva tra i Molossi nell'Epiro, egli non pare improbabile, che coloni epiroti edificato avessero

(1) Eforo. ap. Strab. VI. — Dionisio in *Excerpta Vaticana*, Lib. VII, 10, ed Mai. *Fragm.* 12. — Servius *ad Æneid.* III, 551 — Giustino, 11, 4.

(2) Eforo presso Strab. loc. cit. — Livio, XXV, 15.

(3) Strabone, ibid. — Giustino, XX, 2 — Eustat. *ad Dionys. Perieg.* v. 348 — Plinio, IV. 6.

(4) Strabone, loc. cit. — Ateneo, XII, 4 — Steph. Byz. s. v. Σίρις.

(5) Diod. Sicul. XII, 36 — Livio, VIII, 24.

(6) Mela, II, 4, 7.

(7) Plinio, III, 16 — Dionis. *Fragm.* XLII, in *Script. Vat. Nova Collectio* ed. Mai, II, 504.

(8) Millingen, *Considérat. sur la Numismatiq. de l'ancien. Italie*, p. 150 — Avellino, *de Rubastinor. numo. Catal.* 1843 — Cavedoni, *Bullet. dell' Istit. di Corrispond. Archeol.* 1844, p. 46. — Jatta, *dell' antichiss. città di Ruvo.* Napoli, 1844, p. 93.

(9) Aristotile, *Politica.* Lib. VII. cap. 9 — Antioch. *Fragm.* 3. 4. 6. 7 ed. Didot — Strabone, VI. — Hesych. sub. v. Κώνην — Dionisio, I. 12.

(10) Sub voce Δώδώνη, in *Fragm.* ed. Pinedo, p. 744. Διττὰς δὲ Δωδώνη αὔτη (πόλις τῆς Μολοσσίδος εν Ἠπείρῳ) καὶ ἡ εν Ιταλία, καθάπερ αλλοι καὶ Μνασέας.

anche la Dodona Japigica, la quale ricordava la città resa illustre in tutto il mondo greco dalle fatidiche sacerdotesse di Giove. E come poco lungi dalla Dodona Molosside si stendevano i monti e il promontorio Ceraunio o Acroceraunio sacri a Giove, su' quali egli compiacevasi di scagliare i suoi fulmini e mostrarvi la sua alta possanza, così presso alla Dodona italica fu edificata, nel luogo dell'odierna Cerignola, la città di Ceraunilia (1) sacra anch'essa al pelasgico Giove Dodoneo.

Anche dell'approdo di genti illiriche nell' Italia sud-orientale sono molte le ricordanze presso gli antichi ricercatori delle nostre origini, ed io credo non si possa mettere in dubbio, che talune generazioni di venturieri dell'opposta spiaggia dell'Illiria fossero veramente capitate ai nostri liti, e vi avessero preso stanza e vi si fossero moltiplicate ed estese. Ho anzi per fermo, che tanto la divulgata leggenda di Nicandro da Pergamo (la quale portava esser Peucezio con Dauno e Japige passati alle nostre spiagge con moltitudini illiriche), quanto il supposto arrivo d'Idomeneo con altri Illirici ne' Salentini, e le tradizioni raccolte da Festo (2), da Plinio (3) e da Varrone (4), ci lasciano intendere, che sotto la forma leggendaria s'era diffusa e conservata nell'antichità la memoria di un lento passaggio di genti illiriche nell'Italia meridionale. Crede il Micali che gli Illirici de' quali è parola sieno stati più facilmente i Liburni che scorrevano per le marine, e messe in volta le popolazioni indigene, si stanziavano per la forza in qualunque luogo trovassero comodo riparo (5), e infatti Callimaco chiamava grecamente Peucezî un popolo di Liburni (6). È poi credibile assai, continua il Micali, che i Monadi e i Dardi, vinti da Diomede nella Daunia, fossero di sangue illirico, nè di ciò è lieve indizio, che i Trikalli e i Dardi sieno anch'oggi due tribù pastorali dell'Alta Albania (7). Ed invero talmente scambievole ha dovuto essere altre volte la frequentazione delle genti tra l'uno e l'altro lito, che l'Isola di Sason, all'imboccatura dell'Adriatico presso l'Acroceraunia, ed in ogni

(1) Corcia, *Storia delle due Sicilie*, III. p. 585.

(2) Sub. voce *Daunia*.

(3) *Hist. Nat.* III. 16.

(4) Apud Probum *ad Virgil. Eclog.* VI. 31.

(5) Micali, *Storia degli ant. pop. Ital.* Cap. XVI.

(6) Pars ejus (Illyrici) fuere Mentores, Hymani, Encheleæ, Dudini, et quos Callimachus *Peucetias* appellat. Plin. H. N. III, 21.

(7) Pouqueville, *Voyage dans la Grèce*, t. II 512; III, 30.

tempo nido di corsali (1), vien chiamata ella stessa calabrese dal poeta Lucano (2).

Tutte le memorie adunque che a noi pervennero da'Greci e da'Latini sulle popolazioni dell'antica Japigia ci riconducono verso la Grecia e verso le contrade all'Ellade contermini. Però se coteste provenienze sono probabili in un certo periodo della remota storia italiana, io credo che non possano essere accolte egualmente con la stessa fede rispetto a'popoli primitivi della Penisola. Non si sono è vero fin qui raccolti elementi bastevoli a poter determinare la razza primigenia che l'abitava in quell'epoca vetustissima che prende il nome di *età della pietra*, ma da studî fatti, e da indagini istituite su meno lontani periodi dell'umanità, sembra essere dimostrato, che due razze distinte, nell'epoca del bronzo, popolassero le nostre contrade, l'una fornita di cranio breve, largo, brachicefalo, l'altro di cranio lungo, stretto, dolicocefalo. Quest'ultima pare non fosse stata dapprima molto numerosa, ma resasi quindi, per nuove immigrazioni, preponderante, divenne quasi la sola abitatrice dell'Italia, ad eccezione di quella contrada nordico-occidentale ove, col nome di *Liguri*, si conservò l'altra razza che vi perdura tuttavia, poco alterata ne' suoi tipi originarî, nelle province attuali della Liguria e del Piemonte (3).

Molte ragioni inducono a ritenere per probabile, che la stirpe, che prima venne a popolare il nostro paese, fosse stata quella fornita di cranio brachicefalo, sia perchè fatti somiglianti intervennero in altre parti dell'Europa, sia perchè tradizioni, ricordi, memorie accennano, in tutta Italia, all'esistenza di una razza antichissima diversa da quella che vi giunse di poi e si soprappose alle popolazioni aborigene (4). Quella razza primigenia, brachicefala, turaniana, occupava la Penisola da un mare all'altro e dall'Alpi a Scilla. Nomi di contrade, di monti, di fiumi, di popoli dimostrano la sua presenza sopra tutti i punti del nostro territorio; e noi accompagnandoci alla nostra storia, fin da'suoi primi albori, possiamo quasi tener dietro al suo graduato scomparire, ed alla cre-

(1) Sason, piratica statione nota. Plinio, III, 26. Oggidì è chiamata *Sareno*. Sul nostro lido eravi pure *Sasinæ portus* tra Gallipoli e Taranto. Plinio III, 11.

(2) *Pharsalia*, II, 627 — Micali, *Op. cit.* cap. VIII.

(3) Conf. Nicolucci, *La stirpe Ligure in Italia ne'tempi antichi e nei moderni; nelle Memorie dell'Accad. delle scienze fisich. e matem. di Napoli*, t. II.

(4) Conf. *La stirpe Ligure citata*, passim.

scente invasione de' dolicocefali Ariani, che succedendosi gli uni agli altri, come le onde del mare, si allargarono per tutto il Bel Paese. La vecchia stirpe fu vinta e soggiogata; la massa del popolo scomparve quasi intera, assorbita da' nuovi venuti, e lasciò appena qualche traccia della sua esistenza nelle popolazioni che oggi vivono sul suolo italiano.

La Japigia, come il resto dell' Italia, ebbe anch'essa i suoi aborigeni turaniani. Armi e strumenti in selce rinvenuti nel suo territorio dimostrano com'essa, nell'età preistorica, non fosse stata povera di abitatori, ed è osservabile altresì, che le più belle armi in pietra rinvenute finora presso di noi appartengono all'antica Japigia (1).

Fu probabilmente con cotesti popoli che ebbero ad incontrarsi i primi coloni Ariani che misero il piede in quella contrada. Se altre genti contermini vi fossero convenute pria di coloro che vi si tramutarono dalle regioni poste sull'altra sponda dell'Jonio e del Mar Superiore non è ricordato da veruna tradizione presso i più diligenti ricercatori delle nostre antichità, e ci toglie anche di crederlo l' idioma stesso che favellavasi nella Japigia, il quale, non avendo appiglio di analogia con alcuno degli altri sermoni italici, ne vieta di ammettere, in que' remoti tempi, in quella parte della Penisola, la presenza di quell'elemento genuino italiano che fu comune a quasi tutto il nostro paese. Pochissimo si sa della lingua japigica o messapica, ond'io lascio d'intrattenere senza alcun profitto il lettore intorno a questo argomento, sperando che egli si sia penetrato con me della necessità di dover ricorrere a quelle sorgenti alle quali ci guidano le leggende di che sopra abbiamo toccato, quando si voglia con qualche fondamento di vero ricercare le origini delle antiche popolazioni japigiche.

Coloro che le tradizioni ci dicono venuti a popolare la Japigia, gli Arcadi, gli Argivi, i Locrî, gli Achei, gli Epiroti, i Cretesi, gli Illirici erano quasi tutti discendenza di quel popolo vetustissimo sparso, negli antichi tempi, col nome di Pelasgi, per tutta la Grecia. Pelasgo, autore

(1) Quelle ch'io m'ebbi dalla cortesia del nostro egregio Segretario e Senatore del Regno cav. A. Scacchi furono da me figurate nella tav. II. della Memoria « *Sopra alcune armi ed utensili in pietra*, et. » (*Mem. dell' Accad. d. sc. fisiche e matem. t. I*), e vengono dal territorio di Altamura in Provincia di Bari. Altre simili furono donate dallo stesso nostro esimio collega al signor B. Gastaldi di Torino, e tutte sono di tal perfetta esecuzione da non temere il confronto di alcun altro lavoro della stessa età.

della stirpe, dicevasi nato in Arcadia da Giove e da Niobe (1), ov'è fama che procreasse Licaone, i discendenti del quale condussero colonie arcadiche nella Daunia, nella Peucezia e nella Messapia. La medesima derivazione da Pelasgo attribuivasi ad Argo da cui venne il nome all'Argolide (2). Discendenza pelasgica erano parimenti i Locrî che si dicevano usciti da' Lelegi, stirpe pelasgica, i quali in antico abitavano intorno al Parnasso (3). Gli Achei, i quali trassero il lor nome da Acheo figliuolo di Larissa e di Nettuno, erano anch'essi Pelasgi passati dal Peloponneso nell'Emonia ch'indi si disse Tessalia, d'onde cacciati i barbari che l'abitavano, la divisero in tre regioni, cognominandola da' condottieri Acheo, Ftio e Pelasgo, Acaia, Ftiotide e Pelasgiotide (4).

Gli Epiroti, i quali erano compresi sotto le varie denominazioni di Caoni, Molossi, Tesproti, Cassopei, Amfilochi, Atamani, Etici, Timfei, Oresti, Parorei, Atintani (5), erano generalmente dagli Elleni considerati come barbari, ma gli Amfilochi fra di essi erano coloni argivi condotti nel golfo Ambracio da Amfiloco d'Amfiarao (6) e i Molossi e i Tesproti erano dallo stesso Erodoto ritenuti come appartenenti all' unità ellenica (7), nella quale Teopompo annoverava anche i Caoni che erano a' suoi tempi la nazione più celebre dell'Epiro (8).

Che gli Amfilochi fossero Pelasgi non credo esservi alcuno che voglia contrastarlo, ed è molto probabile altresì la opinione, che Pelasgi fossero stati anche i Tesproti, i Molossi ed i Caoni, i quali viveano tanto nella Japigia che nell'Epiro, ed erano, a quanto sembra, imparentati etnicamente cogli Enotri e co' Peucezî, della cui origine Pelasgica non v' ha chi possa muovere dubbiezza.

Chiaramente è affermata da Diodoro Siculo l'origine pelasgica degli Eteo-Cretesi (9), e Dionigi fa anch' egli menzione di Pelasgi, i quali scacciati dall' Etolia e dalla Locride, avean trovato ricovero nelle Cicladi

(1) Dionigi di Alicarnas. I, 17.

(2) Apollodoro, *Biblioteca*, I, 2; III, 8.

(3) Hesiod. *fragm.* 25; — Strabone, Lib. VII, 2; — Dionigi, I, 17.

(4) Dionigi, *Ibid.*

(5) Strabone, VII. passim; —Tucidide, II, 68 — Teopompo presso Strabone (loc. cit.) conta quattordici epirotici ἔθνη.

(6) Tucidid. loc. cit.

(7) Lib. I. c. 146; II, 56. Il Molosso Akon è considerato da Erodoto come Elleno, VII, 127.

(8) Strabone, VII, 5.

(9) *Biblioteca*, Lib. V, 56.

e nell'Isola di Creta ove una città di nome Larissa attestava l'esistenza di un popolo di quella stirpe.

Quanto a' vetusti Illirici la loro affinità con la razza greca è stata sempre problematica. Gli scrittori antichi si tacciono sulla etnologia di questo popolo. Però se l'Epiro, culla della civiltà ellenica, è contrada certamente pelasgica, non è improbabile che tal sia stata anche in parte l'Illiria antica, imperocchè al presente gli idiomi favellati tanto nell'Albania (Illiria de' Greci), quanto nel settentrione dell'Epiro si rassomigliano moltissimo fra loro, e la comune credenza presso gli Albanesi stessi ella è ch' ei siano Pelasgi, e che il lor linguaggio sia quello stesso che un tempo parlava questo popolo famoso. Se cotesta sentenza sia o no accettabile, io non saprei nè affermarlo, nè negarlo, ma io porto opinione, che sangue pelasgico scorra nelle vene degli Albanesi attuali, discendenza degli Illirici dell' antichità, benchè in maggior proporzione siavi commisto quello di altre razze, Traci, Macedoni, Peoni, negli antichi tempi, Turchi e Slavi ne' moderni.

Egli adunque ci sembra confortata da pruove sufficienti la opinione sopra espressa, che Pelasgi fossero stati coloro che, mossi di Grecia e dalle contrade vicine, vennero a popolare la nostra Japigia tenuta già innanzi da un popolo turaniano, che ebbe in suo dominio, in tempi remotissimi, tutto il suolo italico dall' Alpi al capo di Leuca. Queste migrazioni pelasgiche si effettuarono in tempi diversi e molto lontani fra loro, imperciocchè mentre alcune, e forse le prime di esse, si confondono col ciclo mitico della Grecia, e si rannodano all'èra favolosa di Minosse e a quella de' Licaonidi, i quali come credevasi generalmente, vissero in Grecia molti secoli innanzi la guerra di Troia; altre, come quella di Diomede, dicevansi avvenute dopo la memorabile presa d'Ilio. Le altre colonie elleniche non toccarono la Japigia prima del 708 avanti l'èra volgare, alla quale epoca si vuole ascrivere la fondazione di Taranto per opera de' Doriesi della Laconia. Ma quando le colonie greche, de' tempi storici, venivano a porre stanza nel suolo della Japigia, quel terreno era già posseduto da' Pelasgi, i quali si erano stabiliti da gran tempo in quella parte della nostra Penisola, e vi erano divenuti, sì per la potenza, come pel numero, la popolazione dominante.

Ma chi fossero questi Pelasgi, quale la loro affinità con altre stirpi, ella è quistione che da' tempi di Erodoto infino ad oggi non è stata ancora, ch' io mi sappia, risoluta. Inclinano taluni col padre della storia

a ritenerli stranieri al sangue greco, fondandosi principalmente sulla considerazione che eglino parlavano un barbaro idioma (βάρβαρον γλῶσσαν ἱέντες), il quale più tardi si confuse con l'ellenico senza lasciare di sè vestigia in Grecia; ma Erodoto non ci sa dire qual proporzione avesse col greco, se come lingua a lingua, se come dialetto più antico e più misto a più moderno e più schietto. Parrebbe che le espressioni di cui egli fa uso implicassero l'idea che quel linguaggio fosse stato essenzialmente straniero all'ellenico, ma la sua vera natura rimane tuttora incerta ed oscura, e noi non possiamo in verun modo emettere un'opinione che possa elevarsi al di sopra degli appunti della critica (1) Taluni altri sono di credere che i Pelasgi fossero Slavi (2), Sciti o Tra-

(1) Parrebbe doversi ammettere «che in Grecia esistessero legami di affinità tra la favella « primitiva pelasgica e la più moderna ellenica. Se non che qui si fa innanzi il testo famoso « di Erodoto (I, 57.) ove *barbara* proclama e differente dalla Greca la lingua de' Pelasghi; « testo contro cui, ben disse il Mustoxidi, vennero a rompersi tutte le congetture, e tutti « gli sforzi degli eruditi, che ingegnaronsi d'indovinare e stabilire qual si fosse l'idioma Pe- « lasgico. Riflettendo non pertanto su quel mutamento di lingue, che esso dice avvenuto « appo gli Attici in seguito dell'incorporarsi che fecero cogli Elleni, non può acquistar forza « la credenza, che gli Ateniesi in discostarsi dal linguaggio *pelasgico* per tener dietro al- « l'*ellenico* variassero completamente, e radicalmente le basi del modo di favellare. Sarà « invece molto più ragionevole e filosofico il supporre, che in quel modo che *barbari* ap- « pellavansi da Cicerone gli Etruschi (*De natura Deor*. II, 4; *De Repub*. II, 4), de' cui « elementi avean pur tanto in sè raccolto i suoi Romani, le parole di Erodoto si debbano « piuttosto interpetrare nel significato di varietà d'inflessioni di dialetti, e non di diversità « sostanziale di linguaggio, e che nel fatto degli Ateniesi si debba soltanto ravvisare l'amplo « ed importante raffinamento nella lingua de' Greci avvenuto per opera degli Elleni, cosic- « chè ammesso anche, non pur con Erodoto, ma con Platone (nel *Cratilo*), che gli Ate- « niesi parlassero anticamente una *barbara lingua*, sotto il cui nome faceano allusione alla « pelasgica, non si debbono escludere alcuni legami di parentela e di affinità fra questa e « l'Ellenica, e sopratutto un tipo generale comune, che senza farle identiche le ravvicini, « per riferirle sempre, ancorchè in molte parti modificate, alla primitiva sorgente sì della « nostra come della greca esistenza. (Cf. Galvani, *Delle Genti, e favelle loro in Italia*, p. « 435, e Herbert Marsch nelle sue *Horae Pelasgicae*). Questi legami ammetteva anche il Le- « psius, allorchè ne' radicali e nelle forme elleniche dell'etrusca lingua ravvisava l'elemento « greco-pelasgico (*Ueber die tyrrenischen etc*... Cf. Lanzi nelle *Cento Lettere inedite scritte* « *al Cav. Vermiglioli*, etc. p. 118), ed allorchè per lingua greco-pelasgica non dubitava « designar la favella di quegli emigrati venuti di Oriente, che l'antichità egualmente che la « critica moderna mette sempre più o meno in rapporto con l'antica popolazione di Grecia» « (Ann. Istit. 1836, p. 199) «Conestabile, *Della vita, degli Studi e delle opere di G. B.* « *Vermiglioli*. Perugia 1855, p. 30.»

(2) Donaldson, *Varronianus*, p. 42.

ci (1); altri che fossero Semiti originarî o della Cananea (2) o dell'Assiria (3) venuti, per dispersione della stirpe, nell'Ellade e nell'Italia, o parte di quegli Hycsos, che scacciati dall'Egitto circa il 1800 innanzi l'èra volgare se ne vennero nel Continente della Grecia, nelle sue Isole, e per ultimo in Italia (4). Altri infine, di cui io sono proclive a seguire le orme, hanno per fermo con Dionigi, ch' eglino fossero un *greco lignaggio antichissimo del Peloponneso* (5), i primi Ariani che popolarono il territorio dell'Ellade. La maggior parte degli autori greci sostenne questa opinione, ed un antico poeta, citato da Pausania, Asio da Samo, il quale visse verso il cominciamento delle Olimpiadi, cantava come « *dalla nera terra sorgesse il divino Pelasgo, onde la razza de' mortali ebbe esistenza:* »

'Αντιθεόν τε Πελασγόν ἐν ὑψικόμοις ὀρέεσσι
Γαῖα μέλαιν' ἀνέδωκεν, ἵνα Θνητῶν γένος εἴη.

I Latini parimenti non faceano alcuna distinzione tra Pelasgi ed Elleni, e tutti i Greci non di rado appellavano col nome di Pelasgi:

Cum veter occubuit Priamus sub marte pelasgo

scrive Ennio, e Virgilio altresì, parlando di Sinone:

Ille dolis instructus et arte pelasga;
ÆNEID. II. 152.

(1) *Fréret, Oeuvres*, I. 267 e seg.—Pinkerton, *Recherches sur l'origine des Scythes ou Goths*. Paris, 1804. p. 177—Schlosser, *Hist. Univers. de l'Antiquité*, I. 371—Giseke, *Trakisch—Pelasgische Stämme der Balkanhabinsel* etc. Leipzig. 1858—Corcia, Progresso, luglio e agosto 1839; Del *Pitagorismo di Numax*, nel *Rendiconto dell' Accad. di Archeol. Lett. e Belle Arti* di Napoli, 1864.

(2) Reinesio, Ἱστορούμενα *linguae punicae*. Altenburg. 1630, cap. II. § 14-15—Mazzocchi, *Spicilegium biblicum*. Neapoli, 1762. I. 207.—Kereuser, *Vorfrdgen über Homeros*, p. 83.

(3) Iannelli, *Tentamen hermeneutic. in etruscas Inscriptiones*. Neap. 1840, p. 40 e seg.

(4) Röth, *Geschichte unser. Abenländisch. Philosophie*, p. 88, not. 17, 25.—A. H. Kellgren, *De Cosmogonia Graecor. ex Egypto profecta*. Helsingforsiae, 1850, p. 8 e seg.—Kruger *Urgeschichte des Indogerman. Völkerstammes*. Bonn, 1855, p. 8 e seg.—Volkmuth, *Die Pelasger als Semiten*. Schaffhausen, 1860.

(5) Lib. I. 17: Ἦν γὰρ δὴ καὶ τὸ τῶν Πελασγῶν γένος Ἑλληνικόν, ἐκ Πελοποννήσου τὸ ἀρχαῖον.

*

e de' Troiani :

Ignari scelerum tantorum et arte pelasga.
Ibid., 106.

Da tuttocciò noi non esitiamo a conchiudere, che i Pelasgi fossero stati un ramo primigenio della stirpe greca, e che il linguaggio ch'ei favellavano fosse stato affine, benchè remotamente, agli altri dialetti che erano in uso, in tempi men lontani, presso i popoli ellenici.

La lingua japigica, o messapica (1), rannodavasi a questo pristino elemento pelasgico. Come si raccoglie da' pochi monumenti che ne sono a noi pervenuti, la sua origine indo-europea non sembra poter essere messa in dubbio, e le forme del genitivo *aihi*, *eihi*, corrispondenti al sanscrito *asya* ed al greco *oio*, non meno che l'uso delle consonanti aspirate e lo studio di evitare le lettere *m* e *t* in fine delle parole, lo rendono essenzialmente diverso da' dialetti italici, e ne mostrano invece la stretta analogia co' dialetti greci (2), la quale rendesi anche maggiore, comparandosi il messapico con l'albanese (3), il quale è anch' esso uno di quei parlari greco-barbari, che, quantunque sembrino diversi dall'ellenico, pur nondimanco rivelano, e nella etimologia delle voci, e nelle forme grammaticali, una remota affinità co' dialetti ellenici (4).

(1) Dell'idioma de' Japigi pochi avanzi rimangono al presente, raccolti da antiche iscrizioni, quasi tutte funerarie, la prima delle quali trovata in Vaste (*Basta*), piccolo paese fra Ugento ed Otranto, fu pubblicata nel 1558 da Antonio de' Ferrari, detto il Galateo, che riconobbe per messapica la lingua nella quale era scritta. E sebbene di poi altre iscrizioni rinvenute qua e là su tutta la Japigia, ed accuratamente pubblicate dal Mommsen (*Iscrizioni Messapiche*, negli *Annali dell'Istituto di Corrispond. Archeolog.* t. XX — *Die Unteritalianischen Dialekte.* Leipzig, 1850) indicassero quel sermone essere stato comune al territorio tenuto da quel popolo, nondimeno l'appellazione di messapico è rimasta ad indicare l'idioma così della Penisola Messapica, come de' rimanenti abitatori della Japigia.

(2) Mommsen *Unteritalianischen Dialekte*, p. 84 — *Storia Romana*, trad. ital. Milano, I, p. 186 — Curtius, nel *Bullettino dell' Istituto di Corrispond. Archeolog.* 1859, p. 214.

(3) Stier, *in* Kuhn, *Zeitschrift für vergleich. Sprachforschung*, t. VI. p. 142 — Curtius, l. c.

(4) Von Hahn, *Albanesische Studien.* Jena 1854 — Photios Paraskèvaïdes, nel *Journal général de l'instruction publique.* Paris, 1861. 6 avril. — « La lingua albanese (così mi « scrive il dotto Epirota, prof. Saviziano) è composta di termini che derivano dal greco, « o per dir meglio che hanno un' origine comune col greco. E se vi sono termini che non

Che la nazione japigica, tanto per le sue origini pelasgiche, quanto per le provenienze elleniche fosse strettamente affine alle altre stirpi greche trova anche conferma nella sorprendente facilità con cui gli Japigi si ellenizzarono, facendo così grave contrasto con la intrattabile renitenza delle altre nazioni italiane. La Puglia, che ai tempi di Timeo (400 di Roma) era detto paese barbaro, divenne nel VI° secolo di Roma un paese assolutamente greco, e persino presso la più rozza schiatta dei Messapî si manifestano moltiplici disposizioni per un analogo sviluppo.

Però, comunque naturale ed indigeno fosse questo grecismo nell'Apulia, non si creda sia avvenuto al di fuori di ogni influenza de' vicini Greci, che già erano saliti al colmo della civilizzazione. Molto vi contribuì il commercio di Taranto che, come lo dimostrano i tipi delle monete, stendevasi fino a Teate Appulo, Larino e Chieti, ma in nessuna città fu sì notevole quanto in Canosa e ne' Pedicoli, siccome ne fanno testimonianza le monete di Canosa, Ruvo, Bitonto, Ceglie, Alezio con tipi particolarmente tarantini. Oltre a' Greci di Taranto, anche quelli dell'Ellade propria hanno contribuito direttamente alla civiltà della Puglia; almeno il Gehrard ne' vasi appuli non riconosce influenze tarantine, ma stile e rappresentazioni attiche (1). Questo grecismo generale delle Puglie ebbe termine sol quando i Pugliesi ottennero la cittadinanza romana, e non ne rimasero, ne' secoli seguenti, che poche tracce nel latino grecizzante degli Appuli.

Più ritrosa a quel grecismo erasi mostrata la Messapia, non ostante che nelle sue spiagge fossero state anche fondate le colonie tarantine di Gallipoli e di Otranto. Ivi si conservò più lungamente il dialetto indigeno, che vi era in fiore ne' due ultimi secoli della Repubblica, e vi era ancor vivo a' tempi di Strabone, il quale non seppe indicare che una sola città completamente ellenizzata (Ελληνίς πόλις, Lib. VI.) in tutta la Messapia, la città di Rudie, patria del poeta Ennio, discendente, com' ei vantavasi, del Re Messapo. (2).

Fin qui le indagini archeologiche e liguistiche. Ora è mestieri di rivolgerci ad altre fonti, e vedere se l'esame de' cranî degli antichi Japigî

« si possono per ora riportare ad un'origine comune col greco, ciò dipende perchè non ancora si sono praticate investigazioni da quelli che posseggono allo stesso grado le conoscenze del dialetto albanese e di tutti gli altri dialetti greci. »

(1) Nella introduzione ai suoi *Apulische Vasenbilder*.

(2) Servius ad Virgil. VII, 691 — Silio Italico, XII, 393.

confermi le deduzioni alle quali siamo giunti interrogando le tradizioni, la storia e la filologia.

PARTE II.

Cranî Japigici

I cranî japigici da me posseduti sono tre, e credo i soli fin qui conosciuti di questo antico popolo italiano. Il primo di essi mi fu donato, egli è alcuni anni, dal dotto archeologo signor Giulio Minervini. Fu rinvenuto in un vetusto sepolcro dell'antica *Gnathia* (oggi Fasano) in Terra di Bari. Era in frammenti quando giunse nelle mie mani, ma non mi fu molto difficile riunirli ed ottenerne il cranio completo, meno la mascella inferiore che non esiste. La tomba nella quale fu raccolto non era dissimile dalle altre indigene, che non son rare nel territorio di Fasano, e non presentava alcuna cosa notevole nè per la costruttura, nè per gli oggetti che vi si contenevano.

Il secondo cranio pervenne nelle mie mani per la gentilezza del signor Avv. Francesco Zaccaria di Lecce, il quale l'ottenne da uno scavo praticato nel suolo dell' antica Rudia (*Rudiae*), in Terra di Otranto. Fu tratto da un' antica tomba messapica, e si trovò accompagnato da' soliti vasi che si rinvengono costantemente in quelle sepolture.

Il terzo cranio mi fu inviato cortesemente in dono dal signor Barone Salvatore Fenicia, di Ruvo, e fu trovato in un antico sepolcro nelle vicinanze di *Cœlium* (oggi Ceglie) parimenti in Terra di Otranto.

Tutte e tre le cennate località appartengono al territorio dell' antica Japigia; ma a parlare più propriamente, le città di *Cœlium* e di *Rudiae* facevano parte della Messapia, mentre *Gnathia* era compresa nel paese che dicevasi de' Peucezî, o Pedicoli.

Cœlium, o Ceglie di Brindisi (oggi Ceglie Messapica), che dev' essere distinta dall'altra Ceglie che giace prossima a Bari, ha fornito gran quantità di anticaglie messapiche, soprattutto una copia grande di oggetti in bronzo, vasi dipinti e monete di ogni metallo e di gran pregio (1). Sembra, benchè ignote ne fossero le memorie, che fosse stata città rag-

(1) *Bullettino dell' Istituto di Corrispondenza Archeolog.* 1834, p. 55. — 1865, p. 128.

guardevole , e veramente fra tutte le città messapiche è cotesta quella che ha fornito il maggior numero d'iscrizioni in lingua indigena. Il Mommsen ne enumera quattordici, che ha pubblicate nella sua Dissertazione sulle *Iscrizioni Messapiche*, e quindi riprodotte nella sua pregevole opera « *Sui dialetti dell' Italia inferiore* ».

Giacciono le rovine di *Rudiæ* (Ῥοδαί) in una contrada quasi deserta , chiamata Ruggi , a mezzo miglio da Lecce verso Monterone. Fra le varie anticaglie che sono state raccolte in quel sito si rinvennero anche due iscrizioni messapiche , l'una graffita sopra un vasetto di terra cotta, ora posseduto dal Museo di Berlino, l'altra scolpito in pietra leccese, e riferita con la precedente del lodato Mommsen nell'opera sopra menzionata.

Se il luogo nativo dell'antico poeta Ennio debba cercarsi in altro punto della Messapia, o nel sito da noi indicato con la guida del Galateo (1), del de Angelis (2), del Mommsen (3), non è argomento che meriti di essere qui discusso. A noi importa soltanto di chiarire, che la contrada onde il cranio è a noi pervenuto era messapica (e di ciò non v'ha un dubbio al mondo), affinchè la origine genuina del teschio che esaminiamo non possa essere soggetto a veruna contestazione.

Rudiæ, più che ogni altra città messapica, fu ingentilita dalla cultura ellenica. Fin la sua lingua fu grecizzata, e ai tempi di Strabone non si mostrava dissimile da qualunque altra città della Magna Grecia. Del chè vantavasi il vecchio Ennio, il quale possedendo a perfezione la conoscenza dell'idioma greco e quella del latino e dell' osco diceva non essere in lui un solo, ma tre cuori (4), poichè gli erano familiari questi tre sermoni, che gli diedero opportunità a divenire il più efficace propagatore della letteratura ellenica nel mondo romano.

Più nota è la città di Gnatia (Γνάθια, o Ἰγνατία) che faceva parte del distretto de' Pedicoli, nel cui agro è descritta da Plinio (5), benchè egli per errore l'attribuisca a' Salentini (6). Giace a poche miglia da Fasano

(1) *De situ Japygiæ*, p. 80.

(2) *Della patria di Ennio.* 1701.

(3) *Iscrizioni messapide* cit. e *Unteritalianischen Dialekte*, p. 59.

(4) Gellio, XVII, 17. L. Ennius tria corda habere sese dicebat, quod loqui græce et osce et latine sciret.

(5) *Hist. Natur.* Lib. III. 11.

(6) *Ibid.* Lib. II. 107.

sulla spiaggia del mare, nella contrada oggi detta *Agnazzo*, ove tuttora si ammirano grandi rovine e parte del recinto dell'antica città (1). Sconosciute affatto sono le vicende di essa, ma celebre era nell'antichità per un preteso prodigio che operavasi in uno de' suoi templi, ove l'incenso bruciava sull'ara senza accostarvisi il fuoco, e Plinio aggiungeva che la fiamma si apprendeva non solo all'incenso, ma a qualsiasi legno si avvicinava ad una sacra pietra che vedevasi nella città. Orazio ridevasi di tali fiabe, e nella gaia descrizione del suo viaggio da Roma a Brindisi, così scrive di quella credenza:

« . . . . . . *Dehinc Gnathia lymphis*
Iratis extructa dedit risusque, jocosque;
Dum flamma sine thura liquescere limine sacro
Persuadere cupit. Credat Iudæus Apella (2).

Molti sepolcri sono stati scoperti nel territorio gnatino da cui, fra molti oggetti, sono venute anche fuora iscrizioni in lingua messapica, le quali sono state tutte riunite e pubblicate dal Mommsen nell'opera sopra citata.

I tre cranî da me posseduti, poichè raccolti in tombe appartenenti a quell'età quando nella Japigia era tuttora vivo ed in fiore il dialetto indigeno, debbono riferirsi a' due ultimi secoli della Repubblica Romana, imperocchè accennano a quell'età e la foggia arcaica, benchè non molto remota, delle lettere greche, e il gran numero delle iscrizioni sepolcrali, l'uso de' quali è dovunque scarso in tempi più antichi.

Il teschio di Fasano appartiene ad un uomo di circa 60 anni di età; quello di Rugge ad un individuo maschile in sui 50 anni, e quello di Ceglie ad una giovane donna da' 20 a' 24 anni.

Il cranio fasanese ha un aspetto più che elegante. Ovale è la forma della sua calvaria. La fronte, discretamente larga ed alta, incurvasi dolcemente verso i parietali, i quali, inarcandosi lievemente nel vertice, declinano con pari dolcezza verso l'occipite. Poco o nulla rilevati i seni frontali; grandi e rotonde le orbite con le apofisi esterne rivolte lievemente all'indietro; la radice del naso non molto depressa; le ossa nasali,

(1) Romanelli, *Topografia*, t. 11, p. 146 — Pratilli, *Via Appia*, p. 544 — Corcia, *Storia cit.* III, p. 490.

(2) Satyr. Lib. I. Satyr. V. 97 e seg.

sottili e delicate, riunite fra loro ad angolo ottuso; le malari tondeggianti ed alte sotto l' orbita 22 millimetri. Gli archi zigomatici sono poco proeminenti, e solo alquanto estesi lateralmente; le fovee temporali profonde, le tempia slargate in alto, ed armonizzanti col frontale e coi parietali.

Le apofisi mastoidee son grandi, ma poco rugose, il forame occipitale grande ed ovale, il palato poco profondo e somigliante, nella forma, più alla ellissi che alla parabola. I denti impiantati verticalmente negli alveoli.

Osservabile è la simmetria di questo cranio ne' suoi rapporti fra la metà anteriore e la posteriore, le quali, misurate in que' punti della circonferenza corrispondenti a due lince che si elevino perpendicolarmente da' forami uditivi, si trovano essere eguali fra di loro, imperciocchè essendo la circonferenza orizzontale del cranio di 520 millimetri, la precisa metà di questi appartiene alla parte anteriore, e l'altra metà alla parte posteriore del medesimo.

Il cranio è dolicocefalo ortognato, e il suo angolo facciale si allarga fino ad 80 gradi.

La capacità cubica dell'interno del teschio misurata con sabbia secca del peso specifico di 1358 è di centimetri cubici 1542,12. E se vuolsi ragguagliare con questa capacità il peso del cervello che era contenuto nel cranio, ritenendo il peso della sostanza cerebrale, giusta le più accurate e recenti investigazioni (1), di 1,040, si ha per risultato, che nel teschio di Fasano era contenuto un cervello del peso di 1603,80 grammi (2), peso di non lieve considerazione quando, si confronti con la tavola pubblicata da R. Wagner ne' suoi « *Vorstudien zu einer wissenschaflichen Morphologie des menschlichen Gehirns als Seelenorgan* ». Gottinga, 1860.

Le varie misure metriche di questo cranio sono le seguenti:

(1) Le varie osservazioni de' diversi anatomici si accordano in questa cifra. Ved. Davis and Thurnam, *Crania Brittannica*, t. I. p. 222.

(2) A questo peso bisogna sottrarre quello delle membrane, del sangue ed altri fluidi contenuti del cervello, che nell'insieme ascendono a 130 grammi. Conf. Huschke, *Schädel*, *Hirn und Seele*, 1854. p. 56.

Circonferenza orizzontale. . . . . millimetri.	520
Arco fronte-occipitale, dalla inserzione delle ossa nasali col frontale fino all'orlo posteriore del forame occipitale. .	386

Porzione frontale 130—P. parietale 140—P. occipitale 116.

Arco inter-auricolare, da un forame uditivo all'altro passando pel vertice.	320
Diametro antero-posteriore	183
Maggior diametro bi-laterale (D. bi-parietale)	140
Altezza del cranio dall'orlo anteriore del forame occipitale al vertice.	135
Arco intermastoideo	365
Larghezza della fronte (fra le linee curve o semicircolari al di sopra delle orbite)	99
Maggior larghezza della stessa	105
Larghezza della faccia fra i punti più distanti delle ossa malari	126
Dalla inserzione delle ossa malari sul frontale al margine alveolare superiore.	75
Altezza delle orbite	40
Larghezza delle stesse.	41
Lunghezza della volta palatina	55
Larghezza della stessa ne'suoi margini interni	41
Larghezza della base da un forame uditivo all'altro. . . .	127
— — dall'apice di un'apofisi mastoidea all'altra	117
Arco aure-frontale (da un forame uditivo all' altro passando al di sopra de' seni frontali)	295
Arco aure-occipitale (da un forame uditivo all'altro passando per la protuberanza occipitale).	295
Indice cefalico	75,84
Indice verticale.	73,77
Capacità interna del cranio determinata in centimetri cubici .	1542,12
Angolo facciale	80 gradi

Il cranio Rudiense è eccezionale per la sua grandezza, non iscompagnata da un'ammirabile proporzione di tutte le sue parti. Dolicocefalo

ed elegantemente ovale nel contorno della sua calvaria. Larga, spaziosa, prominente, benchè non molto elevata, ne è la fronte. Poco o nulla sporgenti i seni frontali; non grandi e tonde le orbite; sottili e delicate le ossa del naso. Tondeggiano le ossa malari, alte 23 centimetri al di sotto delle orbite; poco prominenti sono le arcate zigomatice, profonde le fovee temporali. La forma del palato è parabolica, i denti ben conservati ed impiantati verticalmente negli alveoli. Il teschio è ortognato, e l'apertura dell'angolo facciale di 84 gradi.

Grandi, ma poco rugose, sono le apofisi mastoidee; grande ed ovale il forame occipitale; la protuberanza di questo nome prominente, ma poco apparenti le linee trasversali e la spina occipitale esteriore.

La metà anteriore del cranio mostrasi alquanto preponderante sulla metà posteriore. L'arco aure-frontale, che è di 305 millimetri, supera di 15 millimetri l'arco aure occipitale che ne misura 290. E se inoltre si sollevi da'forami uditivi una linea perpendicolare, la quale s'incontri con quella che circoscrive la circonferenza orizzontale, la differenza fra le due metà del cranio si rende ancora più manifesta, essendochè alla metà anteriore si vedranno appartenere 281 millimetri, mentre alla metà posteriore non ne apparterranno che 255 di tutta la circonferenza orizzontale.

La capacità interna del cranio è di 1797,05 centimetri cubici, onde il peso del cervello che vi era contenuto si ragguaglia a grammi 1868,93, peso che fa collocare questo teschio fra i più cospicui che si conoscano per lo straordinario sviluppo cerebrale.

Le misure ne sono le seguenti:

Circonferenza orizzontale . . . . millimetri	536
Arco fronte-occipitale	385
P. frontale 140 — P. parietale 135 — P. occipile 110	
Arco interauricolare	340
Arco intermastoideo	382
Diametro antero-posteriore	187
Maggior diametro bi-laterale (D. bi-parietale)	143
Altezza verticale	140
Larghezza della fronte (fra le linee semicircolari al di sopra delle orbite)	100

Maggior larghezza della stessa	millimetri	110
Larghezza della faccia fra i punti più distanti delle ossa malari.		112
Dalla inserzione delle ossa nasali sul frontale al margine alveolare superiore.		71
Altezza delle orbite		36
Larghezza delle stesse.		40
Larghezza della volta palatina ne'suoi margini interni . . .		41
Larghezza della base da un forame uditivo all'altro. . . .		112
— — dall'apice di un'apofisi mastoidea all'altra		112
Arco aure-frontale.		305
Arco aure-occipitale		290
Indice cefalico		76,47
Indice verticale.		74,86
Capacità interna del cranio in centimetri cubici.		1797,05
Angolo facciale.		84

Il cranio muliebre di Ceglie è parimenti dolicocefalo ortognato, e il suo angolo facciale ha l'apertura di 76 gradi.

Elegantemente ovale è la forma della sua calvarìa, leggermente inarcata nel vertice, e discendente con dolce curva tanto ne' lati, quanto nelle regioni frontale ed occipitale. La fronte è alta, larga ed appena inclinata indietro nel suo terzo superiore; i seni frontali poco apparenti, e la glabella sporgente di qualche linea fuori il piano de' medesimi. La radice del naso è delicata e lievemente depressa, le ossa nasali congiunte insieme ad angolo poco meno che retto. Aperture orbitarie con margini tondeggianti; ossa malari delicate, leggermente inarcate ed alte 20 millim.; archi zigomatici poco prominenti. La mascella superiore è piuttosto angusta; le fovee malari poco profonde, i denti piccoli, ben conservati ed impiantati verticalmente negli alveoli, tranne gli incisivi ed i canini che sono inclinati lievemente verso l'esterno. Il palato osseo piuttosto alto, e di figura che si approssima all'ellissi.

Piccole sono le apofisi mastoidee. Due ossa wormiane, quasi rotonde e del diametro di poco più di un centimetro, l'uno a destra, l'altro a sinistra, sono collocate fra il temporale, l'occipitale e il parietale. La tuberosità occipitale è poco sporgente, ma la linea dell'occipite è bastante rilevata, benchè la spina occipitale esterna si mostri poco apparente.

Il forame occipitale è ovale al pari della calvaria, e il suo piano inclinato all'interno per 4 o 5 millimetri.

La mascella inferiore è delicata ed a sua volta elegante. Ellittica è la sua forma; sottili e poco alte le branche orizzontali; le ascendenti anch'esse sottili e compresse; poco profonda la incisura semilunare, il condilo leggermente volto all'esterno. Il margine inferiore dell'intera mascella è tondeggiante, il mento poco prominente. I denti, che sono al numero di 14, sono quasi tutti esistenti ed impiantati verticalmente negli alveoli, tranne gli incisivi ed i canini che si volgono leggermente all'esterno.

Se la circonferenza orizzontale di questo cranio viene tagliata da due linee che si elevino perpendicolarmente da'meati uditivi, si troverà divisa in due metà perfettamente eguali fra di loro, e misurando la circonferenza del teschio 500 millimetri, 250 di essi appartengono alla metà anteriore, ed altrettanti alla metà posteriore. La capacità cubica del cranio è di centimetri 1409,72, onde il peso del cervello contenuto nel medesimo può esser valutato a grammi 1466,10.

Le misure metriche di questo cranio sono quelle indicate qui appresso:

Circonferenza orizzontale . . . . millimetri	500
Arco fronte-occipitale	365

Porzione frontale 132—P. parietale 120—P. occipitale 113.

Arco inter-auricolare	305
Arco intermastoideo	338
Diametro antero-posteriore	178
Maggior diametro bi-laterale (D. parietale)	136
Altezza verticale	127
Larghezza della fronte (fra le linee semicircolari al di sopra delle orbite)	97
Maggior larghezza della stessa	105
Larghezza della faccia fra i punti più distanti delle ossa malari.	109
Dalla inserzione delle ossa nasali sul frontale al margine alveolare superiore.	72
Dalla inserzione delle ossa nasali sul frontale alla punta del mento	117

Altezza delle orbite	millimetri	38
Larghezza delle stesse		38
Lunghezza della volta palatina		44
Larghezza della stessa, fra i suoi margini interni		41
Larghezza della base da un forame uditivo all'altro . . .		106
— — — dall' apice di un apofisi mastoidea al-l'altra		102
Arco aure-frontale.		270
Arco aure-occipitale		270
Dalla punta del mento al margine alveolare inferiore . . .		30
— — — — all'angolo mascellare esterno . . .		84
— — — — all'apofisi mascellare		125
Altezza della branca ascendente della mandibola dall' angolo esterno al condilo		60
Larghezza della stessa, nella metà del suo corpo		30
Distanza fra i due angoli mascellari esterni		93
Indice cefalico		76,4
Indice verticale		71,34
Capacità interna del cranio in centrimetri cubici		1409,92
Angolo facciale.		76

Il popolo Japigico, siccome abbiamo già innanzi veduto, è rappresentato dalle tradizioni e dalla storia come discendente di quelle stirpi pelasgiche, le quali avevano, in tempi remotissimi, popolata tutta la Grecia. Antiche leggende ritenevano la schiatta ellenica affine a quella di coloro che già pria d'essa avean tenuto in lor dominio la Grecia, e quindi gli Japigî, discendenza di que' popoli antellenici, ebbero anch'essi con gli Elleni le medesime attenenze che certamente sussistevano tra Pelasgi e le popolazioni elleniche posteriori. I cranî che noi abbiamo testè esaminati danno conferma a questa nostra opinione, imperciocchè se ci facciamo a paragonarli con teschi greci di epoche meno remote vi troveremo tali elementi di similitudine da renderci sempreppiù accertati, che la stirpe japigica non era punto diversa della greca, e che Japigî ed Elleni erano così stretti fra di loro, quanto all'origine, che ben si possono considerare come diramazioni surte da un medesimo stipite originario.

La mia collezione non possiede che due soli antichi cranî greci provenienti entrambi da coloni ellenici stabiliti in Italia; ma io ho potuto estendere il confronto a due altri teschi greci parimenti antichi, avvalendomi per uno di essi delle misure pubblicate dal dotto antropologo francese, signor Pruner-Bey, e per l'altro delle notizie fornitemi dalla cortesia del mio distinto amico, il Dottor J. B. Davis, uno degli illustri autori de' *Crania Britannica*.

Uno de' miei teschi greci, ch'io debbo alla gentile amicizia del signor barone Salvatore Fenicia, fu tratto da un antico sepolcro di Ruvo, nella Peucezia. Nella tomba, nella quale fu trovato intero lo scheletro del cadavere che vi era stato deposto, si rinvennero vasi in terra cotta con dipinti monocromi, rappresentanti figure rosse sopra un fondo nero, utensili di rame e candelabri di bronzo. L'epoca della tomba sembra essere anteriore al V° secolo di Roma, quando non ancora nell' Apulia erasi estesa la dominazione latina.

Ruvo, in latino *Rubi*, in greco Ρύψ, era colonia greca di Ripe, una delle dodici città dell'Acaja, patria di Miscello, fondatore di Crotone. V'ha chi la crede di origine arcadica, indotto in questa opinione da molti idoletti di *Pan*, Dio dell'Arcadia, rinvenuti negli scavi ruvensi (1), ma la prima origine pare che non possa essere rivocata in dubbio, perciocchè i tipi di alcune medaglie di Ruvo, cioè la testa di Giove e l'aquila posata sul fulmine, ed il fulmine alato chiaramente accennano alla città di Ripe, detta da Eschilo κεραυνίας Ῥύπας (2), posta in vicinanza di Egio nel cui territorio era fama che Giove fosse stato nutrito dalla capra Olenia (3).

Questo teschio virile, dolicocefalo, come i tre japigici sopra descritti, è mancante della mascella inferiore e dell' apofisi zigomatica sinistra. Manca altresì di tutti i denti, e dallo stato degli alveoli dentarî, e dalla condizione delle suture e de' forami mostra aver appartenuto ad un individuo di oltre a' 60 anni di età. Spesse e pesanti ne sono le ossa, rugose le superficie sulle quali si spandono le aponeurosi muscolari, molto rilevate le linee semicircolari e la spina occipitale. Due piccole ossa wormiane, l'uno a destra e l'altro a sinistra, s'interpongono fra l'osso

(1) Jatta, *Dell'antichissima città di Ruvo*. Napoli, 1844, p. 55, 74.
(2) Ap. Strab. VIII.
(3) Corcia, *Stor. cit.* III. p. 511.

occipitale e il parietale presso all'estremità dell'angolo inferiore-posteriore di quest'ultimo.

È osservabile in questo cranio la sinostosi della metà posteriore della sutura sagittale, da cui si ripete una notevole depressione ed una maggiore strettezza in questa parte della calvaria, non meno che un allargamento più del consueto nella porzione inferiore dell'occipitale.

Nel rimanente questo cranio ha belle forme; alta ne è la fronte e larga, poco rilevati i seni frontali, le ossa nasali congiunte insieme ad angolo quasi retto. Esso, nell'insieme, rassomiglia al cranio di Fasano con cui ha quasi identico l'indice cefalico, che nel primo è rappresentato da 75,84, nel secondo da 75. La sua capacità cubica si eleva a centimetri 1528,64, ond'è inferiore di 268,41 centim. cubici a quella del cranio di Rugge (per verità eccezionale) e di 13,48 cent. cubici a quella del cranio di Fasano, ed è superiore di centim. 18,92 a quella del teschio femmineo di Ceglie. La massa contenuta nel cranio doveva essere del peso di 1589,78 grammi, 24 grammi meno di quella contenuta nel teschio di Fasano, e 279,15 grammi di quella del teschio radicale.

L'altro cranio greco da me posseduto mi fu donato dal fu conte di Siracusa, ed era stato raccolto nell'antico sepolcreto cumano che fu scoperto nel 1856 nelle escavazioni intraprese in quella vetusta città sotto gli auspici di quel Mecenate delle lettere e delle arti.

Cuma, siccome è noto, era la colonia greca più antica che sorgesse in Italia. Fondata da' Calcidesi, di stirpe jonica, surse tosto a prosperoso stato, e prese il primo posto fra i missionarî della civiltà greca in Italia. Non allargò mai ad estesi limiti il suo territorio, ma trattando pacificamente con gli indigeni Campani, fondò di poi la città portuale di Dicearchi (più tardi *Puteoli*), e quindi quelle di Partenope e di Neapoli.

La Necropoli scoperta era presso una delle uscite della muraglia che Aristodemo Malaco avea fatto innalzare intorno a Cuma, e si trovò ricca soprattutto di vasi dipinti, che ora sono bellissimo ornamento del Museo Nazionale di Napoli (1). Iscrizioni greche arcaiche rinvenute in quel sepolcreto ne rivelano la sua antichità (2), e ci permettono di credere che i cadaveri ivi trovati appartenessero a' discendenti di que' vetusti coloni calcidesi che aveano fondata e popolata quella città. De' cranî che vi fu-

(1) Fiorelli, *Notizia de' vasi dipinti rinvenuti a Cuma nel MDCCCLVI, posseduti da S. A. R. il Conte di Siracusa. Napoli, 1857, fol. con* XVIII. *tav. cromo-litograf. p. IV.*

(2) Minervini, *Bullettino Archeol. napol. Nuova Serie Anno, VI*, 1858.

rono raccolti due furono deposti nel Museo Anatomico della R. Università di Napoli, ed un terzo, come dissi, venne nelle mie mani per dono cortese di S. A. R. il Conte di Siracusa.

Il cranio che è in mia proprietà è intero e ben conservato, meno che nella porzione basilare dell'osso occipitale della quale è mancante. Nella mascella inferiore esistono tutti i denti, ma nella superiore mancano il 3°. e 4°. mascellare destro ed il terzo mascellare sinistro. Appartiene ad individuo maschile, la cui età sembra essere quella da' 50 a' 60 anni.

È un bellissimo saggio del tipo greco, e tutto in esso mostra una perfetta armonia in ogni sua parte. Una sinostosi prematura nella parte inferiore della sutura sagittale ha dato origine in questo cranio, come in quello di Ruvo, ad una depressione in quella porzione della calvaria, la quale depressione rende più osservabile la tuberosità dell'osso occipitale.

La fronte è alta, larga ed espansa lateralmente. Poco apparenti i seni frontali, che sono rilevati più nella glabella che sopra le orbite. Le ossa del naso s'impiantano sul frontale, formando appena una leggera depressione, e congiungendosi fra loro ad angolo quasi retto. Le ossa malari sono alte 26 millimetri, ed il loro margine inferiore si slarga alquanto verso l'esterno. Le fovee malari poco profonde, la volta palatina alta e di forma ellittica. La mascella inferiore piuttosto alta nel suo corpo, col mento un poco sporgente, e di forma che si avvicina alla ellittica. La branca ascendente è molto inclinata indietro, ma meno di quello che sia nel cranio di Ceglie.

Il teschio è dolicocefalo ortogonato. Il suo angolo facciale misura 83 gradi; nondimeno i denti anteriori della mascella superiore volgono alquanto infuori, ma quelli della mandibola inferiore sono impiantati verticalmente negli alveoli.

La rassomiglianza di questo cranio con i tre japigici da me descritti è molto evidente: la stessa simmetria delle parti, la stessa dolcezza delle linee curve che ne circoscrivono la superficie, lo stesso indice cefalico (75), che segna tanto in esso e in quello di Ruvo, quanto ne' tre japigici quasi il medesimo rapporto fra la lunghezza e la larghezza della calvaria. La capacità cubica del cranio è identica a quella del teschio di Ruvo, cioè misura 1528,64 centim. cubici, che rappresentano una massa cerebrale di 1589,78 grammi.

Rispetto agli altri due antichi cranî greci, io non posso fornire altre particolarità, se non quelle che si desumono dalle misure che si trove-

ranno nello specchio che aggiungo quì appresso; ma elleno sono pur tali, che fanno aperta quanto anche ad essi sieno somiglianti i nostri cranî japigici.

Uno di questi cranî greci fu tratto da un' antica tomba presso Atene, l'altro da un sepolcro dell'Isola di Rodi. Il teschio ateniese fa parte della splendida collezione craniologica del mio distinto amico, signor Dottor J. B. Davis, il quale, da me richiesto, si è compiaciuto inviarmene le misure. Il cranio dell' Isola di Rodi si conserva nella Galleria antropologica del *Jardin des Plantes* di Parigi, donatovi dal distinto archeologo signor del Saulcy, ed è stato descritto accuratamente dal signor Pruner-Bey nel vol. V° de' *Bulletins de la Société d' Anthropologie de Paris* (1864).

Non tacerò che fra i teschi greci antichi, come fra i moderni, havvene di quelli che si distinguono per la forma brachicefala, ed uno in effetti, antichissimo (probabilmente anteriore di V secoli all'e. v.), proveniente da Corfù se ne conserva nel Gabinetto anatomico dell'Università di Pavia (Sala 2ª N. 75), il cui indice cefalico è rappresentato da 83,52.

Questa forma brachicefala incomincia a mostrarsi in Grecia dopo l'Acarnania, sulla sponda settentrionale del Golfo d'Arta, e su' confini boreali della Tessalia, continuandosi dominante per tutto l'Epiro, l'Albania e le contrade slave che d'ogni intorno circondano la Grecia settentrionale. Il cranio dolicocefalo invece predomina fra i Tessali e in tutto il Continente e le Isole a mezzogiorno dell'Epiro e della Tessalia (1).

Io non so se i confini de' due tipi craniali nell'Ellade fossero stati in antico que' medesimi che noi osserviamo a' giorni d' oggi, ma ho ragione di credere che il brachicefalismo avesse acquistato a' dì nostri, massime dopo la conquista mussulmana, maggiore impero che non avesse innanzi nel suolo della Grecia. Almeno l' Epiro, contrada pelasgica, non doveva essere stata povera di cranî dolicocefali, sebbene razze straniere (forse slave o scitiche) vi vivessero confuse con popoli ellenici. La stessa Albania, che ebbe colonie pelasgiche nel suo territorio, dovea contenere

(1) Queste ed altre preziose notizie sull' antropologia della Grecia io le debbo alla gentile amicizia del prof. C. Zaviziano, uomo dottissimo, ed autore di un eccellente Trattato di Anatomia Umana e di molte altre opere importanti.

A questo illustre uomo sono pure debitore di una serie di cranî greci moderni, che si cercano indarno nelle più ricche collezioni antropologiche

una parte di popolazione dolicocefala, ma la preponderanza del tipo indigeno brachicefalo, e le ulteriori irruzioni di razze fornite di quella forma craniale hanno a poco a poco assorbito il tipo delicocefalo, e fatta quasi scomparire ogni traccia del medesimo fra le popolazioni illiriche ed epirotiche odierne. Lo stesso destino dell'Epiro è toccato alla maggior parte della Macedonia ove i Valacchi si sono sostituiti a' Macedoni, ed una lingua slava all'antica lingua favellata dalle falangi di Alessandro. Nell'Epiro peraltro l'elemento greco è rimasto tuttora nella lingua che si favella sul Pindo, nella Molosside e nell'Amfilochia (Giannina ed Arta); ma nel Pindo stesso vivono alcune colonie slave (Grandi Valacchi e Boviani) che hanno introdotto elementi stranieri anche in que'remoti e solitarî recessi della stirpe ellenica (1).

Come oggi al settentriore della Grecia la predominanza del tipo brachicefalo è la pruova più evidente della presenza di razze straniere in quella parte dell'Ellade, così parimenti que'cranî brachicefali che pur s' incontrano nella Grecia antica, ci dimostrano che anche allora la stessa Ellade non era scevra di razze eterogenee; e che se fra coloro che i Greci chiamavan *barbari* vi erano di quelli, come i Pelasgi, ne'quali scorreva il medesimo sangue nobilissimo degli Elleni, vi erano altresì di coloro che appartenevano ad altre razze, a quelle razze allofiliche o turaniane, che avevan tenuto in lor dominio l'Europa intera pria della venuta degli Indo-Europei. Que'cranî brachicefali adunque rinvenuti nella Grecia antica son da ritenere appartenenti ad individui di stirpe non ellenica; imperciocchè dove poi furono veri Elleni i teschi sono stati e sono anche al presente, nella loro immensa maggioranza, dolicocefali (2).

Quanto a'Pelasgi io non solo non li credo dissimili dagli altri Greci, ma li credo anzi uno de'rami primigenî degli Elleni che venne pria degli

(1) Max Muller, *Suggestions for the assistance of officers in learning the languages of the Seat of war in the east.* London, 1854, p. 42-53-Ved. anche la bella Mappa etnologica del Petermann che accompagna quest' opera.

(2) Il Retzius scrive nel suo « *Coup d'oeil sur l'état de l'Ethnologie au point de vue de la forme du crâne osseux* (trad. du suèdois par E. Claparède, 1860): « I' ai introduit les Hellènes dans mon énumération des dolichocéphales d' Europe. Mes raisons pour cela ont deja été exposées ailleurs en 1847 (*Oefversigt af Kongliska Vetensk. Acad. förhandlinger*, *8 sept. 1847*). Seulement, d' après tous les faits que j'ai pu rassembler, la forme dolichocéphalique n'a jamais appartenue à la majorité de la nation grecque, qui présente, au contraire des caractères de brachycéphales.

altri Greci ad occupare il territorio dell'Ellade tenuto innanzi, come ho detto, da un popolo turaniano brachicefalo. E se il lungo spazio di tempo in che essi erano vissuti divisi dalle altre schiatte greche avea potuto farli divenire quasi stranieri agli stessi Greci, la facilità con cui le nuove migrazioni elleniche si stabilirono nella Grecia, e le credenze religiose, e gli stessi nomi delle divinità poco o nulla dissimili da quelli de' Pelasgi ci offrono altri argomenti a convalidare la opinione, che Pelasgi ed Elleni non formassero che una sola razza, quella razza nobilissima greca, che tanta parte prese, nell'evo antico, allo svolgimento della cultura dell'umanità. E dove invero furono Pelasgi il cranio era ed è tuttora (meno alcune eccezioni) dolicocefalo. Pelasgiche, come ci pare di aver dimostrato, erano quelle genti venute dalla Grecia a popolare la Japigia, e i cranî che abbiamo studiati, appartenenti agli antichi Japigi, non sono che dolicocefali. Pelasgi erano gli abitanti dell'Arcadia e d'altre parti del Peloponneso, ed in Morea ora domina il cranio dolicocefalo. Pelasgi furono in Tessalia, in Beozia, in Focide, in Eubea, in Estiotide e in molte delle Isole dell'Arcipelago e sulla costiera asiatica dell' Ellesponto, e dappertutto, in coteste contrade, non predomina che il cranio dolicocefalo.

Ma a far meglio conoscere il tipo japigico, e ravvisarne sempreppiù la somiglianza coll'ellenico soccorrono alcuni antichi dipinti rinvenuti, non ha molti anni, in una nobilissima tomba gnatina, e conservati attualmente fra gli affreschi antichi nel Museo Nazionale di Napoli, sotto i N. 1-4. Il sepolcro in cui furono scoperti si componeva di tre stanze, di cui la sola che conteneva il cadavere dell'estinto era dipinta con affreschi di buona esecuzione rappresentanti molte figure alte circa un metro, a piedi ed a cavallo, quasi tutte in abito guerriero, ed armi e frutta, quali il pomo granato, il melo cidonio etc., diversi uccelli ed una bella testa alata, forse di Mercurio, di grandezza oltre il naturale con lunghe chiome che discendono ondeggianti sugli omeri. Una iscrizione a grandi caratteri, in lettere messapiche, disposta orizzontalmente sulla parte superiore di quest'ultimo dipinto indica il nome dell'estinto, che se io bene interpreto il senso della iscrizione:

ΔΑΞΙΗΟΝΑΣ ΠΛΑΤΟΡΡΙΗΙ ΒΟΛΛΙΗΙ

si traduce:

Dasimius Pletorii Bullaei f., nome non infrequente nelle iscrizioni mes-

sapiche, e che ci richiama alla mente una delle famiglie più illustri che aveano avuto maggior potenza ed autorità nell'Apulia (1).

Parte dell'ultima parola di Dasimio, o Dasumio Bulleo (ΛΑΙΗΙ) trovasi ripetuta sull'angolo sinistro di un altro dipinto della stessa tomba, il quale rappresenta un giovane scudiere imberbe che regge con la destra mano il freno di un cavallo, e con la sinistra stringe una frusta. È vestito di rosso chitone che non giunge oltre la metà delle cosce, porta sulle spalle un mantello di color giallo soppannato di azzurro, ed ha scoperto il capo, e nude le gambe ed i piedi.

Nelle figure di questi dipinti si scorge quell'aria di parentela che si ravvisa fra gli individui di una medesima razza, e confrontate con tipi greci, presentano quella somiglianza direi quasi di famiglia che non sfugge all'occhio di alcuno. Io ho riprodotta nella tav. III^{a}. la testa del giovane scudiero, e ciascuno può osservare ne' tratti delicati di quel volto i caratteri che son comuni alle più belle giovanili fisonomie elleniche. Il profilo della fronte, del naso, delle labbra del mento e di tutto il viso, e il contorno intero della testa richiamano tosto al pensiero i più bei tipi greci riprodotti in tanti capilavori della statuaria antica, e danno con ciò maggior conferma all'opinione per noi sostenuta, essere stata la Japigia popolata dalla stirpe Pelasgica, la quale prima della invasione dorica nel Peloponneso e della estensione del nome ellenico a tutta la Grecia, avea tenuto in suo dominio tanta parte dell'Ellade, ed avea propagato fra le rozze schiatte indigene i primi semi di quella cultura che raggiunse, ne' secoli seguenti, nel bel suolo della Grecia il suo più alto svolgimento.

Anch'oggi, nelle province di Capitanata, di Terra di Bari e di Terra d'Otranto le fisonomie degli indigeni, benchè miste di elementi sabellici, che vi fecero più tardi irruzione, non si discostano da quel tipo che fu proprio, negli antichi tempi, di quella contrada. Cranio dolicocefalo, mezzana statura, valida complessione, neri capelli, occhio nero e vivace da cui traspare la pronta mobilità dell'animo e la pacata mitezza del carattere. I contorni del volto morbidi e delicati, il viso quasi sempre ovale, la fronte alta e larga, il naso profilato e poco depresso nella sua radice com'è carattere quasi universale della stirpe greca. Pronto e vivo l'ingegno, fervida la fantasia, ardente, ma spesso impetuoso e tra-

(1) Mommsen, *Iscriz. Messapiche*, p. 64-65. *Unteritalianischen Dialekte*, p. 72.

smodante l'affetto; provvidi, laboriosi, leali, onesti, caldi nel sentimento dell'amicizia, ma non di rado incostanti ne' propositi, e dominati da una quasi puerile vanità che ci ricorda anch'essa quella razza greca, dalla quale eglino traggono la origine. Lieto anzichè no è il temperamento, quasi mediano tra la burbanzosa serietà e la scurrile leggerezza. Dolce, eccentuato, armonioso il dialetto, tanto più grato all'orecchio, quanto più vicino al capo di Leuca.

Ciò posto, ecco i corollarî che ci sembra poter dedurre da' fatti che abbiamo esposti finora:

1°. Ne'vetusti tempi da varie parti della Grecia, della Creta e dell'Illirico partirono coloni che vennero a porre stanza nel territorio dell'antica Japigia. Erano Pelasgi, e Elleno-barbari, che scacciati da altri Greci, cercavano un asilo nelle vicine terre italiane, o avventurieri che per dissensioni intestine, o per vaghezza di miglior fortuna abbandonavano le patrie contrade.

2°. I Latini ed i Sanniti non conobbero la Japigia che molto tardi, e quando estesero in quella parte d'Italia la loro autorità, que'paesi erano grecizzati, e solo in un angolo remoto, nella Messapia, era rimasto vivo l'antico elemento elleno-barbaro, il quale senza essere stato prima dirozzato dalla cultura ellenica, fu assorbito direttamente dall'elemento italico e latinizzato.

3°. Le genti che dalla vicina Grecia e paesi contermini erano venute a popolare la Japigia erano fornite di cranio dolicocefalo, il quale presenta tutti i caratteri che lo rassomigliano all'antico cranio greco, e chiariscono l'affinità originaria fra gli Elleni e le popolazioni di quella parte della nostra Penisola.

4°. Dove un tempo furono Pelasgi, anche al presente le popolazioni sono dolicocefale, così in Italia come nel Peloponneso ed in altre parti della Grecia, ove il sangue pelasgico erasi accumulato in maggior proporzione che in verun'altra contrada.

5°. L'idioma che favellavasi nella Japigia, tuttochè non ancora ben diciferato, si rivela propagine del grande albero Indo-Europeo, e si ricongiunge, per molti lati, più col greco che con le lingue che si parlavano in Italia.

6°. Anche i dipinti rinvenuti in tombe japigiche confermano i risultati storici e le osservazioni anatomiche, e dimostrano anch'essi la identità di origine tra la stirpe greca e i primi Ariani che popolarono la Japigia.

7°. Nel territorio japigico, ora province di Capitanata, di Terra di Bari e di Terra d' Otranto, la popolazione odierna ha conservato gran parte del tipo greco; e chi guardi bene addentro ne' caratteri fisici e morali di quelle genti vi scorgerà analogie e similitudini che danno conferma al-l'opinione « *essere stati gli antichi Japigî un ramo pelasgico, o elleno-barbaro di Grecia tramutato, in remotissimi tempi, nel territorio sud-orientale della nostra Penisola* ».

MISURE DEI CRANÎ JAPIGICI

confrontate con quelle di antichi cranî tanto di Grecia, quanto di Colonie greche in Italia.

LOCALITÀ ove furono raccolti i cranî	ETÀ e SESSO	Circonferenza orizzontale	Arco intermastoideo	Arco fronte-occipitale	LARGHEZZA del frontale	LARGHEZZA del parietale	LARGHEZZA del occipitale	Diametro antero-posteriore	Maggior diametro bi-parietale	Altezza verticale	LARGHEZZA della fronte fra le linee semi-circolari: sulle orbite	LARGHEZZA della fronte fra le linee semi-circolari: ne'punti superiori	FACCIA: larghezza	FACCIA: lunghezza	Indice cefalico	Indice verticale	Capacità in centimetri cubici	COLLEZIONE alla quale appartengono
Fasano	60 ♂	520	365	386	130	140	116	183	140	135	99	105	126	»	75.84	77.77	1542.12	G. Nicolucci.
Rugge . . .	50 ♂	536	382	385	140	135	110	187	143	140	100	110	112	»	76.47	74.86	1797.05	Id.
Ceglie. . . .	24 ♀	500	338	365	132	120	113	178	136	127	97	105	109	117	76. 4	71.34	1409.72	Id.
Ruvo	60 ♂	520	374	374	124	143	107	176	132	137	93	106	113	»	75	73.23	1528.64	Id.
Cuma. . . .	50 ♂	525	350	»	128	130	»	184	138	130	97	107	124	124	75.51	76	1528.64	Id.
Atene. . . .	35 ♂	509	365	378	132	129	117	181	132	146	»	»	131	120	73	73	»	J. B. Davis.
Isola di Rodi.	» ♀	535	»	»	»	»	»	185	146	130	96	120	128	»	78.92	70.27	»	*Jardin des plantes.* (Parigi).

Spiegazione delle Tavole

Tavola I.

Cranio virile dell' antica *Gnathia*, oggi Fasano, disegnato in grandezza naturale.

Tavola II.

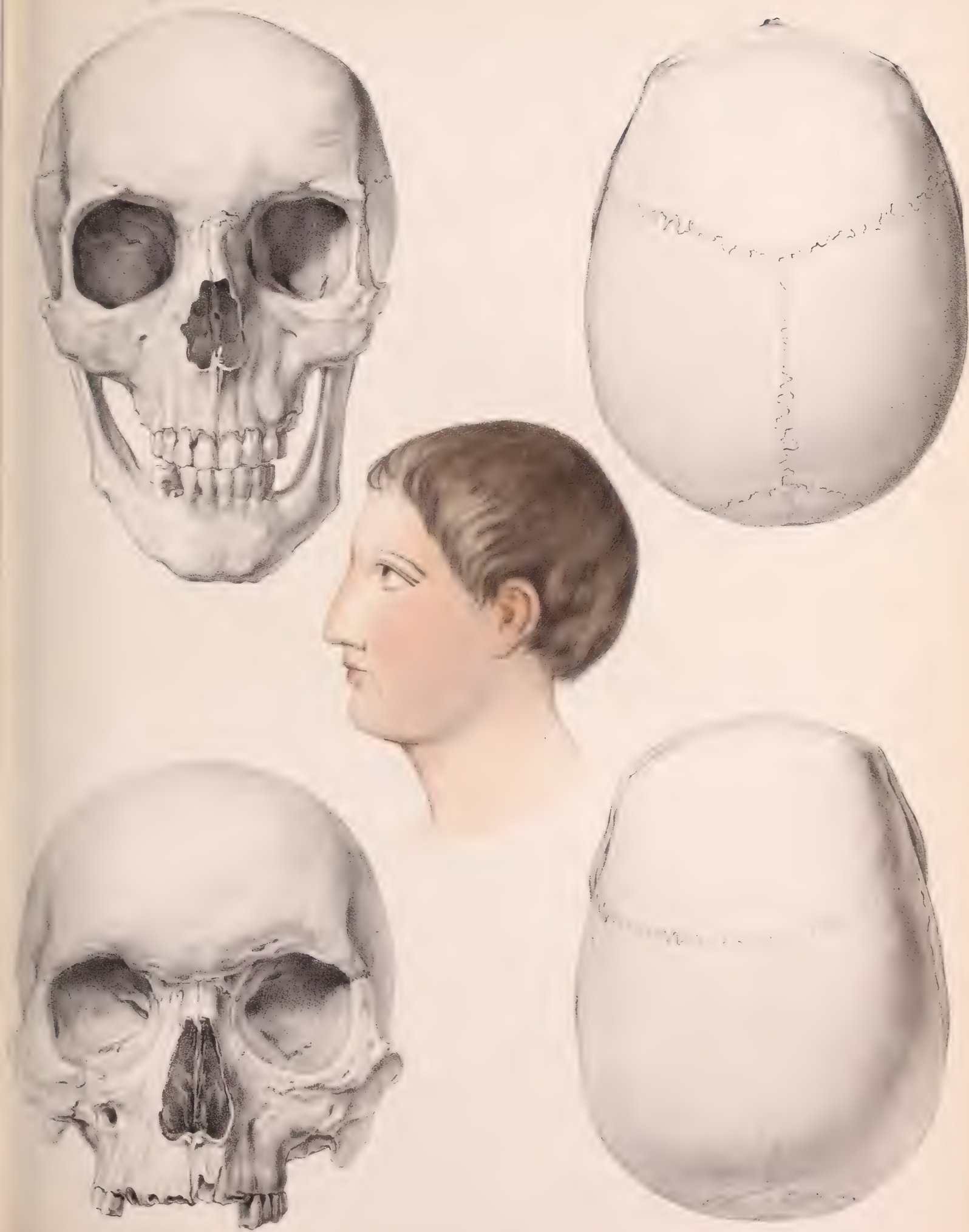
Cranio muliebre dell'antica *Cælium*, oggi Ceglie messapica, disegnato in grandezza naturale.

Tavola III.

Le due figure inferiori rappresentano il cranio di Fasano visto di prospetto, e dalla parte del vertice, ovvero secondo la *norma verticale* del Blumenbach.

Le due figure superiori rappresentano il cranio di Ceglie ne'medesimi aspetti del precedente.

La testa nel mezzo della tavola rappresenta il giovane scudiero che ornava, con altre dipinture, l'antica e nobilissima tomba japigica descritta a pag. 29.

Questo prezioso monumento si conserva, con le altre pitture della stessa tomba, fra gli affreschi antichi nel Museo Nazionale di Napoli.

Lit. Richter e C° Napoli

Lit. Richter e C°. Napoli.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA
DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

NUOVE OSSERVAZIONI SU TALUNI AGENTI ARTIFIZIALI CHE ACCELERANO LA MATURAZIONE NEL FICO

MEMORIA

DEL SOCIO ORDINARIO G. GASPARRINI

letta nella tornata del dì 14 novembre 1865

In varii tempi abbiam pubblicato parecchi lavori sul fico e sul caprifico, due individui, maschio e femina, della medesima specie. Le ricerche versavano principalmente sulla struttura e formazione così del ricettacolo come delle diverse parti costitutive il fiore ed il frutto, sull'insetto che vive e propagasi nell'ovajo del caprifico, sulla pratica e l'effetto della caprificazione in uso tra noi, sulla origine dell'embrione seminale ed altro. Poichè su tali quesiti verun altro albero fruttifero, nostrale o straniero, offre forse, almeno in quanto si stendono le nostre conoscenze, uguali o maggiori difficoltà. Anche il processo maturativo presenta le sue singolarità; e due anni addietro leggemmo all'Accademia Pontaniana, su tale proposito, un certo numero di osservazioni, che allora (1) furono poste a stampa.

In tal lavoro, per ciò che concerne al solo processo maturativo, si trattò della natura e varietà dei colori che tal frutto acquista approssimandosi alla maturezza, si fe' cenno delle modificazioni organiche che in questo mentre avvengono ne' tessuti differenti, e della origine dello zucchero (2); si parlò di un infusorio del genere *Anguillola*, che il mosche-

(1) Sulla maturazione e la qualità dei fichi dei contorni di Napoli (1863) inserite nel Volume IX degli Atti di quell'Accademia.

(2) Rispetto alla origine dello zucchero dicemmo allora che la sorgente principale di tal sostanza dovea riconoscersi nell'amido esistente nel parenchima, non già nel latice, siccome pare a prima vista; poichè il latice trovasi ne' suoi serbatoi anche a maturezza compiuta, e negli stessi fichi risec-

rino detto cinipe, ospite del caprifico, porta nei fichi mangerecci. E si toccò pure degli agenti, i quali, in date circostanze, possono o debbono accelerare la maturazione, distinguendo i naturali dagli artifiziali. Naturali sono il calore, la luce, l'acqua, il terreno con le funzioni che ne dipendono, come l'esalamento, la respirazione, la nutrizione in genere. In somma gli stessi agenti che mantengono la vita, secondo l'intensità con cui operano, ed il tempo da che dura la loro azione, influiscono sulla maturità con renderla tardiva, precoce, più o meno perfetta.

Artifizialmente i coltivatori napoletani, e di qualche altra contrada italiana, accelerano la maturazione dei fichi con quella pratica da essi chiamata impropriamente puntura, che consiste in ugnere con pochissimo olio di ulivo la bocca del fico, giunto a certa grandezza, quando i fioretti in esso contenuti son diventati rossi, e le squame alquanto si sono sollevate. L'effetto non manca, cioè la maturezza anticipata di circa dieci giorni. Come operasse l' olio d' ulivo in questo caso non si trova detto da nessuno, ch'io sappia, mentre in altre parti dello stesso albero opera alla maniera de' veleni, principalmente sulle foglie. Venti anni addietro, trattando di caprificazione, nel distinguere l'effetto del cinipe dall'altro dell'olio, mi venne detto in proposito questo. « Opera l'olio sul fico in « una maniera a me ignota; posto sulla bocca del frutto, questa si ri- « stringe, indi l'olio a poco a poco si diffonde, e dove arriva ne altera « il color verde. Mi è parso vedere che tal sostanza punto non alterasse « l'umor latteo, ma piuttosto impedisse l'esalamento e le altre funzioni « della corteccia, tanto per rispetto alla luce, quanto all'aria, e che per- « ciò il fico unto comincia a maturare dalla base, e riesca di sapore men « buono di quello che matura naturalmente ».

Siffatta spiegazione probabile sul modo come operasse l'olio è stata riprodotta due anni fa nel lavoro apposito, testè citato, sulla maturazione, accompagnandola con molte ragioni. Abbiamo negato che tale liquido potesse operare in parte alla maniera dei fermenti, comunicando alla massa cellulare un movimento o alterazione speciale, da cui risul-

cati. Le nuove indagini non contraddicono questa assertiva; ma un poco di zucchero non manca nel latice di tante piante, abbonda nell' *Urostigma Saussureana*, ce ne ha poco in quello del fico comune, e scuopresi col reattivo di Frommhers. Essendo lo zucchero solubile nell'acqua il latte che vi si mescola fa un deposito in fondo al bicchiere, e la parte liquida passata per filtro e trattata con lo stesso reattivo, dopo avere alquanto bollito, manifesta similmente lo zucchero, che nella composizione organica dell'umor latteo esiste nella parte fluida, non già nella globulare che rimane inalterata a maturazione compiuta. Or questa piccola quantità di zucchero non potrebbe mai rappresentare l'altra tanto copiosa nel fico maturo.

terebbe una maturezza precoce. «Inchinerei piuttosto (abbiam soggiun-
« to non convinti della spiegazione data) a riconoscere in quel che con-
« seguita all' inoliamento della bocca del fico, un certo rapporto con
« uno degli effetti del polline sullo stimma. Questa parte venuta a con-
« tatto con quello, intenerisce e si muore in breve tempo; il che deve
« conferire, almen per poco, alla crescenza del sottoposto ovajo».

Dopo tutto ciò si esposero i particolari delle sperienze intraprese col-
l'intento se altre sostanze avessero facoltà di promuovere similmente la
maturazione del fico. Il risultato fu che l'olio di mandorle, di pesce, di
noce, di ricino, di lino, di fegato di merluzzo, il lardo, lo strutto, il
burro aveano operato non altrimenti che l' olio di olive. Per fino col
latte del titimalo (Euphorbia Lathyris) applicato alla bocca del fico sar-
nese si ottenne, poco meno, lo stesso risultato.

Senza effetto erano stati l'aceto, la trementina. Nella stimativa delle
sperienze appariva chiaro l'efficacia quasi uniforme delle materie grasse
menzionate, non sul corpo del frutto, ma solo quando vengono applicate
alla bocca. «Tal parte quindi, si concluse, ha più sensività verso gli agen-
« ti adoperati, e ciò par che risieda nelle foglioline o squame cigliose
« di cui la detta bocca è fornita». Qualche tentativo fatto sul melo, sul
pero, sul melogranato, con alcune delle sostanze dette era stato senza
effetto.

Pubblicato il lavoro, e non soddisfatto della spiegazione, rispetto al-
l'operare dell'olio e delle altre materie grasse, ripensandovi sempre, ci
accorgemmo di non aver preso nella debita considerazione un fatto ri-
levante, cioè che il primo effetto dell'inoliamento essendo l'aumento di
volume del ricettacolo, ciò non potrebbe avvenire se veramente, sicco-
me si era sospettato, l' olio ne disturbasse o impedisse le funzioni, l'esa-
lamento e la respirazione innanzi tutto; e che se così fosse, il fenomeno
avrebbe luogo più facilmente quando le sostanze promotrici la maturez-
za venissero applicate su tutta la superficie dell'organo.

Dietro questo concetto siamo tornati l'anno scorso a ripetere le spe-
rienze dell' anno precedente, e ad istituirne altre più variate. A dì 22
agosto, unti con olio di ulivo il solo corpo di alcuni frutti del fico sar-
nese, del fico tintore, del fico detto d'inverno, e di altri, lasciando in-
tatta la bocca, non si ottenne verun cangiamento, nè maturazione anti-
cipata; mentre sugli stessi alberi i frutti in pari condizioni, unti alla boc-
ca, ingrandivano prima, e fra dieci giorni erano maturi. L'olio spalmato
su tutta la faccia superiore della foglia, o per una certa estensione, in

pochi giorni la fè morire; ed alcune gocciole del medesimo liquido qua e là disperse alterarono sensibilmente il parenchima in corrispondenza, che imbrunì prima poscia riseccò. L'esperienze ripetute, a dì 8 agosto, con gli stessi olii e materie grasse adoperate l' anno precedente 1863, ungendo solo la bocca dei ricettacoli pedagnuoli più sviluppati, diedero il medesimo risultato, nello spazio di otto in dieci giorni, cioè che tutti o alcuni tra essi ingrandivano del doppio o più, intenerivano, e certi si trovarono pervenuti a compiuta maturezza. Il latte di capra e la trementina furono senza effetto, non altrimenti che la tintura jodosa e la soluzione di potassa; l' acqua arzente pura fu poco o niente efficace, forse a causa della sua volatilità. Altro sperimento tentato a 19 agosto sul fico albo diede questo risultato. Di tre unti con olio di ricino due maturati anticipatamente, di quattro con sugna due, di cinque col lardo due, di cinque col burro tutti, di tre con olio di lino un solo, di sei con olio di mandorle tre, di quattro con olio di noce un solo, fra sei con olio di olivo cinque. E nel fico brogiotto fra cinque bagnati con tintura jodosa un solo si trovò ingrandito il doppio, e spaccavasi mentre incominciava a intenerire: lo stesso effetto si ebbe coll'alcool puro, e colla soluzione di potassa sullo stesso numero di ricettacoli; di quattro bagnati con latte di capra, due ingranditi del doppio erano tuttavia verdi e sodi. L'ammoniaca fu senza effetto. Di quattro ricettacoli bagnati leggiermente con acido azotico, nella bocca, un solo ingrandito si spaccava; i rimanenti con le squame concotte dall' acido non offrivano verun cangiamento. Quindi i fatti osservati nel 1863 sul potere più o men forte di certi olj e materie grasse, di promuovere la crescenza, e la maturazione anticipata nel fico fra il termine di circa dieci giorni, vennero confermati l'anno scorso, nel quale inoltre si tentarono altre materie.

A dì 21 agosto su rami diversi dello stesso albero appartenenti al fico brogiotto imperiale, otto ricettacoli unti alla bocca con catrame minerale allungato nell' olio di mandorle, altrettanti con petrolio, quattro con mescuglio di sugna e fiore di solfo, nel giorno 25 erano tutti in via di maturazione, cioè quattro giorni dopo. Dalla varietà del catrame minerale riconosciuto nel commercio col nome di *black* si ottenne lo stesso effetto in tre sopra quattro. Or anche all'olio di olivo, che non ammette dubbio rispetto alla sua efficacia qualche ricettacolo vi resiste. Di sei bagnati con acqua zuccherata, e cinque col carbonato d'ammoniaca, un solo, per ciascuno di tali liquidi, si trovò un poco ingrandito nel giorno indicato. Cinque unti con gesso mescolato allo strutto erano pari-

menti un poco ingranditi: di quattro unti col miele un solo era maturo ed un altro in via di maturazione; cinque trattati col solfato di ammoniaca, e altrettanti col cupro ammoniacale, rimasero nello stato in cui erano a 21 agosto, quando, siccome si è detto, si pose mano all'esperimento. Nel medesimo giorno bagnata la bocca a sei ricettacoli pedagnuoli del fico d'inverno, con poco di acido idroclorico, al quarto giorno si trovarono tutti ingranditi del doppio, e cominciavano a intenerire avviandosi alla maturità.

L'azione conforme dell'acido solforico, nel corso di agosto e parte di settembre, fu riconosciuta con ripetuti esperimenti. L'acido solforico del commercio, allungato con due parti di acqua, condusse, con poca varietà, a perfetta maturezza nello spazio di otto giorni, un certo numero di ricettacoli del fico tintore e paradiso; e sopra cinque del fico d'inverno, dopo tre giorni, se ne trovarono tre ingranditi in via di maturazione. Con quattro parti di acqua, l'acido diede nel fico paradiso lo stesso risultato in due ricettacoli, come se ne fossero stati vivamente eccitati; ma altri due, ingranditi un poco, si spaccavano, senza mutar colore, senza intenerire in veruna parte. In seguito si volle sopra ciò procedere con più precisione adoperando lo stesso acido allungato con tre, con sei, e con nove parti di acqua. Con ciascuno di questi liquidi si bagnò la bocca separatamente a quattro ricettacoli del fico sarnese, del fico albo, e del brogiotto; in tutto trentasei, i quali in capo a tre giorni, cioè a 25 agosto, si rinvennero ingranditi circa il doppio e prossimi alla maturazione. Bagnata la bocca a cinque frutti immaturi del fico brogiotto imperiale con acido solforico del commercio allungato in due parti d'acqua, tre di essi, all'ottavo giorno, si trovarono ingranditi del doppio, ed aperti in fino alla base in due o tre parti; la loro corteccia era divenuta violetta, i fiori rossastri, la polpa intenerita, ma poco sapida, siccome avviene anche nei ricettacoli che si aprono naturalmente. Si vedeva inoltre le squame della bocca intenerite e come cotte dall' acido. Il quarto frutto, senza crescere nè mutar colore, cominciava a fendersi in due parti nella sommità. Il quinto, ingranditosi il triplo, era sano, colla corteccia di color violetto verdastro, la bocca chiusa, con le squame parimenti intenerite e morte. In capo ad undici giorni (19 agosto), l' uno dei primi tre che si erano spaccati, si trovò in via di disfacimento, coperto di muffa appartenente al genere *Ascophora;* gli altri due ancora sani, ma piuttosto asciutti, tranne qualche punto più intenerito accompagnato da piccola quantità d' umor dolce. Il quarto, rispetto a grandezza e colore, rimase

inalterato; solo la fessura era divenuta alquanto più profonda. Il quinto, sano e senza screpolature, intenerito a perfetta maturezza avea la bocca chiusa con sopravi una grossa goccia di liquido dolce. Tutta la polpa divenuta tenera, molle, dilicata, abbondava, insieme a'peduncoli rammolliti, di umor dolce. Il sapore non differiva da qualsivoglia altro fico maturato naturalmente. Nei vasi lattei esisteva l'umor latteo in tanta copia, che apparivano turgidi, pieni zeppi di granelli sferici, e di granelli più grossi ma irregolari. Non appariva se lo zucchero o parte di esso derivasse dall'umor latteo; nelle cellule della polpa non si scorgeva verun materiale particolare: ed il contenuto nei vasi lattei colla tintura jodosa diveniva rosso giallastro. È da notare ancora che l'acido solforico avea morte ma non disfatte le squame. Infine tutta la massa del frutto pareva più sugosa che in altri allo stesso grado di maturazione naturale.

Con la stessa qualità di acido, ripetuto l'esperimento su molti ricettacoli verdi, in grado di essere inoliati, del fico paradiso e di altro piede del brogiotto imperiale, l'effetto fu quasi conforme al precedente dopo due giorni. Si rinvennero ingranditi più del doppio, e la metà circa aperti, più o meno profondamente; qualcuno anche infino alla base. Il peduncolo, il perigonio, ed il carpello di ciascun fioretto interno, erano rossi, ma più nel brogiotto, la cui pelle per grande estensione, erasi colorata in violetto verdastro; la polpa, tuttavia bianca, nell'aprirsi, avea dato qua e là goccioline di latte; il che si osservava ancora lungo l'orlo delle profonde ed irregolari spaccature del fico paradiso rimasto tuttavia verde. In questi due ricettacoli aperti notabile sopratutto si era la sodezza della polpa e dei fioretti, la mancanza di umore zuccheroso, la brevità del tempo in cui la crescenza avvenne. La spaccatura ne fu l'effetto finale avvenuto nella notte precedente al dì 20, quando si procedette all'esame. Qui vedesi manifestamente un rigoglio di vegetazione di tutte le parti costitutive il ricettacolo in generale, massime delle interne, alla cui forza non ha potuto resistere la parte corticale, che però si squarciava.

Nello stesso giorno (18 agosto), si bagnò la bocca a parecchi frutti verdi, atti ad essere inoliati, del fico tintore con acido solforico più allungato, con circa quattro parti di acqua. La mattina del giorno 20, essi, quali più quali meno, si trovavano ingranditi il doppio, senza veruna spaccatura, con polpa soda, lattiginosa, fioretti rossi, nocciolette con embrioni perfetti senza umore zuccheroso in nessuna parte. Sulle squa-

me concotte , ed intorno all' orlo della bocca, ci avea qua e là grumi di aspetto zuccheroso, e ciò notavasi ancora nei ricettacoli spaccati del fico brogiotto e paradiso di sopra descritti. Questa sostanza veniva fuori allo stato liquido come prima si ungeva la bocca con l'acido, indi condensavasi in sembianza di zucchero; ma non ha sapor dolce, non sciogliesi nell'acqua, e tra le dita è piuttosto attaccaticcia. Essa probabilmente deriva dall' azione dell' acido sulla materia globulare del latice. Risulta quindi che l' acido solforico più o meno allungato devesi ritenere come eccitante della vegetazione del frutto del fico.

Questo effetto inaspettato dell'acido solforico, dell'acido cloroidrico, il fatto degli olii e delle materie grasse poste ad esperimento, le quali, alterandosi all'aria divengono facilmente acide, la inefficacia della soluzione di potassa, della trementina; tutto ciò ci ha obbligato nell'anno corrente a nuove pruove, col fine di vedere comparativamente e con maggiore precisione, l'operare di alcuni acidi, di alcune sostanze neutre e di qualche sostanza alcalina. Si è cominciato dall'acido solforico allungato in cui la quantità di acqua era determinata, 5-10-20-25-50 100-150-200-300-500 per una parte di acido. In tre varietà di fichi, brogiotto, sarnese, ed andreone, unta la bocca a venti ricettacoli coll'acido allungato in cinque parti di acqua, tutti al nono giorno si trovarono variamente maturi, cioè sei spaccati, gli altri intieri. L'azione dell'acido appariva chiaro al secondo giorno nei frutti ingranditi quasi il doppio, alcuni dei quali cominciavano già a spaccarsi.

Sopra quindici frutti l' acido con dieci parti di acqua dava quasi lo stesso risultato, però alquanto meno energico, il che ha potuto dipendere dalla poca quantità del liquido rimasto sulla bocca, per effetto della pendenza dei rami, o d'altra causa. Con venti parti di acqua, sopra sedici ne recò a maturezza perfetta tredici, due dei quali si spaccavano nel corso della maturazione ; sopra altri tre non manifestò veruna azione. Presso a poco lo stesso effetto diede l'acido con venticinque parti d'acqua, perchè sopra 16 frutti, dieci maturarono, uno dei quali spaccato, tre ingrandirono, tre rimasero come prima. Con cinque parti di acqua si trovarono a perfetta maturezza otto frutti intieri, uno spaccato, sette più o meno prossimi alla maturazione. L' acido allungato con cento parti di acqua, sopra diciotto frutti acerbi, in una settimana o poco più, ne conduceva a maturezza compiuta sei; otto divenuti più grandi vi si approssimavano, quattro rimasero nello stato primiero. Con cento cinquanta di acqua, in tre frutti del fico sarnese, e quattro del brogiotto non

produsse veruno effetto; e per contrario ne maturava tre del fico andreone, ne spaccava uno del fico papa, avviandone altri tre alla maturazione; uno rimaneva inerte; in tutto erano quindici. Fra diciannove frutti trattati coll'acido allungato in dugento parti di acqua, se ne trovarono uno maturo, tre prossimi alla maturità, i rimanenti inalterati. Con trecento di acqua se n'ebbero due maturi, quattro arrivati quasi a maturezza, nove non mostrarono verun cangiamento. Con cinquecento parti di acqua, l'acido non fece effetto sopra dodici frutti del fico sarnese e brogiotto; ma sul fico papa ne aveva condotti tre a maturità, ed un altro vi si approssimava. Ma lo stato vegetativo di questo fico andreone, rigoglioso, giovine, pieno di vita, e però sensitivo ad ogni piccolo stimolo, non è uniforme a quello degli altri due, più annosi e piuttosto stracchi. Questa seconda serie di sperimenti intorno all'azione dell'acido solforico compruova sempre più, e con maggior precisione, il suo potere eccitante in promuovere una maturazione anticipata nel fico.

L'acido fenico opera sì fattamente sul ricettacolo del fico, che dovunque si applica e si spande, in brevissimo tempo sparisce il color verde, si risecca il sottoposto tessuto divenendo bianco giallastro, indi nerastro; le squame della bocca induriscono, poscia acquistano color bruno rossastro. Tutto ciò si rende manifesto fra due o tre giorni; ma sovente, ove l'acido ha potuto rimanere per qualche tempo, già infin dal terzo giorno, sulla parte mortificata, cominciano a spuntare delle muffe, tra le quali predomina una forma gonidica, appartenente forse alla *Pleospora herbarum*, assai affine a quella dell'*Alternaria tenuis*, ma molto fragile. In questo mentre la parte del ricettacolo rimasta esente e lontana dall'azione immediata dell'acido, cresce, intenerisce, acquista il suo color naturale di maturezza; matura in somma anticipatamente, almeno dieci giorni prima che non avrebbe fatto con le sole forze naturali. Di venti frutti quattordici si trovarono maturi a perfezione, qualcuno anzi corrivo a disfarsi, gli altri ingranditi di molto e prossimi a maturezza. Come opera quest'acido fenico a noi è affatto ignoto, sì pel fatto proprio della crescenza, e sì per la maturazione della parte esente dalla sua azione immediata. Se prendi una sottile lamina del ricettacolo a cominciare dalla epidermide, e l'esponi sopra vetro all'azione dell'acido in parola, questo attacca e distrugge subito il contenuto delle cellule più interne che sono le più tenere, dilata le stesse cellule, e vi forma sopra una velatura mucosa da far parere che le avesse disfatte, ma colla lavatura si vede che sono ancora intiere. Tale effetto però è meno forte gradatamente

verso l'epidemide, la quale in tal caso diventa più rigida. Una laminetta tolta dal parenchina della faccia inferiore della foglia avente peli e nervicciuoli, sottoposta all'azione dell'acido fenico pativa le seguenti alterazioni. Il contenuto delle cellule più tenere veniva più o meno disfatto; la clorofilla però vi resisteva, ma cangiava il color verde in rosso giallastro; le stesse membrane cellulari più giovani venivano gonfiate, l'epidemide rimaneva inalterata, i peli ingrandivano alquanto senza disfarsi. I cistoliti dapprima apparivano più distinti, indi poco a poco, ma dopo molte ore, erano distutti. Non si scorse azione notabile sulla membrana dei vasi spirali e delle cellule fibrose.

L'acido formico è meno attivo del fenico; esso parimente imbrunisce e dissecca la parte su cui si spande, ma lentamente; le squame divengono rigide, nè la parte mortificata in capo a dieci giorni si trovò ammuffata. In ventiquattro ricettacoli messi alla pruova, al decimo giorno tre eran maturi, sette prossimi a maturezza, sette divenuti grandi, gli altri rimasero inalterati come si trovavano nel primo giorno in cui cominciò l'esperimento.

L'acido tartrico menava a maturezza perfetta venticinque frutti, quanti ne furono bagnati alla bocca, in quattro varietà di fichi ed in poco tempo, cioè nello spazio di una settimana; cinque tra essi si erano spaccati. L'efficacia e la prontezza dell'operare di questo acido non ammette alcun dubbio, essendosi molte volte ripetuta l'esperienza col medesimo effetto. Esso sciolto in pochissima acqua, e con questa bagnata la bocca del frutto, intenerisce prima le squame poi le dissecca; promuove ivi ed a poca distanza fin dove si spande, l'uscita di qualche gocciolina di latte, che poscia si condensa in grumetti di aspetto gommoso, tra cui spunta sovente un poco di muffa. Fra le tante sostanze promotrici la maturazione del fico, solo questo acido ci par preferibile all'olio comune per la certezza e prontezza dell'effetto.

Sull'azione dell'acido stearico non possiamo affermare cosa di certo, non essendo esso solubile nell'acqua. Sciolto nell'etere non manifestò veruna azione in quattro ricettacoli; ed in altri sedici, stemperato con acqua, promosse in certuni la maturità anticipata.

Quattro frutti unti con collodio, altrettanti col petrolio, altri quattro coll'acido benzoico, tutti al nono giorno eran maturi. Il lievito di birra sopra quattro ne condusse due a maturezza; la pepsina fece lo stesso. L'acido gallico di tre ne maturò due, l'acido acetico di quattro tre, l'ossalico di cinque quattro, l'acetato di ferro due sopra quattro.

Il solfato di ferro mostrò poca efficacia in cinque frutti cui ne fu bagnata la bocca; tre di essi in capo a dieci giorni si trovaron prossimi alla maturità, due solo ingranditi; ma in altro sperimento sopra tre ricettacoli, al quindicesimo giorno erano essi più che maturi, quasi disfatti. Ancora meno efficace fu il solfato di rame, che nello stesso spazio di tempo l' effetto si ridusse al solo ingrandimento dei pochi frutti cui fu applicato. Pel solfato di potassa si ottenne un sol frutto maturo sopra quattro; e col cloruro di calce fra sette quattro maturi.

Il cloruro di potassio fece debolissimo effetto in tre frutti, un solo dei quali si trovò ingrandito; risultato più o meno a questo conforme, su varii fichi, si ebbe dal ioduro di potassio, dalla tintura iodosa, dall'acqua di calce. L'acido azotico e l'acido idroclorico, ripetutamente adoperati, han sempre promossa la maturazione, sebbene con minor prontezza ed efficacia dell' acido solforico. Anche l' acido arsenioso in sette giorni fè maturare due frutti sopra tre; e l' ammoniaca caustica un solo sul medesimo numero. Il fiore di solfo applicato alla bocca del fico non vi si mantiene, e quindi non avrebbe tempo di manifestare la sua azione, supposto che la possedesse; ma unito alla glicerina, sostanza inerte pel fatto di cui trattiamo, di quattro frutti unti alla bocca, dopo dieci giorni, se ne trovò uno maturo e due prossimi alla maturezza. Unta la bocca col succo pancreatico a ventuno frutti, al decimo giorno un solo era maturo, otto ingranditi si approssimavano alla maturità, i rimanenti rimasero nello stato in cui si trovavano quando si mise mano all'operazione. Questo debolissimo effetto non pare si debba attribuire al puro succo pancreatico, ma piuttosto ad una piccolissima quantità di acido idroclorico che vi era mescolato, quantunque non vi entrasse che per un millesimo in circa, secondo ci assicurava l' illustre professore Schiff, da cui quel liquido ci fu dato. L' anno scorso si volle vedere se bruciando o riscaldando le squame, con introdurre un ferro rovente nella bocca, venisse promossa la maturazione. I tre frutti che patirono questa operazione rimasero inalterati. Ma la stessa esperienza ripetuta questo anno ha avuto contrario risultato.

Furono senza effetto le seguenti sostanze in quanti frutti si sperimentò la loro azione; glicerina in 22-solfato di soda in 8-sale inglese in 9-solfuro di carbonio in 8-solfo nel solfuro di carbonio in 6-nitro in 7-soluzione di tannino in 9-sale comune o cloruro di sodio in 9-carbonato di ammoniaca in 3-soluzione di potassa in 4.

Tal'è il risultato delle nuove sperienze fatte in due anni di seguito,

in agosto e nella prima metà di settembre. Il tempo migliore però, pel clima di Napoli, è dalla fine di luglio a tutto agosto, essendo in quel tempo i frutti del fico, per la maggior parte, quasi stazionarii, per dir così, in fatto di crescenza; mentre in settembre, affrettandosi essi a maturare successivamente in gran numero, il criterio allora se una maturazione sia naturale o pittosto promossa dagli agenti che hanno potere di farlo, rimane sovente turbato. Se nella varietà di questi, e nell'effetto quasi uniforme che ne conseguita si volesse cercare una certa o probabile spiegazione del modo intrinseco del loro operare, sembrerebbe necessario innanzi tutto conoscer le cose più notabili che hanno luogo nel breve periodo in cui si compie la maturazione artifiziale in riscontro con la naturale. I fatti notabili, a nostro avviso, più sensibili, son pochi e riduconsi a quattro.

1.° Nella maturazione naturale, mentre il frutto cresce ed intenerisce, non avviene alcuna alterazione rilevante, alla vista, nelle squame che ne chiudono la bocca; o che divenissero dure, o intenerissero, o cangiassero colore; esse si mantengono fresche, vegete, infino a che non comincia il disfacimento.

2.° Per contrario gli olii grassi liquidi, le materie grasse sode untuose, e gli acidi, quasi ogni cosa avente potere di accelerare la maturazione, induce dapprima una sensibile alterazione nelle squame con intenerirle, facendole divenir brune, di verdi rossastre ch'erano, per indi riseccarsi o ammarcire. Effetto che non danno le sostanze neutre impotenti nel fenomeno in quistione; come la glicerina, il cloruro di sodio, il nitrato di potassa, e le altre di sopra menzionate.

3.° L'effetto degli acidi manifestasi solo quando essi vengono applicati alla bocca del fico, essendo inerti in altra parte di quell'organo.

4.° Lo stesso fanno gli olii e le materie grasse, producono cioè una maturazione anticipata, solo quando se ne unge la bocca, essendo del tutto inerti sul corpo del frutto. E dappoichè tali sostanze si alterano più o men facilmente all'aria, siccome è noto già, diventando acide; si può ritenere, almeno in termini generali, che se non tutti, un certo numero di acidi, e quelle materie grasse che possono divenire acide, promuovono nel fico una maturazione anticipata.

Or come comincia questo atto? Con la crescenza del frutto. La quale crescenza esprime un eccitamento in tutto l'organo comunicato dalle squame impressionate dagli agenti che su di esse vi hanno potere. Le particolarità più appariscenti che l'accompagnano sono la forma, il vo-

lume, il colore, il peso che acquista il frutto nello spazio di dieci giorni: e ci sarebbe ancora da vedere se per tutte le varietà di fichi questo tempo basti. Dei cangiamenti di colore, e dei cangiamenti più sensibili nel contenuto degli organi elementari si parlò abbastanza nel lavoro pubblicato due anni addietro; e sopra talune particolarità testè accennate non ci ha niente che rilevi; la forma, per esempio, che poco si differenzia tra il frutto acerbo quando s'inolia, e divenuto che sia maturo. Non ci siamo mai accorti, in condizioni uniformi di suolo, di esposizione, di età, di stato vegetativo degli alberi, che una varietà di fico sia più o meno arrendevole a sentire i promotori non naturali della maturazione, o più con l'uno che con l'altro di essi.

Il calore, la luce, la qualità del terreno, l'umidità, il movimento d'aria influiscono sul tempo che il frutto inoliato mette a crescere ed a divenir maturo, ma in senso generale, e qual termine medio, si può fissare a dieci giorni pel mese di agosto e parte di settembre. Anche i fioroni, in fine di giugno, unti di olio alla bocca, maturano anticipatamente nel medesimo spazio di tempo. Rispetto poi al volume, essendosi detto in generale che il frutto ingrandisce del doppio, poco più poco meno, l'ingrandimento d'ordinario cominciasi ad avvertire al quarto giorno, e nel decimo sovente sorpassa la detta misura proporzionale. Non si ha che una sola osservazione spettante al peso maggiore che si accompagna col volume. Sul fico brogiotto, a dì 8 agosto, alcuni frutti pedagnuoli, verdi, acerbi, possibilmente uguali e consimili, in forma di trottola, erano alti quattro centimetri, tre nel maggiore diametro traversale; uno di essi pesava grammi 15,542. Parecchi allora furono inoliati, e si trovarono maturi a perfezione in capo a dodici dì con poca differenza di grandezza; il maggiore, divenuto quasi rotondo, misurante per lungo e per traverso sei centimetri, pesava grammi 71,750, cioè quattro volte più che allo stato acerbo, quando ricevette l'olio. Gli altri pedagnuoli compagni cui non si diede l'olio si trovarono solo cresciuti di qualche millimetro, ma tuttora verdi, sodi, acerbi, lattescenti. L'albero nel resto non avea alcun frutto maturo, tranne qualcuno in via di lenta crescenza verso la maturazione naturale. In conseguenza, l'olio e le altre sostanze promotrici tale atto, lo manifestano sensibilmente coll'aumento in volume ed in peso: e concesso che rispetto al peso, nell'esempio allegato, la corrispondenza numerica di 1 a 5 non si dovesse ritenere come costante, ci rimane però sempre una grande differenza in più allo stato di maturezza. Differenza in peso, sì nella maturazione naturale e sì nell'altra

promossa dagli agenti ora noti, proveniente, solo o in gran parte, dalla linfa che vi giunge e vi rimane; essa dilata le cellule, riempiendone la cavità, facilitando la trasformazione dell'amido in zucchero, lo sdoppiamento della clorofilla in due materie coloranti, gialla e blu, ed altro: in questo mentre ha luogo l'esalamento di molto acido carbonico in tutte le ore del giorno. Ciò apparisce chiaro paragonando al microscopio le stesse cellule dei diversi organi e tessuti del fico acerbo quando viene inoliato, e del fico maturo. In questo secondo stato esse sono almeno tre volte più ampie che non prima al tempo dell' ugnimento. A chi poi domandasse se, o la maturazione naturale, o quella promossa con qualche agente, avesse rapporto con la nascenza e l'accrescimento dell'embrione seminale, risponderemmo negativamente. Vero è che nel colmo dell'estate i frutti pedagnuoli tuttavia acerbi, verdi, pieni di latte, con dentro i fioretti rigogliosi rossastri, posseggono già l'embrione ben formato, sebbene tenero, e son disposti a sentire l'azione delle sostanze eccitanti la maturazione. Ma esse producono lo stesso effetto sui fioroni, che son sempre sterili, cioè mancanti di embrione seminale, e sui frutti cimaruoli estivi parimenti sterili.

Volendo venire a conclusione, gli sperimenti dell'anno passato rispetto al modo come promuovono la maturazione, l'olio d'ulivo in primo luogo, indi gli altri olii e le materie grasse, non che l'acido solforico, il petrolio e via dicendo, ci mettono in grado di approssimarci sempre più alla spiegazione del fenomeno, appoggiandosi sopra due fatti rilevanti. L'uno si è, che se l'olio operasse turbando da una parte la respirazione, dall'altra la normale o libera azion della luce e dell'aria sulla epidermide, e quindi l'esalamento acquoso, oppilando, per dir così, i pori corticali, il che non è ancora dimostrato con esperienze, e con penetrare nel tessuto sottoposto inducesse alterazione nel contenuto delle cellule e dei vasi lattei, siccome si era opinato; l'inefficacia dell'olio stesso su tutto il corpo del frutto, ove principalmente le dette funzioni vegetative hanno luogo, contraddice irrepugnabilmente a quel concetto. E dappoichè l'effetto si ottiene ugnendo di olio solo la bocca del fico, e tal liquido non diffondesi che a breve distanza intorno, naturalmente si ha a riconoscere nello insieme delle piccole squame di cui quella parte è fornita, un organo speciale capace sol esso di sentirne l'azione; il primo effetto della quale, siccome altrove si è detto, è l'ingrandimento dell'intiero ricettacolo. Il che non potendosi attribuire a materiale nutritivo che l'olio vi arrecasse, dobbiamo convenire ch'esso ecciti la vegetazione del frutto acerbo, tuttora stazionario, facendovi concorrere la linfa.

L' altro fatto importante sta nella facoltà di taluni acidi, se non di tutti, delle materie grasse, di certe materie resinose semiliquide o liquide, come il catrame minerale ed il petrolio, a dare lo stesso effetto che l'olio in pari condizione, quando cioè vengono a contatto con le squame che guerniscono la bocca del fico. Tali ed altri agenti sono del tutto inefficaci, in qualsivoglia altra parte, tranne l' alterazione locale del tessuto sottoposto che qualcuno di essi, per esempio l' acido solforico, azotico idroclorico, v'induce; nel qual caso invece di crescenza e di maturazione anticipata, facilmente ne seguita la caduta del frutto allo stato acerbo.

Niuno certamente vorrà sostenere che quelle sostanze porgessero, per mezzo delle squame, un qualche umor nutritivo al frutto tuttora acerbo; invece il suo ingrandirsi potrebbe parere piuttosto una conseguenza naturale del riseccamento delle medesime squame, per cui stagnerebbe nel corpo dell' organo l' umore che vi arriva continuamente dal ramo. Opinione questa non accettabile, a parer nostro, non essendovi corrispondenza tra il pochissimo umore che, senza quegli agenti, sarebbe passato alle squame, ed il molto che vi affluisce in pochi giorni mercè la loro azione. A confermare ciò torna a proposito la seguente considerazione. Le squame in parola variano più o meno in numero nei frutti dello stesso albero; nel fico tintore non ce ne ha meno di cento in quelli di mezzana grandezza. La loro superficie, in termine medio, misurando due millimetri quadrati, si ha una estensione di 200 millimetri quadrati, uguali a $^{2}/_{7}$ di pollice quadrato, ed essendo due le facce di ciascuna squama, cento di queste squame rappresenterebbero tutte insieme una superficie di $^{4}/_{7}$ di pollice quadrato, uguale alla quinta parte della intiera superficie del ricettacolo ch'era di tre pollici quadrati. Posto ciò, perchè le squame, siccome qualsivoglia altro organo, avessero potere di attirare molta linfa, bisognerebbe che fossero in crescenza, ed esalassero abbondevolmente. Due funzioni che si accompagnano ovunque ci ha crescenza in contatto coll' aria, ma che mancano, quando si inoliano le squame, già pervenute a compiuto accrescimento, e nelle quali la esalazione dev'esser nulla, o debolissima, pel sito che occupano, essendo la più parte fuori l' influenza libera della luce e dell' aria.

Per l'acido solforico ci sarebbe questa osservazione a fare, che avendo esso grande avidità per l' acqua richiamerebbe la linfa al corpo del fico in fin dal ramo. Ma tanti altri acidi, e le materie grasse fanno lo stesso senza possedere la facoltà di attirare l'acqua. Onde anche l'acido solfo-

rico, nei modi e nelle condizioni di sopra espresse, mentre altera il tessuto delle squame, mortificandole, eccita d' altra parte la vegetazione dell' intiero ricettacolo, più fortemente che qualsivoglia altra sostanza in fino ad ora tentata, promovendone l'ingrandimento e la maturazione in minor tempo. Già da molti anni è noto il potere eccitante di tale acido sulla vegetazione di alcune leguminose, segnatamente nella luzerna, sia adoperato solo, diluito in molt'acqua nella proporzione di uno a mille, sia combinato alla calce. Ma per quel che spetta al presente subbietto ne vogliamo recare un' altra pruova. In fin dall' anno 1845 trattando di caprificazione notammo, che il polline del caprifico tenuto nell' acqua di raro o non mai, in certe sperienze, dava da sè il budello pollinico, e che questo si otteneva con facilità aggiungendo all' acqua un poco di acido azotico. Nell' anno corrente si è confermata questa osservazione, e si è ottenuto parimente il budello pollinico in poche ore nell' acqua appena inagrita con acido solforico; mentre dal polline tenuto nell'acqua comune non si ottenne verun budello nello spazio di tre giorni.

E d'altra parte essendosi visto, che solo le squame nella bocca del fico sono sensitive all'azione dell'acido solforico e degli altri agenti addietro nominati, resterebbe a conoscere in che rapporti si trovi questa sensitività inerente alle squame verso organi e funzioni consimili in altre piante. Ma quì conviene prima ricordare in succinto la origine, la formazione e la struttura del frutto del fico, inteso nella scienza, in varii tempi, quando col nome di *sicono*, quando di *anfanto*, e più generalmente con quello di ricettacolo. Esso nasce nell'ascella della foglia, infin da quando questa è giovane tuttora in crescenza, e propriamente, siccome la stessa gemma a ramo, in corrispondenza di quel poco di tessuto cellulare che divide, nell' articolazione, i due meritalli, superiore ed inferiore, e si continua col tessuto midollare più esterno. Strato cellulare di color verdastro in principio, che poscia apparisce punteggiato, con entro granelli amidacei, ed in tutto conforme al tessuto costitutivo il sepimento fra i due meritalli. Or fra il libro e l'alburno, giusta di rincontro a questo sepimento, e sulla sua parte esterna, mostrasi primamente il ricettacolo in forma di piccolissima prominenza cellulare, dalla cui sommità leggiermente abbassata cominciano già, sull'orlo, a spuntare molti rilevamenti, appena discernibili, che formeranno le squame; e poco appresso nascono i fioretti nel centro della depressione. Nel medesimo tempo si organizza alla base il proprio sottilissimo tessuto vascolare, che si unisce a quello

dei due meritalli. In progresso di vegetazione il ricettacolo, facendosi grande, diventa concavo, e l'apertura, ristringendosi, rimane chiusa dalle squame. In seguito le fibrilline vascolari, con cui si accompagnano i vasi lattei, entrano nelle squame, e distribuite sotto la corteccia dello stesso ricettacolo unisconsi, mediante ramuscelli laterali, a quelle dei fioretti.

Essendo così, se volete considerare le squame come le sommità di tante foglioline, le cui basi, fuse ed incarnate insieme in un tutto omogeneo, costituirebbero il corpo del fico; questo nel risentirsi di una forte impressione fatta sulle squame, che sarebbero le estremità degli elementi organici onde risulta, promuoverebbe afflusso di linfa dal ramo cui sta attaccato.

Il polline serve essenzialmente a formar l'embrione seminale; e nondimeno l'azione mortificante che esercita sugli stimmi, su gli stili, perfino sui peli collettori, siccome si è osservato nella canape, promuove in certe piante afflusso di umore, intenerimento e la maturazione del pericarpio. I peduncoli dell' *Hovenia dulcis*, dopo la fioritura, ingrossano, divengon teneri, sugosi, dolci; il ricettacolo della fragola, per effetto della fecondazione, cresce in quella polpa tenera sugosa che diciamo generalmente frutto. Di sì fatti esempi ce ne ha molti nel regno vegetale. Ma quì non si pretende assimilare il fatto della maturazione anticipata del fico per opera degli agenti addietro nominati, a quello di una fecondazione. Questa ha per iscopo la nascenza dell'embrione, la cui presenza, mentre si forma, attirando umore dalle parti cui è connesso, sarebbe la causa del fatto della fragola, dell'*Hovenia* testè nominata e della maturazione di alcuni pericarpii. E si può ancora obbiettare che il polline, massime il suo contenuto, non ha che fare con l'olio, con l'acido solforico, col petrolio e via dicendo. Ma ancora non è nota indubbiamente la natura della fovilla nelle diverse piante, rispetto ad altre secrezioni; e consentendo nella sua grande diversità verso le dette sostanze, non è però men vero che l'effetto finale del polline sullo stimma, e quello dell'olio sulle squame del fico, con ciò che ne conseguita, presenta tale una attenenza da giustificare il concetto espresso due anni addietro con le seguenti parole. « Inchinerei piuttosto a riconoscere in quel che con-
« seguita all'innoliamento della bocca del fico un certo rapporto con
« uno degli effetti del polline sullo stimma. Tal parte venuta a contatto
« con quello, intenerisce e si muore in breve tempo; il che deve con-
« ferire, almen per poco, alla crescenza del sottoposto ovajo ».

ATTI DELLA R. ACCADEMIA
DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

NUOVE OSSERVAZIONI E SCOPERTE INTORNO AI FOSSILI DELLA CALCAREA AD ITTIOLITI DI PIETRAROJA

MEMORIA

DEL SOCIO ORDINARIO O. G. COSTA

letta nella tornata del dì 5 dicembre 1865.

Poichè poco proficua mi era riuscita la esplotazione fatta eseguire nella state di questo anno (1865) in Pietraroja, una seconda ne disposi più tardi; ma i risultamenti ottenuti mi pervennero quando l'ultimo foglio della memoria su tale argomento era già sotto il torchio. E comunque ancor questa stata fosse scarsissima, pure i pochi soggetti ricavati ben meritano di essere quì registrati. E però, dopo averne data notizia all'Accademia, nella tornata de' 5 dicembre (1), ò divisato farne il soggetto della presente, da servire di appendice alla precedente memoria. In tal guisa, senza disgiungerle dalle precedenti, dovendo tutte le specie concorrere al medesimo scopo, di constatare cioè quanto quella calcarea stratosa racchiude di avanzi organici, si avrà insiemente il complesso delle specialità, ed una maggiore estensione nel criterio che ne regola il giudizio.

Più tardi, e mentre quest'Appendice si disponeva per essere messa in torchio, mi è pervenuto un buono esemplare di Echino, proprio della roccia di sedimento primitivo, il quale conferma e rischiara quel segno di ambulacro, di cui fu fatto un cenno nella memoria già messa a stampa, pag. 9. Ora può dirsi per questo, almeno con molta probabilità, che quello Echino appartiene al genere *Pygurus;* genere che si riferisce al giurassico così come al cretaceo, ed anche al terziario.

(1) Rendic. dell'Accad. Dicembre 1865.

In ciò fare l'opportunità ancor mi si presta di ricordare alcune cose, precedentemente illustrate nella prima parte della Paleontologia del regno, ed omesse nella serie de' fossili proprî di quella calcarea.

Come pure non sarà sconvenevole, e forsi dir si potrebbe ancor doveroso, ricordare il giudizio del Pilla intorno alla calcarea di Pietraroja; riportandolo testualmente qual esso si trova inserito negli Annali Civili del regno di Napoli (1).

« La montagna ad ittioliti di Pietraroja appartiene alla formazione « calcarea del Giura, ed è analoga sotto il riguardo dei suoi fossili agli « scisti di Pappenneim. Appartengono alla medesima formazione gli « Appennini del Taburno e de' monti Tifati, e forse del monte Grande « vicino Cajazzo ».

Senza occuparmi per ora della giustatezza di questo giudizio, debbo solo avvertire, com'egli accorto non si fosse della differenza delle due qualità di calcarea di quel luogo, così bene avvertita dallo Scacchi. E d'altra parte mal fondata si trova l'analogia ch'esso vedeva tra questa calcarea ed i scisti di Pappeneim.

RETTILI

Genere LACERTA.

LACERTA BREVICAUDA, n.

Tav. II, fig. 1, 2.

Lunghezza totale del rettile, misurando dallo indizio del rostro alla estremità codale . . .	0,073
— del solo capo	0,012
— del collo	0,011
Distanza dalla estremità del rostro alla origine dei piedi anteriori	0,027
— — dei posteriori	0,054
Lunghezza della sola coda	0,020
Grossezza degli attacchi degli arti	0,003

(1) Anno 1° 1833, pag. 142. *Ricapitolazione.*

La colonna vertebrale si compone di 56 vertebre, così distribuite:

Cervicali	7
Dorsali	28
Sacre	03
Coccigee	18
Totale. . .	56

Il corpo delle vertebre è ristretto nel mezzo, dilatato agli estremi, i quali, congiunti, costituiscono un grosso cordone.

Le costole sono delicatissime.

Le apofisi trasversali delle vertebre codali, sensibilmente estese sulle prime, si vanno restringendo da mano in mano, fino a sparire presso alla sesta.

Gli arti anteriori son corti, in guisa che omero e radio insieme oltrepassano appena l'occipite; il dito più lungo della mano uguaglia la lunghezza del radio.

Gli arti posteriori, distesi, e comprese le dita, superano la lunghezza della coda, ed anche quella del dorso. Le dita sono gracili e lunghe, talchè il maggiore di essi supera alquanto la lunghezza del femore, e maggiormente quella della tibia, *Tav. c*, *fig. 2*, ingrandita.

Del capo si avvertono solo alcuni segni del suo contorno.

Osservazione. È costante il trovarsi fra questi scisti tutti i rettili nello stato scheletrico; val quanto dire che i loro cadaveri àn dovuto soggiornare tanto nell'acqua, fino a che cute e carni siansi putrefatte e disfatte.

L'ossificazione della presente *lucertola* essendo completa, in modo che lo scheletro non à sofferta veruna slogatura, nè altra alterazione, allontana il sospetto ch'esser possa un piccolo o giovine di specie più grande.

La storia paleontologica ci trasmette la notizia di 10 specie del genere *Lacerta*, tutte, meno una sola, ben constatate, e tutte dei terreni terziarî. Sarebbe questa nostra dunque la prima che si scuopre nei terreni di sedimento primitivo, se come tale si conviene di riguardare la calcarea stratosa ad ittioliti di Pietraroja.

Non bisogna però obliare che la calcarea ad ittioliti che racchiude anche i rettili è di un'epoca posteriore a quella di sedimento primitivo sulla quale riposa, e che costituisce l'ossatura del monte.

PESCI

Genere HETEROLEPIS, n.

Tav. I.

Il corpo mutilato del pesce accenna ad una figura obbesa, perciocchè l'altezza sua di poco è minore della lunghezza, alla quale sembra mancare soltanto il capo ed il peduncolo codale con la propria pinna. L'arco descritto dal profilo dorsale, e l'opposto ventrale conducono rettamente a questa conseguenza.

Sul bel mezzo del dorso sorge la propria pinna, che à figura triangolare o quasi tale; la sua altezza misura la quarta parte di quella del corpo, e si estende poco più di tanto; vi si contano 28 raggi ramificati, eccetto il primo anteriore e più lungo di tutti; a questo precedono alcuni altri raggi gradatamente minori e poco validi, ma non fulcri nel senso dell'Agassiz, nè frangie.

Alla dorsale si oppone quasi direttamente l'anale, della quale si trovano appena oscuri vestigi.

Il corpo è rivestito di squame apparentemente romboidali, *fig.* 2, per le reciproche intersezioni marginali; ma là dove alcune di esse sono intere o coi margini liberi, osservate con occhio armato d'acuta lente, si veggono di figura quasichè rotonda, con una punta ottusa sul mezzo del margine anteriore; e nella parte opposta radicale v'à un prolungamento, od unghietta, per la quale s'inserisce nella propria buccia cutanea; questa unghietta, stretta e lunga, dilatasi alquanto nella sua estremità, acquistando così la forma di spatola. La superficie è ornata di finissime strie concentriche, ed alcuni solchi, spiccando dal lato radicale a modo di raggi, le attraversano, giungendo fino al margine libero, *fig.* 3.

Questa struttura di squame, se da una parte spetta ai pesci Ganoidi, come per la solidità, l'unghietta e lo smalto; dall'altra, come per le strie concentriche ed i solchi raggianti, si riferirebbe ai pesci Ctenoidei. Un tal pesce può considerarsi nondimeno come l'anello di congiunzione o di passaggio tra l'uno e l'altro ordine; anello che non manca in natura in qualsiasi classe di esseri, e che non permette quelle recise separazioni che sogliono farsi in tutti i sistemi.

Genere HISTIURUS

Histiurus ventricosus, n.

Tav. II, fig. 3-5.

Differisce dall'*Histurus elatus* in ciò.

1° per gli aculei della carena addominale molto maggiori.

2° per le ossa innominate o pubiee costituite forsi da un fascetto di costole delicate, o da una lamina striata per lo lungo.

3° pel profilo del capo più dritto.

4° per la scissura boccale meno obliqua; le quali due ultime condizioni rendono il rostro meno ottuso.

5° finalmente per la grande convessità ed espansione della cavità addominale.

Il rimanente delle differenze è accidentale; come la pinna codale più completa; e così pure la pinna anale; mentre gl' interspinali superiori dell'anterior parte del dorso sono meno sensibili, e più disordinati.

Sommamente probabile parmi, che fosse il sesso femineo del nostro *H. Serioloides*, Paleont. P. III, pag. 64, *Tav. IX, fig. 3, aA.*

Sauropsidium laevissimum, Cost.

Tav. III, fig. 1-1'A, B, B.

La citata figura rappresenta un individuo incompleto di tale specie, nel quale vi è da notare un fatto rimarchevole.

Sulla regione gastrica trovasi un corpo rilevato *a*, *b*, *b*. In *a*, e *A* si osserva una porzione di trachea, senza equivoco, chè non saprei riferirla ad altra parte organica. Dopo tredici anelli, decrescenti alquanto in diametro, essa si arresta bruscamente, come l' è nella sua parte anteriore, sicchè sembra dimezzata in entrambe l' estremità; ma essa è da ogni parte investita da qualche cosa, che sembra membrana, o carnosità. Questa posteriormente si prolunga, s' incurva, fa alcuni ripiegamenti, e si distende sopra un altro corpo bianco, un poco convesso, ed a superficie levigata *bb*, *BB*.

Se veramente, come a me sembra, è la prima una porzione di trachea, questo corpo liscio e ritondato sarebbe un ventriglio: ed il tutto converrebbe con tali parti proprie di un Fringuello.

Sorgerebbe quindi la quistione, come mai parti organiche di uccello siansi trovate così isolate in seno delle acque, e sulla parte ventrale del pesce?

Che siano tali, quali io ò qualificato le parti esistenti sopra la lapide, non ripugna nè punto, nè poco; perciocchè la natura cartilaginea della trachea, ed i robusti muscoli carnosi del ventriglio, e più ancora la loro interna parte tendinea, àn potuto ben resistere alla forza dissolvente dell'acqua, anche salata, a mantenere fino ad un certo grado la loro convessità contro la forza comprimente della sovrapposta materia terrosa del sedimento successivo. Tutto il dippiù deve attribuirsi a semplice eventualità, che nulla oppone alla propria realità.

Del resto io non pretendo che questa mia conghiettura abbia a tenersi come assolutamente vera, quantunque nulla si opponesse a farla ricevere come tale; ma sarà sempre un fatto che porge materia di qualche discussione a chi ne fosse vago.

Trovasi ancora sulla medesima lapide la impronta delle due valvole accoppiate di un *Soleno*, piccolo forse del *Solen legumen* del mare attuale, *fig. c.*

Forse a taluno piacerebbe ravvisare in questo soleno il *Solen papyraceus*, Deshayes (*Siliqua papyracea*) del calcare grossolano di Mouchy; ma è da riflettere che, a prescindere dalle dimensioni, non avrebbe potuto lasciare così profonda impressione e tanto concava, se la conchiglia stata fosse papiracea, come la *Solemya*

Ordine **FILLOPEDI**

Genere BRANCHIPUS, Lmk.

Branchipus gigas, n.

Tav. III, fig. 2, a A.

Ritengo sotto questa generica denominazione il frammento che vado a descrivere, mancando ogni altro elemento caratteristico per fondarvi un genere distinto, come probabilmente lo sarà.

Il frammento consiste in una parte soltanto del corpo, la quale si presenta dal destro suo lato. Vi si veggono tre segmenti coi loro rispettivi piedi remiganti e gli assi filamentosi delle branchie, tutto ben distinto e completo. Innanzi a questi tre segmenti altri ne succedono (6 o 7), quale più, quale meno adombrato, e sempre crescenti nelle loro dimensioni: e nella posterior parte un altro ve ne à dimidiato, restando interrotto da un delicato strato della medesima lapide, bene espressa, e conservando per fino due delle appendici branchiali. I tre piedi remiganti completi e medî portano cinque a sei appendici branchiali filiformi, più lunghe del piede stesso. Si avverte che i due laterali ànno l'articolo o piede men lungo del medio, essendo uguali e simili tra loro, e portano 5 appendici branchiali ciascuno; mentre l'intermedio è più lungo, ed à una forma più tortuosa, e porta 6 appendici branchiali. Alterneranno essi forse così?

I tre articoli presi insieme misurano in lunghezza 16 millimetri, in guisa che, se il corpo intero dell'animale contenesse 11 anelli pedigeri, quanti se ne contano in ambe le specie note di tal genere, e della fauna vivente (*Branchipus stagnalis* e *paludosus*), sarebbe lungo 0,176.

Il *Branchipus stagnalis* non è più lungo di 22 millimetri, dei quali il solo corpo ne abbraccia meno della metà: donde risulta che la nostra specie fossile era più che 17 fiate più grande della maggiore specie vivente. Per la quale ragione ò creduto imporgli l'addiettivo *gigas*, tale essendo a fronte di quelli già noti della fauna attuale.

Ed è a questa grande sua dimensione d'attribuirsi lo aver lasciato di se una chiara impressione. Imperocchè, siccome è stato già per altri

avvertito, il non essersi trovato alcun vestigio di tali viventi nel mondo antico, logicamente si attribuisce alla loro somma mollezza. Ed in vero, quantunque la specie fossile di cui si è discorso fosse più che 17 fiate maggiore, e perciò più solida e consistente, pure non à lasciato che una debole traccia de' pochi suoi articoli, talchè sfugirebbero essi all'occhio poco esperto, e spezialmente alla vista ordinaria.

ECHINODERMI

Genere PYGURUS

Tav. IV, fig. 2.

Nella Memoria alla quale appartiene quest'Appendice, parlando della calcarea di cui è formata l'ossatura della montagna di Pietraroja, tra i fossili a sè proprî si è fatto cenno di un semplice vestigio di Echino, consistente in una porzione di ambulacro (1).

Ora si è ottenuta una intera parte superiore della capsola, un poco stiacciata ne' margini, nella quale si conservano quasi interi tutti gli ambulacri. Per i quali ambulacri, forma e disposizione loro, e per la sagoma della capsola, credo potersi almeno definire con molta probabilità il genere cui appartiene: e dico probabilità perchè, ad eccezione di tali cose, i caratteri dipendenti dalla posizione della bocca e dell' ano, e di quanto altro accompagnar suole coteste aperture, non sono punto osservabili, non esistendo anzi affatto la metà inferiore della capsola; tutta questa parte essendo occupata dalla calcarea spatica lamellosa, con impronte del *Pecten*, di cui quella roccia abbonda, come altrove è stato notato.

Rimane ancor più indeterminata la specie, poichè non si trova sgombro del tutto il perimetro della capsola, e neppur l'emisfero suo nello stato normale, per riconoscerne la convessità e l'altezza. Solo il diametro approssimativamente può dirsi uguale a 7 centimetri.

Per queste ragioni tutto non è concesso il descrivere minutamente gli ambulacri: la forma de' pori, e quella dei tubercoli non è per alcun modo riconoscibile.

(1) Mem. citata, pag. 9.

La presenza non equivoca di questo genere di Echini non basta pertanto a concorrere alla soluzione del problema, se quella calcarea spetta alla formazione giurassica o cretacea, essendochè del genere *Pygurus* si sono trovate specie nell'uno e nell'altro terreno, e perfino nel terziario.

MEANDRITIDES RETICULATA, n.

Tav. IV, fig. 1. A, B, C.

Perchè nulla non curato ne andasse di quanto quegli strati ad ittioliti ci ànno fin quì svelato, verrò descrivendo una produzione, che non saprei dire se organica od inorganica si fosse.

A prò di coloro che giudicar la volessero qual produzione accidentale d'infiltrazioni calcaree, starebbe il non trovarsi nel regno organico alcun tipo al quale si potesse, almeno con molta probabilità e per analogia, riferire. A questo concetto si oppone, che una infiltrazione così rilevata ed uniformemente costrutta, è inconcepibile che ingenerata si fosse fra due strati calcarei, ancorchè fossero molli. Perciocchè tutto quel rilievo è costituito da un solido prismatico triedro, come una piccola porzione *C.* ingrandita lo dimostra; e le sue due faccie, oltre la base, sono nettamente ed uniformemente reticolate, nel modo che si vengono effigiate ed ingrandite in *B.* La qual produzione triedra, rivolgendosi in modo intrigato, abbraccia da quando in quando un nodulo emisferico, quasi che fosse una ghiandola, sopra la quale il reticolo si attenua e si distende. Che ciò possa avvenire fra due strati calcarei messi a contatto colle loro superficie, io non posso persuadermi.

Che si fosse poi ingenerata siffatta produzione sulla supercie dello strato inferiore, prima del deposito successivo, osta la limitazione, l'uniformità del tessuto, l'intrigata circonvoluzione, ed il costante diametro, e la forma di tutto quello prolungato corpo triedro. Del resto, la natura è prodiga, le nostre conoscenze sono limitate; ed i giudizî che pronunziar possiamo, sono regolati dalle nozioni che possediamo. Rimettendo dunque la finale definizione della cosa, mi limito a darne quella conoscenza che meglio mi sappia trasmettere.

La *fig. 1. A*, rappresenta al naturale e nelle dimenzioni reali la intera massa rilevata, sopra di un piano completamente levigato, ed avente per ispeziale suo appoggio una lamina delicatissima, omogenea a quella

dello strato sul quale si trova ingenerata. Come si vede, tutto questo intrigato rilievo è formato da un delicato corpo prismatico, triangolare che va e riviene con cammino tortuosissimo ed inestrigabile, conservando sempre la sua forma prismatica, il reticolo sulle due faccie, e lo spigolo superiore, il quale, senza esser liscio, si lascia ben distinguere, per essere meno cavernoso o reticolato del rimanente: come ben si vede nella figura *C*, che ne rappresenta ingrandita una porzione; ed in cui il taglio trasversale posteriore rappresenta con precisione la figura prismatica di tutti quei rilievi.

Similmente la fig. *B*, rappresenta una porzione ingrandita di una delle due faccie, ove allo estremo posteriore vi sta il nucleo, o ghiandola quasi emisferica, più finamente ancor essa reticolata.

Se tutto ciò esser potesse opera di deposito di acqua saturata di sostanza terrosa, lo lascio al criterio di chi più ne sa.

Spiegazione delle Tavole

Tav. I. *fig. 1. Eterolepis....?* qual'esso si vede sulla lapide di naturale grandezza.

— *fig. 2.* Gruppo di squame alquanto ingrandite.

— *fig. 3.* Una di queste qual si vede al microscopio.

Tav. II. *fig. 1. Lacerta brevicauda;* grandezza naturale.

— *fig. 2.* Uno dei suoi piedi posteriori ingrandito.

— *fig. 3. Histiurus ventricosus*, *A*, *B* le due opposte faccie di naturale dimensione.

— *fig. 4.* Apparato boccale del medesimo, nella cui mandibola appariscono due denti quasi incisivi.

Tav. III. *fig. 1.* Porzione posteriore del *Sauropsidium laevissimum*, sul cui addome trovasi la parte estuberante *a*, *b*, *b*: in *a* una trachea; *b*, *b* forsi un gastreo di piccolo uccello.

Tutte coteste parti si veggono ingrandite nella *fig. 1'*, ed indicate con le medesime lettere majuscole.

— *fig. 2. Branchipus gigas*—*a* di grandezza reale, e qual si vede sopra la lapide—*A* i soli segmenti ingranditi.

Tav. III. *fig. 3.* Apparato dentario di *Pycnodus.*

La frequenza di tali denti nella calcarea stratosa di Pietraroja è straordinaria: e le diverse grandezze o disposizioni mi ànno imposto di ritenerne quanti mai ne ò potuti ottenere. Di talchè nella mia collezione paleontologica se ne trovano più che cinquanta. Tutti vengono dallo stesso luogo, e constatano ch'essi appartengono agli ossi mascellari, e che si compongono di tre file per lato, come si trovano rappresentati nella figura citata; e come altri effigiati si sono nelle tavole che accompagnano le diverse parti della nostra paleontologia.

— *fig. 4.* Armatura dentaria della lingua, o *Glossodus.*

Non meno frequenti son pure queste piastrine così coperte di denti piatti, e che io ò riconosciute per l'osso linguale; e non già come spettante al faringe, che ne sarebbe la continuazione. E ne ò poi ottenuta una del tutto isolata, qual'essa si vede nella *fig. 5 a,* la cui faccia coperta di denti è convessa, e piana od un tantino concava la faccia opposta e nuda. La *fig. 5 b* la rappresenta perciò di profilo.

— *fig. 6.* Altro simile apparato diverso per grandezza e disposizione de' denti.

— *fig. 7.* Porzione di colonna vertebrale di pesce, notevole per la figura e proporzione del corpo vertebrale, e spezialmente poi per le piccole apofisi spinose che ne adornano la parte suprema.

— *fig. 8.* Tre delle medesime vertebre ingrandite per meglio vederne la struttura.

— *fig. 9. a, A.* Altra porzione di colonna vertebrale, composta di vertebre bi-coniche, scanalate per lo lungo, e sormontate alle due estremità da una espansione crestiforme, trasversalmente striata; come si vede nella *fig. A* ingrandita.

N. B. — Si sono effigiati questi pochi frammenti scheletrici, fra i tanti moltissimi che mi sono presentati nelle diverse escavazioni eseguite in Pietraroja, non solo per la singolarità di struttura, che certo indica ge-

neri finora sconosciuti; e che si rendono perciò di qualche importanza per la scienza; ma per richiamare l'attenzione de' posteri, i quali potranno far ricca messe proseguendo ad esplotare quegli scisti. Chi sarà vago di proseguire questi studî, e di svolgere i nostri terreni ad ittioliti, troverà in Pietraroja campo vastissimo da ricercare, e materiali numerosissimi per le proprie lucubrazioni.

Pietraroja, come altrove si è detto, è per noi quello stesso ch'è Vestena nuova de' Veronesi (1). Io non ò potuto estendere come pensava gli sperimenti per insufficienza di mezzi proprî, e mancanza di ausilî da quella parte che avrebbero pur dovuto concorrere. Gli scavi che io ò potuto eseguire in più anni, ben calcolati, si possono considerare come una semplice graffiatura, e nondimeno, consultando quanto si è descritto nella *Paleontologia*, nella *Ittiologia fossile italiana*, ed in questo luogo, si troverà sufficiente ragione per convenire che moltissimo ancor rimane da discuoprirvi, e quindi animarsi a proseguire l'intrapreso lavoro.

Tav. IV. *fig. 1.* La *Meandritides reticulata* — *A* il pezzo di roccia con la Meandritide di grandezza reale — *B* il reticolo delle sue faccie ingrandito — *C* una porzione della Meandritide parimente ingrandita.

— *fig. 2.* Il *Pygurus* di grandezza reale.

---

(1) Piacemi riferire quì un progetto, ch'io non ò potuto realizzare, e che lasciava già come ricordo ai posteri. Era mio proponimento aprire lo scavo in un'aia almeno di 20 metri quadrati, e, togliendo completamente ad uno ad uno gli strati, mettere a giorno il successivo, in guisa che si potessero ottenere completi i fossili che ciascuno contiene, enumerarli e descriverli. In tal guisa, oltre lo schivare il frequente dispiacevole inconveniente di dover tagliare gl'individui che s'incontrano su i margini, si avrebbe anche la storia più precisa di ciò che in ciascuno strato è stato sepolto.

1

2.

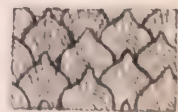
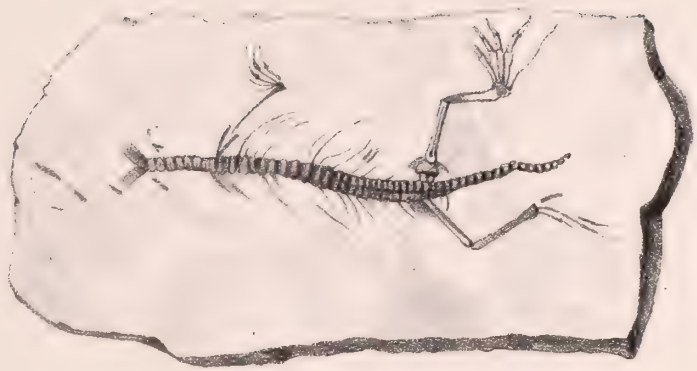
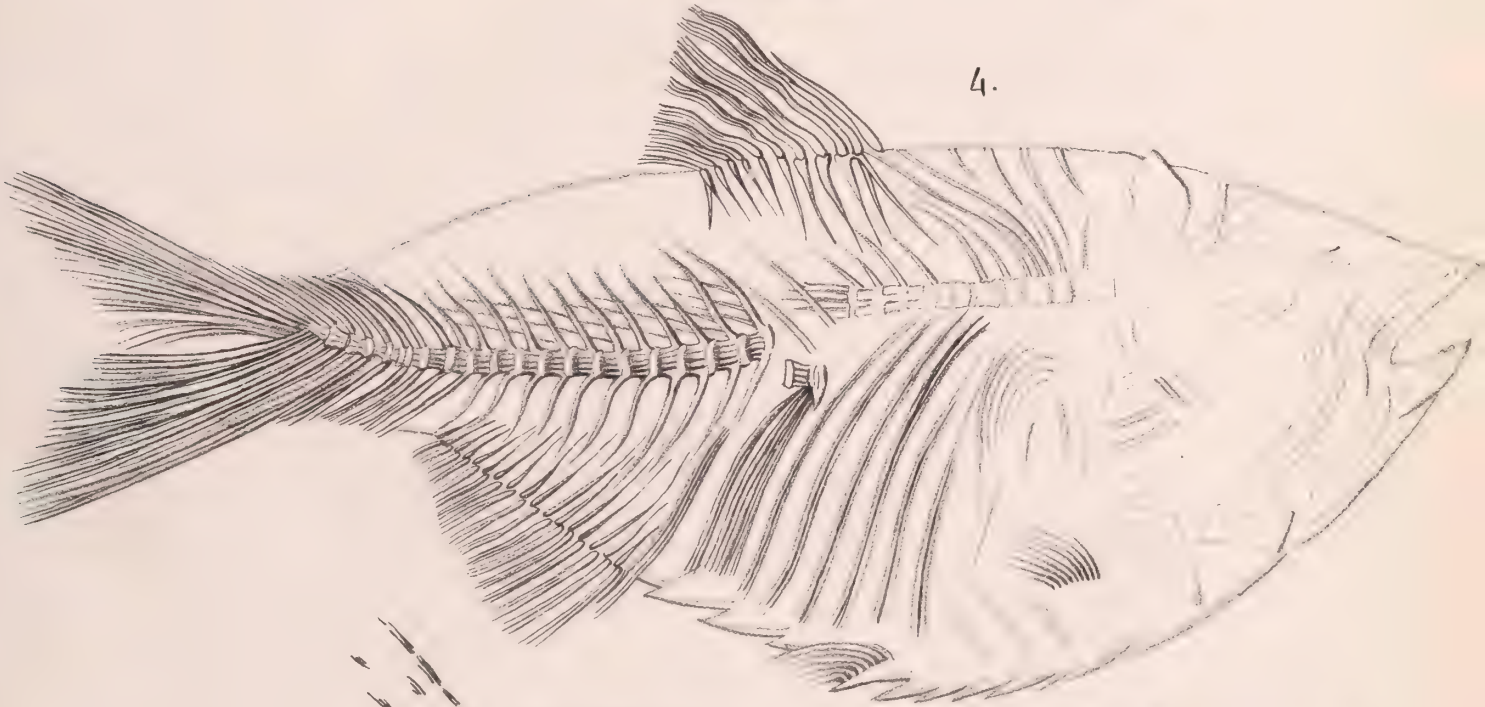
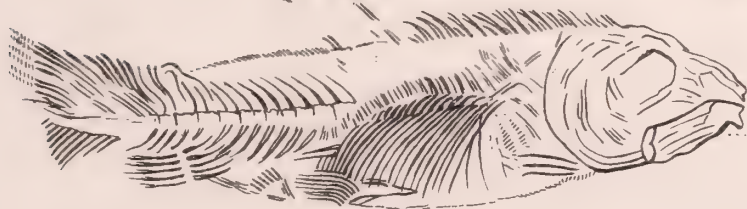
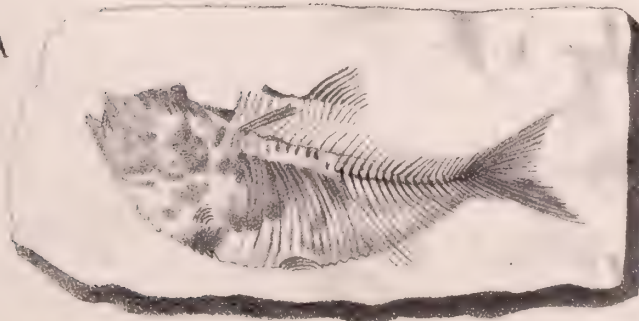
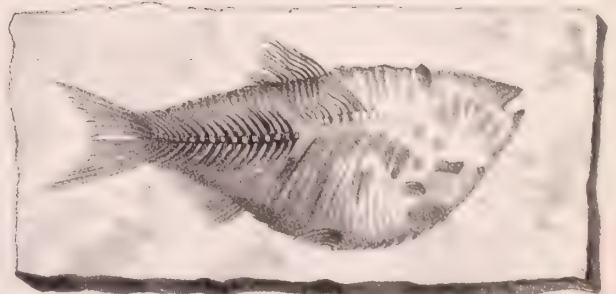
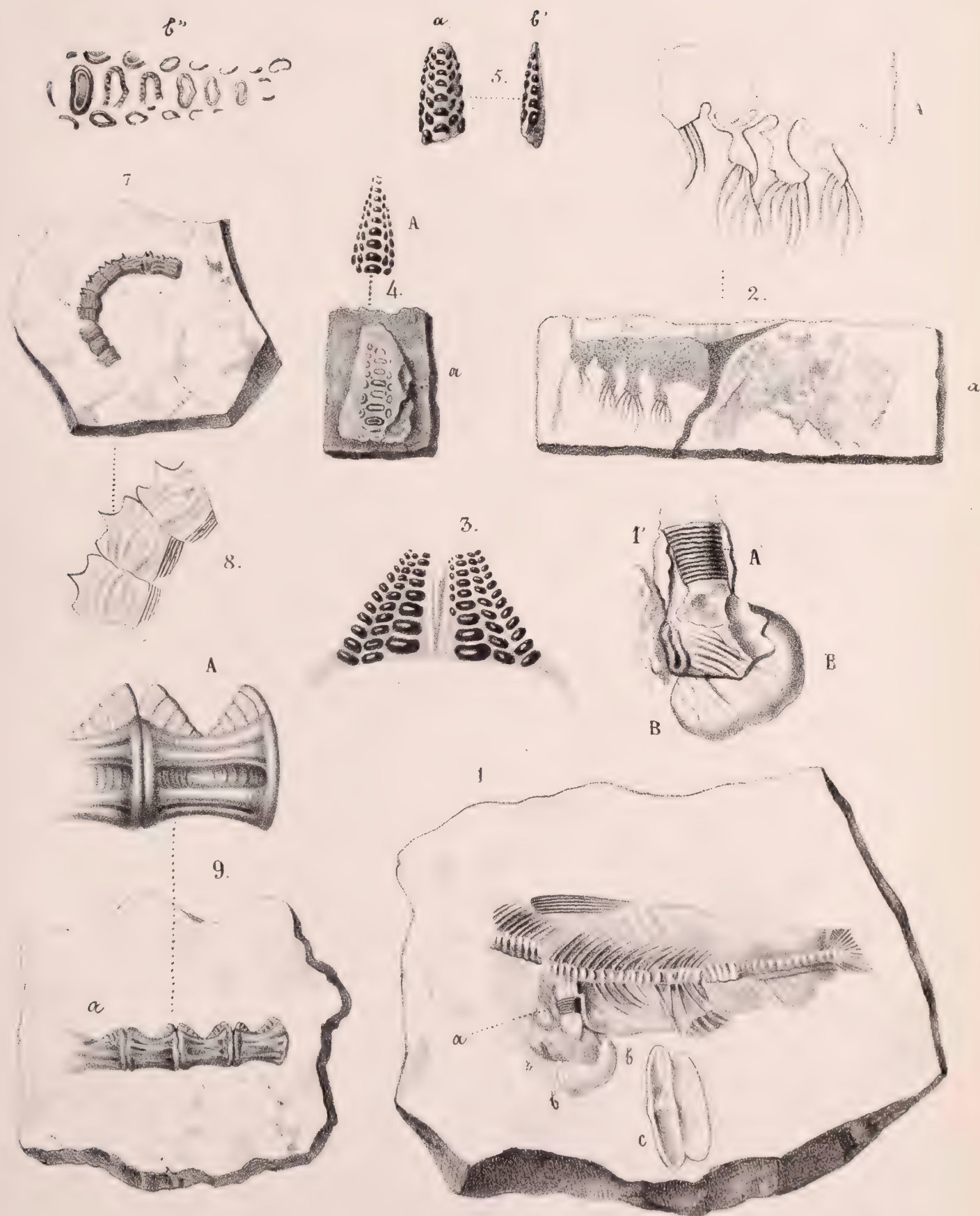
3.

S. Calyò dis.

Dolfino Lit

Tav. III.

S. Calyò dis.

Dolfino Lit

S. Calyò dis

Lit. Doisin

ATTI DELLA R. ACCADEMIA
DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SULLA PARTIZIONE DE' NUMERI

MEMORIA

DEL SOCIO ORDINARIO N. TRUDI

letta nella tornata del dì 12 dicembre 1865

Oggetto della Memoria

Tra i problemi che si rapportano alla partizione dei numeri uno dei più importanti si è quello di determinare in quante maniere un numero intero e positivo n si può comporre per mezzo di dati elementi $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, numeri anch' essi interi e positivi, ed ognun de' quali può essere ripetuto più volte. Egli è chiaro che quel numero di maniere è lo stesso che il numero delle soluzioni della equazione indeterminata:

$$\alpha t+\beta u+\ldots+\lambda z=n\ ,$$

in numeri interi e positivi, incluso il zero. Noi dinoteremo questo numero con P_n; ma se occorra di tenere in vista gli elementi della partizione, scriveremo $P_n(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$.

Si sa che il valore di P_n coincide col coefficiente di x^n nello sviluppo ascendente della funzione:

$$\frac{1}{(1-x^\alpha)(1-x^\beta)\ldots(1-x^\lambda)}\ ;$$

e quindi il problema si riduce a trovare una espressione analitica pel detto coefficiente che si presti con facilità al calcolo numerico, poichè

trattasi di una quistione, cui si richiamano importanti applicazioni. Ora è questa la quistione che formerà il soggetto delle presenti ricerche, e ne faremo conoscere due soluzioni; l'una che ci appartiene, e l'altra dovuta all'illustre Sylvester, annunciata dal medesimo senza dimostrazione nel vol. 1° del *Quartely Journal* a pag. 141, e riprodotta nel vol. 8° degli Annali di Scienze Fisiche e Matematiche del Tortolini a pag. 12. Questa bella soluzione venne elegantemente dimostrata prima dal chiarissimo Professore Brioschi, e poscia dal Professore Battaglini; ma qui vedremo risultarla da un teorema generale sullo sviluppo delle funzioni fratte razionali da noi dato in una nota che sarà pubblicata nel Rendiconto di questa Accademia. Però la soluzione del Sylvester meritava alcuni essenziali complementi, che noi ci siamo studiati di raggiungere; ed oltre a ciò era necessario di ovviare ad una difficoltà materiale, la quale distruggeva tutto il pregio della soluzione. Essa in fatti obbliga quasi ad ogni passo a cercare le funzioni intere equivalenti a date funzioni fratte di radici di equazioni algebriche; e se queste trasformazioni avessero dovuto ripetersi da metodi generali, avremmo preferito di abbandonare il pensiero della ricerca. Ma fortunatamente esiste un principio che tronca di un tratto tutta la difficoltà, ed a tal punto da potersi ottenere all'istante e senza calcolo di sorta le trasformate intere delle funzioni fratte che avremo a considerare. Questi perfezionamenti riducono la soluzione del Sylvester a quel grado maggiore di semplicità, che era lecito di sperare, e la rendono attuabile in pratica anche ne'casi più complessi.

Intanto siccome queste ed altre nostre ricerche sono fondate sopra diverse proprietà delle equazioni binomie, conosciute in parte, ma poco comuni, e nuove in parte, per comodo de' giovani studiosi ci siamo avvisati di riassumerle in apposita memoria, intitolata: *Ricerche sulle equazioni binomie*, ed alla quale bisogna richiamarsi nel presente rincontro. Tuttavolta, per non obbligare lettori più provetti di ricorrere a quella fonte, ci è sembrato opportuno di premettere una breve digressione intorno a quelle equazioni, per ricordarvi rapidamente le proprietà che hanno più immediata relazione con l'argomento attuale, tralasciandone le dimostrazioni.

ART. I.

Digressione sulle equazioni binomie

§ 1°

Alcune proprietà delle radici primitive.

I. Le radici primitive delle equazioni binomie, eccetto pel 1° e 2° grado, sono immaginarie ed in numero pari. L'equazione di 1° grado, $1-x=0$, ha primitiva l'unica sua radice $+1$; e quella di 2° grado, $1-x^2=0$, ha tale la radice -1.

II. In generale l'equazione $1-x^n=0$ ha tante radici primitive quanti sono i numeri inferiori ad n e primi con n.

Quindi se il numero n si risolva ne' suoi fattori primi, e si supponga:

$$n=n_1^{\alpha_1}n_2^{\alpha_2}\dots n_r^{\alpha_r}$$

dove n_1, $n_2,\dots,n_r$ sono numeri primi disuguali, chiamando n_0 il numero delle dette radici primitive, si avrà:

$$n_0=\frac{n}{n_1n_2\dots n_r}(n_1-1)(n_2-1)\dots(n_r-1)\;; \tag{1}$$

ma, posto:

$$\nu=\frac{n}{n_1n_2\dots n_r}=n_1^{\alpha_1-1}n_2^{\alpha_2-1}\dots n_r^{\alpha_r-1}$$

avremo più semplicemente

$$n_0=\nu(n_1-1)(n_2-1)\dots(n_r-1)\,.$$

III. Una potenza di qualsivoglia radice dell'equazione $1-x^n=0$ non cambia di valore, se al suo esponente si aggiunga o tolga un multiplo qualunque di n. Ma, oltre a ciò, se n è pari, e primitiva la radice, quell'esponente potrà accrescersi o diminuirsi di $\frac{n}{2}$, o di un multiplo di ordine dispari di $\frac{n}{2}$, purchè si cangi il segno alla nuova potenza.

Così, se s'indica con ρ una radice qualunque della detta equazione, si

avrà $\rho^m = \rho^{m+in}$, dove i figura un numero intero, positivo o negativo. Ma, se n è pari e primitiva la radice, sarà pure $\rho^m = -\rho^{m+in\pm\frac{n}{2}}$.

IV. Se ρ è una radice primitiva dell'equazione $1-x^n=0$ sussisterà la seguente rimarchevole relazione:

$$(1-\rho)(1-\rho^2)(1-\rho^3)\ldots(1-\rho^{n-1})=n\ ;$$

V. E nella stessa ipotesi si avrà quest'altra non meno osservabile relazione:

$$\frac{1}{1-\rho^\alpha}=-\frac{1}{n}\left[\rho^\alpha+2\rho^{2\alpha}+3\rho^{3\alpha}+\ldots+(n-1)\rho^{(n-1)\alpha}\right],$$

dove α dinota un numero qualunque intero e positivo, che si può sempre supporre minore di n, essendo lecito di sopprimere dagli esponenti delle potenze di ρ i multipli di n.

VI. L'ultima formola si può rendere più semplice quando n è numero pari; ma perciò bisogna distinguere due casi, secondochè α è impari o pari. Se α è impari si ha:

$$\frac{1}{1-\rho^\alpha}=\frac{1}{2}\left[1+\rho^\alpha+\rho^{2\alpha}+\rho^{32}+\ldots+\rho^{\left(\frac{n}{2}-1\right)\alpha}\right].$$

E se α è pari sarà:

$$\frac{1}{1-\rho^\alpha}=-\frac{1}{n}\left[\frac{n}{2}+\left(\frac{n}{2}+2\right)\rho^\alpha+\left(\frac{n}{2}+4\right)\rho^{2\alpha}+\ldots+\left(\frac{n}{2}+n-2\right)\rho^{\left(\frac{n}{2}-1\right)\alpha}\right].$$

Per esempio, supponendo che ρ sia radice primitiva dell'equazione $1-\rho^{10}=0$, si avrebbe

$$\frac{1}{1-\rho}=\ \ \frac{1}{2}\left(1+\rho+\rho^2+\rho^3+\rho^4\right)$$

$$\frac{1}{1-\rho^2}=-\frac{1}{10}\left(5+7\rho^2+9\rho^4+11\rho^6+13\rho^8\right)$$

etc: etc: etc:

§ 2°

Fattori irriduttibili

I. Il binomio $1-x^n$ ammette in ogni caso un divisore *commensurabile*, il quale eguagliato a zero ha per radici le sole radici primitive dell'equazione $1-x^n=0$. Questo special divisore del binomio, che suol chiamarsi *fattore irriduttibile*, perchè non è più oltre risolubile in fattori commensurabili, è dunque una funzione intera e razionale di x, avente inoltre coefficienti interi; ed il suo grado coinciderà col numero delle radici primitive dell'equazione $1-x^n=0$, vale a dire col numero n_0 definito più sopra dalla formola (1). In ciò che segue rappresenteremo il fattore irriduttibile del binomio $1-x^n$ col simbolo X_n, e lo supporremo ordinato per le potenze ascendenti di x. Se $n>2$, questo fattore X_n sarà sempre di grado pari e di forma reciproca, ed avrà per termini estremi 1 ed x^{n_0}. Per $n=1$ si ha $X_1=1-x$; e per $n=2$, sarà $X_2=1+x$.

II. Per trovare in generale l'espressione di X_n, qualunque sia n, si ha la regola seguente dovuta a Cauchy:

« Si sviluppi l'espressione di n_0 data dalla (1), e si avrà una serie di « numeri interi in numero pari, metà positivi, metà negativi. Indicando « i primi con $n, p, q, \ldots$ (e tra essi è il numero $n=\nu\, n_1 n_2 \ldots n_r$), ed i se- « condi con $-h, -i, -k, \ldots$, l'espressione di X_n sarà definita dalla « formola:

$$X_n=\frac{(1-x^n)(1-x^p)(1-x^q)\ldots}{(1-x^h)(1-x^i)(1-x^k)\ldots},$$

la quale va sempre ridotta a funzione intera con coefficienti interi.

Così si trova per esempio:

$$X_6=1-x+x^2$$

$$X_{10}=1-x+x^2-x^3+x^4$$

$$X_{14}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6$$

$$X_{15}=1-x+x^3-x^4+x^5-x^7+x^8$$

$$X_{21}=1-x+x^3-x^4+x^6-x^8+x^9-x^{11}+x^{12}$$

$$X_{22}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-x^7+x^8-x^9+x^{10}$$

$$X_{26}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-x^7+x^8-x^9+x^{10}-x^{11}+x^{12}$$

$$X_{30}=1+x-x^3-x^4-x^5+x^7+x^8$$

etc: etc: etc:

III. Ma a questa regola aggiungeremo l'importante osservazione che il fattore irriduttibile di un binomio, il cui grado n è un numero della forma $n=n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \ldots n_r^{\alpha_r}$, può dedursi immediatamente da quello del binomio di grado $n'=n_1 n_2 \ldots n_r$. Posto $\nu=\frac{n}{n'}$, l'espressione di X_n si avrà da quella di $X_{n'}$, mutandovi la x in x^ν.

Sia per esempio $n=360=2^3.3^2.5$; sarà $n'=2.3.5=30$; $\nu=12$; quindi per ottenere l'espressione di X_{360} basterà cangiare la x in x^{12} in quella di X_{30}; e si ha per tal guisa:

$$X_{360}=1+x^{12}-x^{36}-x^{48}-x^{60}+x^{84}+x^{96}.$$

Nella stessa maniera si troverebbe:

Per $n=12=2^2.3$, $X_{12}=1-x^2+x^4$

» $n=18=2.3^2$, $X_{18}=1-x^3+x^6$

» $n=20=2^2.5$, $X_{20}=1-x^2+x^4-x^6+x^8$

» $n=24=2^3.3$, $X_{24}=1-x^4+x^8$

» $n=28=2^2.7$, $X_{28}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-x^{10}+x^{12}$

» $n=36=2^2.3^2$, $X_{36}=1-x^6+x^{12}$

etc: etc: etc: etc:

IV. È utile di tener presente che, se n è numero primo, si ha immediatamente:

$$X_n=\frac{1-x^n}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}.$$

E se n è potenza di un numero primo p, si avrà:

$$X_n=\frac{1-x^n}{1-x^{\frac{n}{p}}}=1+x^{\frac{n}{p}}+x^{2\frac{n}{p}}+\ldots+x^{(p-1)\frac{n}{p}}$$

di modo che per le potenze di 2, 3, etc: si avrebbe:

$X_4=1+x^2$, $X_8=1+x^4$, etc: etc: $X_9=1+x^3+x^6$, $X_{27}=1+x^9+x^{18}$, etc: etc:

V. Il binomio $1-x^n$ può essere trasformato nel prodotto dei fattori irriduttibili de' binomii i di cui gradi sono tutt'i divisori del numero n,

compresa tra i divisori l'unità e lo stesso numero n. Vale a dire, indicando i divisori di n con m, m', m'',...., si avrà:

$$1-x^n=X_m X_{m'} X_{m''} \dots ;$$

o più concisamente:

$$1-x^n=\Pi . X_m ,$$

intendendo esteso il segno di prodotto Π a tutt'i divisori m del numero n. Per esempio, siccome i divisori di 12 sono: 1, 2, 3, 4, 6, 12, sarà:

$$1-x^{12}=X_1 X_2 X_3 X_4 X_6 X_{12} ;$$

ossia:

$$1-x^{12}=(1-x)(1+x)(1+x+x^2)(1-x^2)(1-x+x^2)(1-x^2-x^4) .$$

VI. Un prodotto di più binomii è suscettibile di analoga trasfomazione. Sia

$$f(x)=(1-x^a)(1-x^b)\dots(1-x^l) ,$$

applicando il teorema precedente a ciascun binomio, la funzione $f(x)$ verrà risoluta in un certo numero di fattori irriduttibili, tra cui possono esservene degli eguali. Dinotiamo con m, m', m'',... tutt'i divisori tra loro disuguali degli esponenti $a, b, \dots, l$, e supponiamo che m divida μ esponenti; che m' ne divida μ'; che m'' ne divida μ''; etc. etc. È chiaro che in tal modo la funzione $f(x)$ si trasforma in

$$f(x)=X_m^{\mu} X_{m'}^{\mu'} X_{m''}^{\mu''} \dots$$

ovvero sotto forma compendiata:

$$f(x)=\Pi . X_m^{\mu} ,$$

purchè s'intenda il prodotto di tutte le espressioni somiglianti ad X_m^{μ}, le quali si ottengono prendendo per m tutt'i divisori disuguali degli esponenti $a, b, \dots, l$; mentre il valore di μ corrispondente ad ogni valore di m, sarà eguale al numero degli esponenti divisibili per questo valore di m. Supposto per esempio:

$$f(x)=(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^8)(1-x^9) ,$$

i divisori disuguali de'cinque esponenti saranno 1, 2, 3, 4, 8, 9; ma il primo, 1, li divide tutti; il secondo, 2, ne divide tre; il terzo, 3, ne di-

vide due; il quarto, 4, ne divide anche due; e ciascuno de' rimanenti 8 e 9 divide un solo esponente; dunque si ottiene:

$$f(x)=X_1^5 X_2^3 X_3^2 X_4^2 X_8 X_9 \ ;$$

vale a dire

$$f(x)=(1-x)^5(1+x)^3(1+x+x^2)^2(1+x^2)^2(1+x^4)(1+x^3+x^6) \ .$$

È importante ad osservarsi che i fattori di $f(x)$, compresi nel prodotto $\Pi.X_m^{\mu}$, sono necessariamente primi tra loro.

§ 3°

Somme delle potenze simili delle radici primitive

Indicheremo con S_p la somma delle potenze di grado p delle radici primitive dell'equazione binomia $1-x^n=0$; e qui ci proponiamo di esporre le regole per calcolare i valori di questa funzione, la quale è dotata di rimarchevoli proprietà.

I. Non cambia il valore di S_p, mutando il segno all'indice p; talchè si ha in ogni caso $S_p=S_{-p}$. Nè cambia, se l'indice si accresca o diminuisca di un multiplo qualunque di n; e però, dinotato con i un numero intero, positivo o negativo, si avrà sempre $S_p=S_{p+in}$. E, se n è pari, cambierà di segno, ma non di valore, aggiugnendo o togliendo all'indice il numero $\frac{n}{2}$, di guisa che sarà $S=-S_{p\pm\frac{n}{2}}$.

II. La somma S_p è una funzione periodica, ed il periodo è misurato da n.

Segue da questa proprietà che basta conoscere il periodo $S_0, S_1, S_2, .., S_{n-1}$ perchè la funzione rimanga determinata in tutto il suo corso; ma la formazione di questo periodo può essere agevolata dalle due seguenti osservazioni: 1°; se n è pari, le due metà del periodo saranno costituite di termini ordinatamente uguali e di segni contrarii; ma oltre a ciò, se dalla prima metà si escluda il primo termine S_0, nella serie de' termini restanti $S_1, S_2, \ldots, S_{\frac{n}{2}-1}$ accade che due termini qualunque equidistanti dagli estremi saranno tra loro uguali e di segni contrarii; 2°, se n è dispari, fatta astrazione dal primo termine del periodo, S_0, si ha la serie $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$, in cui due termini qualunque equidistanti dagli estremi sono uguali tra loro.

III. Supposto $n=n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \ldots n_r^{\alpha_r}=\nu n_1 n_2 n_r$, i valori distinti e diversi da *zero* che prende la funzione S_p saranno in numero di 2^r.

IV. Se n è pari, i 2^r valori distinti della funzione S_p saranno uguali a due a due, e di segni contrarii.

V. Se p è nullo, o multiplo di n, si ha sempre $S_p = n_0$, indicando n_0 il numero delle radici primitive dell'equazione $1 - x^n = 0$.

VI. Se n è pari, si ha $S_{\frac{n}{2}} = -n_0$.

VII. Se n è numero primo la funzione S_p non ha che due valori $n-1$ ed 1; vale a dire:

Se p è divisibile per n , $S_p = n - 1$
Ed in qualunque altro caso , $S_p = -1$.

E se n è potenza di un numero primo n_1, anche due saranno i valori diversi da zero che può prendere quella funzione; cioè:

Se p è divisibile per n , $S_p = n - \frac{n}{n_1}$

Se p è divisibile per $\frac{n}{n_1}$, ma non per n , $S_p = -\frac{n}{n_1}$

Ed in qualunque altro caso , $S_p = 0$.

VIII. Quando i fattori primi di n sono tra loro disuguali, vale a dire quando $n = n_1 n_2 \ldots n_r$, il valore di S_p si determina con la regola seguente:

« Si cerchi il massimo comune divisore di p ed n, che dinoteremo con « $M(p, n)$, e si risolva in fattori primi, i quali non possono essere che « alcuni de' numeri $n_1, n_2, \ldots, n_r$. Ammettendo che questi fattori siano « in numero di λ, e supponendo:

$$M(p, n) = n_a n_b \ldots n_l ,$$

« il valore di S_p sarà definito dalla formola:

$$S_p = (-1)^{r-\lambda} (n_a - 1)(n_b - 1) \ldots (n_l - 1) .$$

Sia per esempio da trovarsi il valore di S_{84} rispetto all' equazione $1 - x^{70} = 0$. Abbiamo in questo caso $p = 84 = 2^2.3.7$; $n = 70 = 2.5.7$; quindi $M(p, n) = M(84, 70) = 2.7$; $\lambda = 2$. Ma si ha $r = 3$; dunque risulta $S_{84} = (-1)^{3-2}(2-1)(7-1) = -6$.

Se p è primo ad n, si ha $M(p, n) = 1$, $\lambda = 0$; e la formola si riduce ad $S_p = (-1)^r$.

Così nel caso che si considera il valore di S_p è sempre diverso da zero.

Ora, essendo $n=n_1 n_2 \dots n_r$, i valori possibili di $M(p,n)$ saranno o 1, o qualcuno de' numeri $n_1, n_2, \dots, n_r$, o qualcuno de' loro prodotti a due a due, a tre a tre, etc: etc: ed è chiaro che, in tutto, essi sono in numero di 2^r. Ma ciascuno conduce ad un valore diverso per S_p; dunque anche in numero di 2^r saranno i valori distinti di questa funzione, com'è già detto nel n° III. Supposto per esempio che si tratti dell'equazione $1-x^6=0$, per cui $n=6=2.3$, i valori possibili di $M(p,6)$ saranno $2^2=4$, cioè 1, 2, 3, 2.3; e perciò:

Se $M(p,n)=1$	sarà $S_p=\ \ 1$
» $M(p,n)=2$	» $S_p=-1$
» $M(p,n)=3$	» $S_p=-2$
» $M(p,n)=2.3$	» $S_p=\ \ 2$.

Trovati questi valori si può subito formare il periodo il quale risulta come segue:

$S_0=\ \ 2$	$S_3=-2$
$S_1=\ \ 1$	$S_4=-1$
$S_2=-1$	$S_5=\ \ 1$.

E con la stessa facilità si formerebbero questi altri periodi:

Per $1-x^{10}=0$		Per $1-x^{14}=0$		Per $1-x^{15}=0$	
$S_0=\ \ 4$	$S_5=-4$	$S_0=\ \ 6$	$S_7=-6$	$S_0=\ \ 8$	
$S_1=\ \ 1$	$S_6=-1$	$S_1=\ \ 1$	$S_8=-1$	$S_1=\ \ 1$	$S_8=\ \ 1$
$S_2=-1$	$S_7=\ \ 1$	$S_2=-1$	$S_9=\ \ 1$	$S_2=\ \ 1$	$S_9=-2$
$S_3=\ \ 1$	$S_8=-1$	$S_3=\ \ 1$	$S_{10}=-1$	$S_3=-2$	$S_{10}=-4$
$S_4=-1$	$S_9=\ \ 1$	$S_4=-1$	$S_{11}=\ \ 1$	$S_4=\ \ 1$	$S_{11}=\ \ 1$
		$S_5=\ \ 1$	$S_{12}=-1$	$S_5=-4$	$S_{12}=-2$
		$S_6=-1$	$S_{13}=\ \ 1$	$S_6=-2$	$S_{13}=\ \ 1$
				$S_7=\ \ 1$	$S_{14}=\ \ 1$.

IX. Quando tra i fattori primi di n ve ne sono degli eguali, vale a dire quando $n=\nu\, n_1 n_2 \dots n_r$, dove ν è diverso da 1, e si ha in generale:

$$\nu=n_1^{\alpha_1-1}\, n_2^{\alpha_2-1} \dots n_r^{\alpha_r-1}$$

la ricerca del valore di S_p si riduce immediatamente al caso precedente.

Posto $n'=n_1 n_2 \dots n_r$, dinoteremo con S'_p la somma delle potenze di grado p delle radici primitive dell'equazione $1-x^{n'}$; ed allora il valore di S_p si determina come segue:

Si divida il numero p per ν; se là divisione non si fa esattamente sarà $S_p=0$; ma se la divisione è esatta, e sia q il quoziente, con la regola precedente si cercherà il valore di S'_q, e si avrà $S_p=S_{\nu q}=\nu S'_q$.

Supponiamo per esempio che si tratti di trovare i valori di S_p relativi all'equazione $1-x^{18}=0$, per cui $n=18=2.3^2$; $n'=2.3$; $\nu=2.3$. Dunque, se p non è divisibile per 3, sarà $S_p=0$; ma, se p è divisibile per 3, posto $p=3q$, si cercherà il valore di S'_q relativo all'equazione

$$1-x^{n'}=1-x^{2.3}=0\,; \quad \text{e si avrà} \quad S_p=S_{3q}=3S'_q\,.$$

Ora i valori possibili di $M(q,n')=M(q,2.3)$ sono $1, 2, 3, 2.3$; e perciò:

se	$M(q,6)=1$	, 2	, 3	, 2.3,
sarà	$S'_q=1$	, -1	, -2	, 2 ;
e quindi	$S_p=3$	, -3	, -6	, 6 .

Sia, per un caso particolare,

$p=60=3.20$; sarà $q=20$; $M(q,6)=M(20,6)=2$; e quindi $S_{60}=-3$.

Risulta da quanto precede che nel periodo $S_0, S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$ sono nulli tutt'i termini i di cui indici non sono divisibili per ν; e saranno poi diversi da zero tutt'i termini compresi nella serie $S_0, S_\nu, S_{2\nu}, S_{3\nu}, \dots$; di modo che in luogo di quel periodo si può considerare il periodo più ristretto, di n' termini $S_0, S_\nu, S_{2\nu}, \dots, S_{(n'-1)\nu}$; il quale si forma subito dal periodo $S'_0, S'_1, S'_2, \dots, S'_{n'-1}$, moltiplicandone i termini per ν. Così dal periodo relativo all'equazione $1-x^6=0$ si passa immediatamente a quello relativo ad ogni altra equazione il di cui grado è un numero della forma $2^\alpha.3^\beta$, moltiplicandone i termini per $2^{\alpha-1}.3^{\beta-1}$. Nella stessa maniera dal periodo che si rapporta all'equazione $1-x^{10}=1-x^{2.5}=0$ si passerebbe a quello per ogni altra equazione il cui grado è della forma $2^\alpha.5^\beta$; etc: etc:

§ 4°

La risoluzione del problema che ci siamo proposti obbliga quasi ad ogni passo a cercare le funzioni intere equivalenti a date funzioni fratte razionali di radici primitive di equazioni binomie; ma ognuna di esse

*

avrà per denominatore un prodotto di binomii: condizione questa interessante, perchè consente la trasformazione indipendentemente da metodi generali, i quali a causa della complicazione de' calcoli diverrebbero ben presto impraticabili. Ora queste trasformate possono ottenersi all'istante senza calcolo di sorta, col solo aiuto del teorema del n° IV, § 1°.

I. Dinotata con ρ una radice primitiva di $1-x^n=0$, cercheremo la trasformata intera di $\frac{\varphi(\rho)}{\psi(\rho)}$, dove $\varphi(\rho)$ e $\psi(\rho)$ rappresentano funzioni intere, la prima qualunque, ma l'altra della forma:

$$\psi(\rho)=(1-\rho^\alpha)^a(1-\rho^\beta)^b\ldots(1-\rho^\lambda)^l,$$

gli esponenti interni ed esterni essendo interi e positivi. Osserviamo che per avere la trasformata intera di $\frac{\varphi(\rho)}{\psi(\rho)}$ basterà trovare quella di $\frac{1}{\psi(\rho)}$, e moltiplicarla per $\varphi(\rho)$; di modo che la quistione si riduce a trovare la funzione intera equivalente alla frazione:

$$\frac{1}{\psi(\rho)}=\frac{1}{(1-\rho^\alpha)^a(1-\rho^\beta)^b\ldots(1-\rho^\lambda)^l}$$

nella quale, inoltre, gli esponenti $\alpha,\beta,\ldots,\lambda$ possono tutti ritenersi minori di n, essendo sempre lecito di sopprimerne i multipli di n.

Ciò premesso, se questi esponenti $\alpha,\beta,\ldots,\lambda$ fossero i numeri consecutivi $1, 2,\ldots,n-1$, e di più eguali tra loro gli esponenti $a, b,\ldots, l$, si avrebbe immediatamente:

$$\frac{1}{\psi(\rho)}=\frac{1}{(1-\rho)^a(1-\rho^2)^a\ldots(1-\rho^{n-1})^a}=\frac{1}{n^\alpha};$$

e la trasformata, in tal caso, sarebbe indipendente da ρ. Ma il caso non è diverso se mancano quelle condizioni, essendo permesso d'introdurre ne' due termini della frazione, come fattori comuni, tutti quei binomii che occorrono perchè nel denominatore divenga completa la serie di binomii $1-\rho, 1-\rho^2,\ldots,1-\rho^{n-1}$, ed uguali i loro esponenti. Così il denominatore si converte in una potenza di n, e la trasformazione senza più è compiuta.

II. Secondo questo procedimento la trasformata intera si ha nella forma di un prodotto di binomii, che può svilupparsi in un polinomio, riducibile subito a grado inferiore ad n, col sopprimere dagli esponenti di ρ

i multipli di n; e, se n è pari, si potrà anche ridurlo a grado inferiore ad $\frac{n}{2}$, diminuendo di questo numero i detti esponenti, salvo il cangiamento di segno ad ogni potenza cui tocca siffatta riduzione. Ma il grado della trasformata è ancora suscettibile di altro abbassamento provveniente da ciò che ρ, radice primitiva di $1-x^n=0$, deve annullare il suo fattore irriduttibile X_n; quindi, scrivendo $X_n(\rho)$ per indicare ciò che diviene questo fattore col porvi ρ in luogo di x, si avrà l'equazione $X_n(\rho)=0$, la quale permette di ridurre la trasformata a grado inferiore a quello di $X_n(\rho)$. In generale, per operare quest'ultima riduzione si potrà dividere la trasformata istessa per $X_n(\rho)$; ed il residuo esprimerà la funzione intera equivalente alla data frazione $\frac{1}{\psi(\rho)}$, ridotta a grado inferiore ad n_0, ritenuto, come per lo innanzi, che n_0 indichi il numero delle radici primitive di $1-x^n=0$, ed in conseguenza anche il grado di $X_n(\rho)$.

III. La funzione intera equivalente alla semplice frazione $\frac{1}{1-\rho^\alpha}$, può ripetersi assai più opportunamente dal teorema del n° V, del § 1°, il quale dà immediatamente:

$$\frac{1}{1-\rho^\alpha}=-\frac{1}{n}\left[\rho^\alpha+2\rho^{2\alpha}+3\rho^{3\alpha}+\ldots+(n-1)\rho^{(n-1)\alpha}\right] ;$$

ed in tal guisa si ha il vantaggio di avere la trasformata nella forma di un polinomio, sul quale, ove piaccia, potranno operarsi le altre riduzioni descritte nel numero precedente.

ESEMPII

1°
$$\frac{1}{\psi(\rho)}=\frac{1}{(1-\rho)(1-\rho^3)(1-\rho^5)(1-\rho^6)} \quad , \quad 1-\rho^7=0 .$$

Introducendo ne' due termini della frazione i fattori $1-\rho^2$ ed $1-\rho^4$, il denominatore della nuova frazione diverrà eguale a 7; e quindi risulta:

$$\frac{1}{\psi(\rho)}=\frac{1}{7}(1-\rho^2)(1-\rho^4)=\frac{1}{7}(1-\rho^2-\rho^4+\rho^6) .$$

Questa trasformata si può ridurre a grado inferiore mediante l'equazione

$X_7(\rho)=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6=0$; e perciò basta toglierne la quantità nulla $\frac{1}{7}X_7(\rho)$; con che si ottiene:

$$\frac{1}{\psi(\rho)}=-\frac{1}{7}(\rho+2\rho^2+\rho^3+2\rho^4+\rho^5)\,.$$

2° $$\frac{1}{\psi(\rho)}=\frac{1}{(1-\rho^2)(1-\rho^4)(1-\rho^6)(1-\rho^8)(1-\rho^{11})(1-\rho^{13})(1-\rho^{17})(1-\rho^{18})}\,,\quad 1-\rho^{10}=0\,.$$

Diminuendo di 10 gli esponenti più grandi, si ha dapprima:

$$\frac{1}{\psi(\rho)}=\frac{1}{(1-\rho)(1-\rho^2)(1-\rho^4)(1-\rho^5)(1-\rho^6)(1-\rho^7)(1-\rho^8)(1-\rho^9)}\,;$$

e quindi, per la introduzione del fattore $1-\rho^3$, verrà:

$$\frac{1}{\psi(\rho)}=\frac{1}{10}(1-\rho^3)\,;$$

nè qui evvi a praticare altra riduzione perchè $X_{10}(\rho)=1-\rho^2+\rho^2-\rho^3+\rho^4$; ed il grado della trasformata è già minore di 4.

3° $$\frac{1}{\psi(\rho)}=\frac{1}{(1-\rho^2)(1-\rho^4)(1-\rho^6)(1-\rho^7)(1-\rho^8)(1-\rho^{12})(1-\rho^{13})}\,,\quad 1-\rho^5=0\,.$$

Cominciando dal sopprimere negli esponenti di ρ i multipli di 5, si ha:

$$\frac{1}{\psi(\rho)}=\frac{1}{(1-\rho)(1-\rho^2)^3(1-\rho^3)^2(1-\rho^4)}=\frac{1}{5}\frac{1}{(1-\rho^2)^2(1-\rho^3)}\,.$$

Introducendo ora i fattori $1-\rho$ ed $1-\rho^4$, si ottiene

$$\frac{1}{\psi(\rho)}=\frac{1}{5^2}\frac{(1-\rho)(1-\rho^4)}{1-\rho^2}\,;$$

ed a questo punto osserveremo che può evitarsi la introduzione di novelli fattori, perchè il numeratore è divisibile pel denominatore; sicchè risulta:

$$\frac{1}{\psi(\rho)}=\frac{1}{5^2}(1-\rho)(1+\rho^2)=\frac{1}{5^2}(1-\rho+\rho^2-\rho^3)\,,$$

nè vi ha più luogo ad ulteriori riduzioni.

4° Per ultimo esempio cercheremo le trasformate intere delle due seguenti funzioni fratte:

$$f(\rho)=\frac{\rho}{1-\rho}+\frac{4\rho^2}{1-\rho^2}+\frac{8\rho^3}{1-\rho^3}+\frac{4\rho^4}{1-\rho^4},$$

$$f_1(\rho)=\frac{\rho}{(1-\rho)^2}+\frac{49\rho^2}{(1-\rho^2)^2}+\frac{64\rho^3}{(1-\rho^3)^2}+\frac{16\rho^4}{(1-\rho^4)^2},$$

che più tardi incontreremo in una delle applicazioni, supponendo che ρ sia radice primitiva di $1-\rho^5=0$. Pel n° III si ha dapprima:

$$\frac{1}{1-\rho}=-\frac{1}{5}(\rho+2\rho^2+3\rho^3+4\rho^4)$$
$$\frac{1}{1-\rho^2}=-\frac{1}{5}(\rho^2+2\rho^4+3\rho^6+4\rho^8)$$
$$\frac{1}{1-\rho^3}=-\frac{1}{5}(\rho^3+2\rho^6+3\rho^9+4\rho^{12})$$
$$\frac{1}{1-\rho^4}=-\frac{1}{5}(\rho^4+2\rho^8+3\rho^{12}+4\rho^{16}).$$

Riducendo ora gli esponenti con toglierne i multipli di 5, elevando inoltre a quadrato, e continuando a ridurre gli esponenti, si ottiene:

$$\frac{1}{1-\rho}=-\frac{1}{5}(\rho+2\rho^2+3\rho^3+\rho^4),\quad \frac{1}{(1-\rho)^2}=\frac{1}{5}(4+5\rho+5\rho^2+4\rho^3+2\rho^4)$$
$$\frac{1}{1-\rho^2}=-\frac{1}{5}(4\rho+3\rho^2+2\rho^3+\rho^4),\quad \frac{1}{(1-\rho^2)^2}=\frac{1}{5}(4+2\rho+4\rho^2+5\rho^3+5\rho^4)$$
$$\frac{1}{1-\rho^3}=-\frac{1}{5}(3\rho+\rho^2+4\rho^3+2\rho^4),\quad \frac{1}{(1-\rho^3)^2}=\frac{1}{5}(4+4\rho+5\rho^2+2\rho^3+5\rho^4)$$
$$\frac{1}{1-\rho^4}=-\frac{1}{5}(2\rho+4\rho^2+\rho^3+3\rho^4),\quad \frac{1}{(1-\rho^4)^2}-\frac{1}{5}(4+5\rho+2\rho^2+5\rho^3+4\rho^4);$$

e quindi, sostituendo e riducendo sempre gli esponenti, verrà:

$$f(\rho)=-\frac{1}{5}(80+34\rho+33\rho^2+27\rho^3+26\rho^4);$$
$$f_1(\rho)=\ \frac{1}{5}(260+633\rho+537\rho^2+537\rho^3+633\rho^4).$$

Ma tenendo conto della relazione $1+\rho+\rho^2+\rho^3+\rho^4=0$, si avrà infine:

$$f(\rho)=-\frac{1}{5}(54+8\rho+7\rho^2+\rho^3),\quad f_1(\rho)=-\frac{1}{5}(373+96\rho^2+96\rho^3).$$

ART. II.

Risoluzione del problema

1° La risoluzione della quistione proposta si può comprendere nel seguente teorema:

Rappresenti P_n il numero delle maniere in cui un dato numero n, intero e positivo, si può comporre per mezzo di dati elementi $\alpha, \beta, \ldots \lambda$, numeri anch'essi interi e positivi. Il valore di P_n potrà riguardarsi come formato da tante parti distinte quanti sono i divisori disuguali de' dati elementi, includendo tra i divisori l'unità e ciascuno elemento; ed ogni divisore darà origine ad una di quelle parti o *componenti* di P_n. Posto ciò, se si rappresenta con W_m la componente dovuta ad un divisore qualunque m de' dati elementi, con ρ una radice primitiva dell' equazione $1-x^m=0$, e con $F(\rho)$ il coefficiente di $\frac{1}{t}$ nello sviluppo in potenze ascendenfi di t dell'una o dell'altra funzione:

$$(1) \qquad \frac{\rho^{-n} e^{nt}}{(1-\rho^\alpha e^{-\alpha t})(1-\rho^\beta e^{-\beta t})\ldots(1-\rho^\lambda e^{-\lambda t})},$$

$$(2) \qquad \frac{-(\rho+t)^{-(n-1)}}{(1-(\rho+t)^\alpha)(1-(\rho+t)^\beta)\ldots(1-(\rho+t)^\lambda)};$$

il valore di W_m sarà definito dalla formola:

$$W_m = \Sigma F(\rho),$$

estendendo il Σ alle radici primitive dell'equazione $1-x^m=0$; e sarà poi

$$P_n = \Sigma W_m,$$

dove il Σ si rapporta a tutti i divisori m, tra loro disuguali, degli elementi dati $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$.

Sotto quest'unico enunciato abbiamo compreso due soluzioni ben diverse, dipendenti l'una da una funzione trascendente, l'altra da una fun-

zione algebrica. Di queste due soluzioni la prima è, nella sostanza, quella del Sylvester, quantunque esposta sotto una forma alquanto diversa (*).

DIMOSTRAZIONE

E stato già osservato nella introduzione che il valore di P_n coincide col coefficiente di x^n nello sviluppo in potenze ascendente di x della funzione:

$$\frac{1}{(1-x^\alpha)(1-x^\beta)\ldots(1-x^\lambda)}\,; \tag{3}$$

ma ora supporremo che P_n rappresenti, in generale, il coefficiente di x^n nello sviluppo di qualunque frazione razionale $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, dove con $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ intendiamo funzioni intere, ritenendo il grado della prima inferiore a quello della seconda. Si sa che l'espressione di P_n può riguardarsi come formata da tante parti diverse quante sono le radici distinte dell'equazione $\psi(x)=0$; e però chiamando ρ una di queste radici, t un'altra variabile, ed $F(\rho)$ il coefficiente di $\frac{1}{t}$ nello sviluppo ascendente dell'una o dell'altra funzione:

$$\frac{\varphi(\rho e^{-t})}{\psi(\rho e^{-t})}\rho^{-n}e^{nt}\quad,\qquad -\frac{\varphi(\rho+t)}{\psi(\rho+t)}(\rho+t)^{-n-1}$$

segue da teoremi da noi dimostrati in due memorie *sullo sviluppo in serie delle funzioni fratte razionali* che la parte di P_n dovuta alla radice ρ è per lo appunto uguale ad $F(\rho)$.

Ammettiamo ora che la funzione $\psi(x)$ si possa risolvere in due o più fattori razionali primi tra loro: fattori che generalmente supporremo della forma X^r, indicando X una funzione intera a fattori lineari disuguali. Considerando la somma delle parti di P_n dovute a tutte le radici

(*) Ma in riguardo a questa soluzione è necessario di avvertirsi una inesplicabile inesattezza che si riscontra nell'articolo originale del Sylvester rispetto alla formola (1), trovandosi al numeratore ρ^n in vece di ρ^{-n}. E questa avvertenza è tanto più necessaria in quanto che la formola è sostenuta col ρ^n in tutto il corso dell'articolo, e quindi anche nell'esempio recato dall'illustre Autore, di modo che i risultamenti, che ivi si leggono, sono inesatti. Ora questo esempio, il quale consiste nel *trovare in quanti modi il numero* n *si può comporre per mezzo degli elementi 1, 2, 3, 4, 5, 6*, è il 5° di quelli compresi nella tavola che diamo in fine della presente memoria; e quivi si troveranno rettificati i risultamenti.

dell'equazione $X=0$, questa somma è ciò che noi distinguiamo col nome di *componente* di P_n relativa al fattore X^r di $\psi(x)$; ed il suo valore coinciderà con quello della sommatoria $\sum F(\rho)$, estesa alle dette radici. Egli è poi chiaro che la ricerca di P_n si riduce alla ricerca di tutte le sue componenti relative a' diversi fattori primi tra loro, ne' quali si suppone decomposta la funzione $\psi(x)$; la somma di tutte queste componenti darà per lo appunto il valore di P_n.

Applicando questi principii allo sviluppo della funzione (3), per la quale si ha $\varphi(x)=1$, e:

$$\psi(x)=(1-x^\alpha)(1-x^\beta)\ldots(1-x^\lambda),$$

bisogna innanzi tutto risolvere questa funzione ne' suoi fattori primi. Sia m un divisore di uno o più degli elementi $\alpha, \beta, .., \lambda$, comprendendo tra i divisori l'unità e ciascuno elemento; così, se r è il numero degli elementi divisibili per m, tra i binomii di $\psi(x)$ ve ne saranno altrettanti divisibili pel binomio $1-x^m$, e quindi anche pel suo fattore irriduttibile X_m, di modo che la potenza X_m^r sarà un fattore di $\psi(x)$, primo con tutti gli altri fattori; ed intanto questa funzione verrà trasformata in:

$$\psi(x)=\Pi . X_m^r,$$

dove il segno Π si rapporta a tutti i divisori m de' dati elementi $\alpha, \beta, .., \lambda$, mentre il valore di r corrispondente ad ogni valore di m è sempre uguale al numero degli elementi, de' quali m è divisore. Ciò premesso, siccome a ciascuno de' fattori del prodotto $\Pi . X_m^r$ corrisponde una componente di P_n, ne risulta che il numero delle componenti è precisamente uguale al numero di que' fattori, e perciò uguale al numero totale de' divisori de' dati elementi; ed ogni divisore darà origine ad una componente. Ora, posto che ρ sia una radice primitiva dell' equazione $1-x^m=0$, sarà dessa anche radice di $X_m=0$; quindi, se si rappresenta con W_m la componente di P_n relativa al fattore X_m^r di $\psi(x)$, vale a dire la componente dovuta al divisore m; ed inoltre s'indichi con $F(\rho)$ il coefficiente di $\frac{1}{t}$ nello sviluppo ascendente dell'una o dell'altra funzione:

$$\frac{e^{nt}}{\psi(\rho e^{-t})}\rho^{-n} \quad , \quad -\frac{(\rho+t)^{(n+l)}}{\psi(\rho+t)},$$

si avrà $W_m=\sum F(\rho)$, estendendo il Σ alle radici di $X_m=0$; o, che torna

allo stesso, alle radici primitive di $1-x^m=0$; e sarà poi $P_n=\Sigma W_m$, qui il Σ rapportandosi a tutti i divisori disuguali de' dati elementi. Ora queste conchiusioni costituiscono appunto il teorema che trattavasi di dimostrare; imperciocchè le due funzioni scritte or ora in ultimo luogo coincidono rispettivamente con le funzioni (1) e (2).

2. Per evitare circollocuzioni distingueremo in ciascuna componente l'*ordine* e la *base*; la *base* è quel divisore di uno o più elementi che dà origine alla stessa componente; e l'*ordine* è il numero degli elementi che sono divisibili per la base. Fin qui la componente di base m è stata rappresentata con W_m; ma questa notazione vuol' essere completata con la introduzione dell' ordine; e però, se l'ordine sia dinotato da r, invece di W_m, adotteremo il simbolo $V_m^{(r)}$. Se la componente è di prim'ordine, per semplicità sopprimeremo l'indice superiore, e scriveremo V_m in luogo di $V_m^{(1)}$.

3. Risulta dal teorema precedente che il calcolo di P_n si riduce al calcolo delle sue componenti. Ora considerando in generale una componente qualunque $V_m^{(r)}$ definita dalla formola: $V_m^{(r)}=\Sigma F(\rho)$, osserveremo che per ottenere la sua espressione dovrà prima cercarsi quella di $F(\rho)$, coefficiente di $\frac{1}{t}$ nello sviluppo di (1) o di (2); e quindi prendere la somma $\Sigma F(\rho)$; ma perciò sono indispensabili ulteriori dilucidazioni.

Intanto, lasciando ora da banda la funzione algebrica (2), la quale rientra tra quelle considerate nella citata memoria *sullo sviluppo delle funzioni fratte razionali*, ove trovansi esposti i metodi e le formole per calcolare il termine del suo sviluppo affetto da $\frac{1}{t}$, ci arresteremo a studiare la stessa ricerca in riguardo alla funzione trascendente (1), mirando a completare in ogni parte la soluzione del Sylvester.

4. Posto:

$$\varpi(t)=\frac{e^{nt}}{(1-\rho^\alpha e^{-\alpha t})(1-\rho^\beta e^{-\beta t})\dots(1-\rho^\lambda e^{-\lambda t})}, \tag{4}$$

la funzione (1) si cangia in $\varpi(t).\rho^{-n}$; quindi, se il coefficiente di $\frac{1}{t}$ nello sviluppo di $\varpi(t)$ si rappresenta con $f(\rho)$, si avrà: $F(\rho)=f(\rho).\rho^{-n}$; e sarà perciò:

$$V_m^{(r)}=\Sigma f(\rho).\rho^{-n}, \tag{5}$$

la somma dovendo estendersi alle radici primitive di $1-x^m=0$. Ora,

trovata che sia l'espressione di $f(\rho)$, ecco il metodo a tenersi per prendere questa somma. Bisogna osservare che, l'espressione di $f(\rho)$ è, in generale, una funzione fratta di ρ, la quale, stante l'equazione $1-\rho^m=0$, si può trasformare in una funzione intera, e però della forma:

$$f(\rho)=A\rho^a+B\rho^b+\ldots+L\rho^l\,,$$

dove $A, B, \ldots, L$ sono numeri dati, indipendenti da ρ; ed in tal modo la formola (5) diverrà:

$$V_m^{(r)}=\Sigma\left(A\rho^a+B\rho^b+\ldots+L\rho^l\right)\rho^{-n}\,,$$

ovvero, effettuando la moltiplicazione indicata:

$$V_m^{(r)}=\Sigma\left(A\rho^{-(n-a)}+B\rho^{-(n-b)}+\ldots+L\rho^{-(n-l)}\right)\,.$$

Dopo ciò, dinotata con S_i la somma delle potenze di grado i delle radici primitive dell'equazione $1-x^m=0$, è palese che il valore della sommatoria è ciò che diviene il polinomio sottoposto al Σ, cangiandovi le potenze $\rho^{-(n-a)}$, $\rho^{-(n-h)}$, ... nelle somme corrispondenti $S_{-(n-a)}$, $S_{-(n-h)}$, ...; o meglio in S_{n-a}, S_{n-h}, ... (art. 1°, § 3°, I), e si avrà in conseguenza:

$$V_m^{(r)}=\Sigma\left(AS_{n-a}+BS_{n-b}+\ldots+LS_{n-l}\right)\,.$$

5. Mostreremo or ora che l'espressione di $f(\rho)$ è in ogni caso una frazione che ha per denominatore un prodotto di binomii, o un aggregato di frazioni ognuna delle quali ha per denominatore un sol binomio; e già si è veduto con quanta facilità si ottengono le funzioni intere equivalenti a siffatte frazioni. Così tutta la difficoltà si concentra nella ricerca della stessa espressione di $f(\rho)$, vale a dire nella ricerca del coefficiente di $\frac{1}{t}$ nello sviluppo ascendente della funzione $\omega(t)$; ed è perciò che di questo sviluppo passeremo ad occuparci.

6. In ciò che segue per indicare la somma o il prodotto de' valori che prende una funzione $\varphi(a)$ per un sistema di valori dati di a rappresentati da $a_1, a_2, a_3, \ldots$, scriveremo semplicemente $\Sigma\varphi(a)$, o $\Pi\varphi(a)$ talchè sarà:

$$\Sigma\,\varphi(a)=\varphi(a_1)+\varphi(a_2)+\varphi(a_3)+\ldots$$
$$\Pi\,\varphi(a)=\varphi(a_1)\times\varphi(a_2)\times\varphi(a_3)\times\ldots$$

Ciò premesso, supponendo che tra gli elementi dati $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ ve ne

siano r divisibili, ed s non divisibili per m, dinoteremo i primi con $a_1, a_2, .., a_r$, e gli altri con $b_1, b_2, .., b_s$, ed allora, siccome ciascuna delle potenze $\rho^{a_1}, \rho^{a_2}, \dots, \rho^{a_r}$ è uguale ad 1, si avrà dalla (4)

$$\varpi(t) = \frac{e^{nt}}{(1-e^{-a_1 t})(1-e^{-a_2 t})\dots(1-e^{-a_r t})(1-\rho^{b_1}e^{-b_1 t})\dots(1-\rho^{b_s}e^{-b_s t})},$$

o più compendiosamente:

$$\varpi(t) = \frac{e^{nt}}{\Pi(1-e^{-at}) \times \Pi(1-\rho^b e^{-bt})};$$

od ancora sotto altra forma:

$$\varpi(t) = e^{nt - \log\Pi(1-e^{-at}) - \log\Pi(1-\rho^b e^{-bt})}. \tag{6}$$

Sviluppando i due logaritmi abbiamo (V. la nota in fine):

$$\log(1-e^{-at}) = \log at - \frac{a}{2}t + \frac{B_1 a^2}{2'2}t^2 - \frac{B_3 a^4}{4'4}t^4 + \frac{B_5 a^6}{6'6}t^6 - \text{etc:}$$ (*)

$$\log(1-\rho^b e^{-bt}) = \log(1-\rho^b) - \frac{U_0 b}{1'}t - \frac{U_1 b^2}{2'}t^2 - \frac{U_2 b^3}{3'}t^3 - \text{etc:}$$

dove $B_1, B_3, B_5, \dots$ figurano i numeri Bernoulliani, ed $U_0, U_1, U_2, \dots$ i numeri ultra-Bernoulliani relativi alla base ρ^{-b}. Posto successivamente nella prima $a_1, a_2, .., a_r$ in luogo di a, e nella seconda $b_1, b_2, .., b_s$ in luogo di b, e prendendo le somme, verrà:

$$\log\Pi(1-e^{-at}) = \log t^r \Pi a - \frac{\Sigma a}{2}t + \frac{B_1 \Sigma a^2}{2'2}t^2 - \frac{B_3 \Sigma a^4}{4'4}t^4 + \text{etc:}$$

$$\log\Pi(1-\rho^b e^{-bt}) = \log(1-\rho^b) - \frac{\Sigma(U_0 b)}{1'}t - \frac{\Sigma(U_1 b^2)}{2'}t^2 - \text{etc:}$$

Da queste due formole si deduce:

$$e^{nt - \log\Pi(1-e^{-at})} = \frac{1}{t^r\Pi(a)}\, e^{+(p_1 t + p_2 t^2 + p_4 t^4 + p_6 t^6 + \dots)}$$

$$e^{-\log\Pi(1-\rho^b e^{-bt})} = \frac{1}{\Pi(1-\rho^b)}\, e^{-(q_1 t + q_2 t^2 + q_3 t^3 + q_4 t^4 + \dots)}$$

(*) Imitando il chiarissimo Schlömilch scriviamo generalmente k' (*k con apostrofe*) per indicare il prodotto $1.2.3\dots k$.

avendo messo per brevità:

$$(7)\quad p_1 = n + \frac{1}{2}\Sigma a\,,\ p_2 = -\frac{B_1}{2'2}\Sigma a^2\,,\ p_4 = \frac{B_3}{4'4}\Sigma a^4, \ldots, p_{2i} = (-1)^i \frac{B_{2i-1}}{(2i)'2i}\Sigma a^{2i}, \ldots$$

$$(8)\quad q_1 = -\Sigma(U_0 b)\,,\ q_2 = -\frac{1}{2'}\Sigma(U_1 b^2)\,,\ q_3 = -\frac{1}{3'}\Sigma(U_2 b^3)\,, \ldots, q_i = -\frac{1}{i'}\Sigma(U_{i-1} b^i), \ldots$$

Quindi la (6) si cangia in

$$x(t) = \frac{1}{t^r\,\Pi(a)\,\Pi(1-\rho^b)}\, e^{(p_1 t + p_2 t^2 + p_4 t^4 + \ldots) - (q_1 t + q_2 t^2 + q_3 t^3 + \ldots)}$$

ma se si faccia per compendio, e per simmetria:

$$\begin{array}{lll} c_1 = p_1 - q_1 & , & c_2 = p_2 - q_2 \\ c_3 = \quad - q_3 & , & c_4 = p_4 - q_4 \\ c_5 = \quad - q_5 & , & c_6 = p_6 - q_6 \\ \ldots\ldots\ldots & , & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

si avrà più semplicemente:

$$x(t) = \frac{1}{t^r\,\Pi(a)\,\Pi(1-\rho^b)}\, e^{(c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + \ldots)}\,.$$

Ora alla esponenziale possiamo sostituire il prodotto:

$$\left(1 + \frac{c_1}{1'}t + \frac{c_1^2}{2'}t^2 + \ldots\right)\left(1 + \frac{c_2}{1'}t^2 + \frac{c_2^2}{2'}t^4 + \ldots\right)\left(1 + \frac{c_3}{1'}t^3 + \frac{c_3^2}{2'}t^6 + \ldots\right)\ldots,$$

il quale si sviluppa nella forma:

$$A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \ldots + A_i t^i + \ldots\ ;$$

e così, da ultimo, per lo sviluppo della funzione $x(t)$ si ottiene:

$$(10)\qquad x(t) = \frac{1}{\Pi(a)\,\Pi(1-\rho^b)} \cdot \frac{1}{t^r}\left(1 + A_1 t + A_2 t^2 + \ldots + A_i t^i + \ldots\right);$$

ma resta a determinare i coefficienti.

Osserveremo a tale effetto che ogni coefficiente è un aggregato di termini della forma $\dfrac{c_1^{\varepsilon_1} c_2^{\varepsilon_2} c_3^{\varepsilon_3} \ldots}{\varepsilon_1'\ \varepsilon_2'\ \varepsilon_3' \ldots}$, vale a dire di termini ognun de' quali è il

prodotto di potenze di alcune delle quantità $c_1, c_2, c_3, \ldots$, ciascuna divisa pel prodotto de' numeri consecutivi da 1 fino all'esponente della potenza; ma, fatta astrazione da questi divisori numerici, è chiaro che l'espressione di un coefficiente qualunque A_i è la funzione isobarica di peso i formata con gli elementi $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_i$, in guisa che il suo valore si ha dalla formola:

$$(11) \qquad A_i = \sum \frac{c_1^{\varepsilon_1} c_2^{\varepsilon_2} c_3^{\varepsilon_3} \ldots c_i^{\varepsilon_i}}{\varepsilon'_1 \, \varepsilon'_2 \, \varepsilon'_3 \ldots \varepsilon'_i}$$

estendendo il $\sum$ a tutte le soluzioni intere e positive, incluso il zero, dell'equazione indeterminata:

$$(12) \qquad \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 + \ldots + i\varepsilon_i = i\,.$$

Se si ponga:

$$(13) \qquad C_i = \sum c_1^{\varepsilon_1} c_2^{\varepsilon_2} c_3^{\varepsilon_3} \ldots c_i^{\varepsilon_i}\,,$$

ed il $\sum$ s'intenda esteso alle medesime soluzioni, in questa espressione di C_i si ha per lo appunto la funzione isobarica di peso i relativa agli elementi $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_i$, e da essa si avrà subito l'espressione di A_i, applicando i convenienti divisori numerici a' singoli fattori di tutt'i suoi termini; vale a dire dividendo ogni potenza c_ν^μ pel numero $\mu' = 1.2.3\ldots\mu$.

7. Dobbiamo intanto aggiungere che i valori delle successive funzioni C_1, C_2, C_3, C_4, etc: etc: si possono calcolare l'uno dopo l'altro di una maniera semplicissima, indipendentemente da soluzioni di equazioni indeterminate, e ciò mediante una regola che qui ci limitiamo ad enunciare, e che facilmente si dimostra. Scrivendo, in generale, $\overset{h}{C}_i$ per dinotare ciò che diviene l'espressione di C_i sopprimendone tutti i termini in cui figura qualche elemento con indice più piccolo di h, si ha:

$$\text{se } i \text{ pari} \quad , \quad C_i = c_1 C_{i-1} + c_2 \overset{2}{C}_{i-2} + c_3 \overset{3}{C}_{i-3} + \ldots + c_{\frac{i}{2}} \overset{\frac{i}{2}}{C}_{\frac{i}{2}} + c_i\,;$$

$$\text{se } i \text{ impari} \, , \quad C_i = c_1 C_{i-1} + c_2 C_{i-2} + c_3 C_{i-3} + \ldots + c_{\frac{i-1}{2}} \overset{\frac{i-1}{2}}{C}_{\frac{i+1}{2}} + c_i\,.$$

e queste formole conducono alla regola seguente per costruire la funzione C_i mediante alcune delle consecutive funzioni, in ordine retrogrado, C_{i-1}, C_{i-2}, $C_{i-3}, \ldots$

I termini della serie $C_{i-1}, C_{i-2}, C_{i-3}, \ldots$, *arrestata a* $C_{\frac{i}{2}}$ *o* $C_{\frac{i-1}{2}}$ *secondochè* i *è pari o impari, si moltiplichino uno ad uno pe' termini corrispondenti della serie* $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{\frac{i}{2}}$ *o* $c_{\frac{i-1}{2}}$, *escludendo però da* C_{i-2} *tutti i termini in cui figura* c_1*; da* C_{i-3} *quelli in cui figurano* c_1, c_2*; da* C_{i-4} *quelli in cui figurano* c_1, c_2, c_3*; e così di seguito. Addizionando i prodotti, ed aggiungendo alla somma l'elemento* c_i, *si avrà l'espressione di* C_i.

Cominciando ad applicare questa regola da $i=1$, e tenendo presente che $C_0=1$, si forma con la massima facilità la serie delle espressioni di C_1, C_2, C_3, etc: senz'altro fastidio che quello di scrivere i risultamenti: e così si ottiene:

$$C_1=c_1$$

$$C_2=c_1^2+c_2$$

$$C_3=c_1^3+c_1c_2+c_3$$

$$C_4=c_1^4+c_1^2c_2+c_1c_3+c_2^2+c_4$$

$$C_5=c_1^5+c_1^3c_2+c_1^2c_3+c_1(c_2^2+c_4)+c_2c_3+c_5 \tag{14}$$

$$C_6=c_1^6+c_1^4c_2+c_1^3c_3+c_1^2(c_2^2+c_4)+c_1(c_2c_3+c_5)+c_2(c_2^2+c_4)+c_3^2+c_6$$

$$C_7=c_1^7+c_1^5c_2+c_1^4c_3+c_1^3(c_2^2+c_4)+c_1^2(c_2c_3+c_5)+c_1(c_2^3+c_2c_4+c_3^2+c_6)+$$
$$+c_2(c_2c_3+c_5)+c_3c_4+c_7$$

etc: etc: etc: etc:

Da queste espressioni si passa immediatamente a quelle di $A_1, A_2, A_2, \ldots$, con l'apposizione de' convenienti divisori numeri, per cui si ha in fine:

$$A_1=c_1$$

$$A_2=\frac{c_1^2}{2'}+c_2$$

$$A_3=\frac{c_1^3}{3'}+c_1c_2+c_3$$

$$A_4=\frac{c_1^4}{4'}+\frac{c_1^2}{2'}c_2+c_1c_3+\frac{c_2}{2'}+c_4 \tag{15}$$

$$A_5=\frac{c_1^5}{5'}+\frac{c_1^3}{3'}c_2+\frac{c_1^2}{2'}c_3+c_1\left(\frac{c_2^2}{2'}+c_4\right)+c_2c_3+c_5$$

$$A_6=\frac{c_1^6}{6'}+\frac{c_1^4}{4'}c_2+\frac{c_1^3}{3'}c_3+\frac{c_1^2}{2'}\left(\frac{c_2^2}{2'}+c_4\right)+c_1\left(c_2c_3+c_5\right)+\frac{c_2^3}{3'}+c_2c_4+\frac{c_3^2}{2'}+c_6$$

etc: etc: etc: etc:

8. Messa così in evidenza la legge ond'è regolata la composizione delle espressioni delle quantità A_i, resta completamente determinato lo sviluppo della funzione $\alpha(t)$ in potenze ascendenti della variabile t, già dato nella formola (10). Risulta per tanto da questa formola che nel detto sviluppo il termine affetto dalla potenza t^{-1} ha per coefficiente:

$$f(\rho)=\frac{A_{r-1}}{\Pi(a)\,\Pi(1-\rho^{b})}$$

o sotto forma più esplicita:

$$(16)\qquad f(\rho)=\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_r}\times\frac{A_{r-1}}{(1-\rho^{b_1})(1-\rho^{b_2})\ldots(1-\rho^{b_s})}\,;$$

e ciò è quanto era necessario per compiere la risoluzione del problema che ci siamo proposti: risoluzione la quale si riassume nella seguente proposizione:

Rappresenti P_n *il numero delle maniere in cui un dato numero* n, *intero e positivo, si può comporre per mezzo di dati elementi, numeri anch'essi interi e positivi. Il valore di* P_n *potrà riguardarsi come formato da tante parti distinte quanti sono i divisori disuguali de' dati elementi, includendo tra i divisori l'unità e ciascuno elemento. Ciò premesso sia* m *uno de' detti divisori, e siano* $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *tutti gli elementi divisibili per* m, *e* $b_1, b_2, \ldots, b_s$ *quelli che nol sono; allora, indicata con* $V_m^{(r)}$ *la parte, o componente di* P_n, *dovuta al detto divisore, il suo valore sarà definito dalla formola:*

$$(17)\qquad V_m^{(r)}=\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_r}\sum\frac{A_{r-1}}{(1-\rho^{b_1})(1-\rho^{b_2})\ldots(1-\rho^{b_s})}\rho^{-n}$$

nella quale il Σ *si estende a tutte le radici primitive dell'equazione* $1-\rho^m=0$. *E sarà poi:*

$$P_n=\sum V_m^{(r)}$$

dove il Σ *si rapporta a tutt'i divisori* m, *tra loro disuguali de' dati elementi.*

Rispetto al valore di A_{r-1} esso è dato, in generale, dalla formola (11), e più esplicitamente dalle formole (15). E per ciò che riguarda le quan-

tità c_1, c_2, c_3, ..., esistenti in quelle formole, posto mente alle (9), (8) e (7), i loro valori si hanno dalle formole seguenti:

$$
(18) \qquad
\begin{aligned}
c_1 &= n+\frac{1}{2}\Sigma a+\frac{1}{1'}\Sigma(U_0 b) \quad , & c_2 &= -\frac{B_1}{2'2}\Sigma a^2+\frac{1}{2'}\Sigma(U_1 b^2) \\
c_3 &= \frac{1}{3'}\Sigma(U_2 b^3) \quad , & c_4 &= \frac{B_3}{4'4}\Sigma a^4+\frac{1}{4'}\Sigma(U_3 b^4) \\
c_5 &= \frac{1}{5'}\Sigma(U_4 b^5) \quad , & c_6 &= -\frac{B_5}{6'6}\Sigma a^6+\frac{1}{6'}\Sigma(U_5 b^6) \\
&\text{etc:} \qquad \text{etc:} \quad , & &\text{etc:} \qquad \text{etc:}
\end{aligned}
$$

dove i Σ esprimono le somme de' valori che prendono le funzioni sottoposte, mettendovi successivamente, sia $a=a_1, a_2, .., a_r$, sia $b=b_1, b_2, .., b_s$. E dove inoltre i numeri ultra-Bernoulliani si rapportano alle base ρ^{-b}, talchè si avrebbe:

$$
(19) \qquad
\begin{aligned}
\Sigma(U_0 b) &= -\left[b_1\frac{\rho^{b_1}}{1-\rho^{b_1}}+b_2\frac{\rho^{b_2}}{1-\rho^{b_2}}+\dots+b_s\frac{\rho^{b_s}}{1-\rho^{b_s}}\right] \\
\Sigma(U_1 b^2) &= \left[b_1^2\frac{\rho^{b_1}}{(1-\rho^{b_1})^2}+b_2^2\frac{\rho^{b_2}}{(1-\rho^{b_2})^2}+\dots=b_s^2\frac{\rho^{b_s}}{(1-\rho^{b_s})^2}\right] \\
\Sigma(U_2 b^3) &= -\left[b_1^3\frac{\rho^{b_1}+\rho^{2b_1}}{(1-\rho^{b_1})^3}+b_2^3\frac{\rho^{b_2}+\rho^{2b_2}}{(1-\rho^{b_2})^3}+\dots+b_s^3\frac{\rho^{b_s}+\rho^{2b_s}}{(1-\rho^{b_s})^3}\right] \\
&\text{etc:} \qquad \text{etc:} \qquad \text{etc:} \qquad \text{etc:}
\end{aligned}
$$

9. Osservando la natura delle quantità da cui risulta l'espressione di A_{r-1}, si fa palese che la medesima, e quindi anche quella di $f(\rho)$ definita nella (16), è, com'erasi già annunciato (n° 5), una funzione fratta di ρ, avente per denominatore un prodotto di binomii della forma $1-x^q$; la quale adunque è immediatamente trasformabile in funzione intera co'principii precedentemente dichiarati. Per tanto nel calcolo effettivo della componente $V_m^{(r)}$ data dalla formola generale (17), si comincerà dal cercare a parte le trasformate intere equivalenti alle due funzioni fratte $\frac{1}{(1-\rho^{b_1})(1-\rho^{b_2})\dots(1-\rho^{b_s})}$ ed A_{r-1}, e si moltiplicheranno tra loro. Indi il prodotto, cui possono, se così piaccia, farsi subire le semplificazioni e riduzioni segnalate nel § 4° dell'art. I, si moltiplicherà per ρ^{-n}; e finalmente ogni potenza $\rho^{\pm i}$ si cangerà nella corrispondente S_i, vale

a dire nella somma delle potenze di grado i delle radici primitive dell'equazione $1-\rho^m=0$.

Nella formola (17) si ha l'espressione la più generale delle componenti $W_m^{(r)}$; ma questa espressione diviene assai più semplice ne' seguenti tre casi: *primo*, se la base della componente è uguale ad 1; *secondo*, se è uguale a 2; *terzo*, se la componente è di 1° ordine. Ora questi casi meritano di essere specialmente considerati, perchè nel fatto son dessi i più comuni in tutte le partizioni; ed è perciò che andremo brevemente ad esaminarli.

10. Caso I. *Per le componenti che hanno la base uguale ad 1.* In qualunque partizione si ritrova una componente $V_1^{(r)}$, per cui $m=1$; e poichè 1 è sempre un divisore comune a tutti gli elementi, in questo caso converrà ritenere $b_1=b_2=..=b_r=0$, e l'ordine r della componente coinciderà col numero totale de' dati elementi $a_1, a_2, .., a_r$. Ora, siccome nella (17) il Σ va esteso alle radici primitive dell'equazione $1-x^m=1-x=0$, per cui si ha soltanto $\rho=1$, divien palese che nel caso presente l'espressione della componente si riduce a:

$$V_1^{(r)}=\frac{A_{r-1}}{a_1 a_2 \ldots a_r}; \tag{20}$$

ma oltre a ciò è chiaro che dalle (18) debbono sparire le b, e con esse le U, di guisa che nella serie delle $c_1, c_2, c_3, \ldots$ si annullano tutte quelle ad indice dispari, ad eccezione della prima c_1 e si avrà poi:

$$c_1=n+\frac{1}{2}\Sigma a\,,\quad c_2=-\frac{B_1}{2{\cdot}2}\Sigma a^2\,,\quad c_4=\frac{B_3}{4{\cdot}4}\Sigma a^4\,,\quad c_6=-\frac{B_5}{6{\cdot}6}\Sigma a^6\,,\ \text{etc:} \tag{21}$$

i valori attuali delle $c_1, c_2, c_4, c_6, \ldots$ tornando ordinatamente uguali a quelli delle $p_1, p_2, p_4, p_6, \ldots$ dati dalle (7). In quanto al valore di A_{r-1} lo si avrebbe generalmente dalla formola:

$$A_i=\Sigma\frac{c_1^{\varepsilon_1} c_2^{\varepsilon_2} c_4^{\varepsilon_4} \ldots c_i^{\varepsilon_i}}{\varepsilon_1' \, \varepsilon_2' \, \varepsilon_4' \ldots \varepsilon_i'}\,, \tag{22}$$

estendendo il Σ a tutte le soluzioni intere e positive dell'equazione:

$$\varepsilon_1+2\varepsilon_2+4\varepsilon_4+\ldots+i\varepsilon_i=i\,,$$

il di cui primo membro si arresta al termine $(i-1)\varepsilon_{i-1}$ se i è dispari.

Ma è manifesto che la sua espressione si può ottenere, come nel caso generale, costruendo la funzione isobarica di peso i:

$$C_i = \sum c_1^{\varepsilon_1} c_2^{\varepsilon_2} c_4^{\varepsilon_4} \ldots c_i^{\varepsilon_i},$$

e poscia applicando i convenienti divisori numerici a'singoli fattori di tutti i suoi termini.

È osservabile però che l'attuale espressione di C_i e ciò che diviene quella risultante dalla (13) sopprimendone tutti i termini in cui si trova qualche indice dispari diverso da 1; ed è così che dalle formole (14) si passa subito a quelle che convengono alla presente ipotesi, cioè:

$$
\begin{aligned}
&C_1 = c_1\\
&C_2 = c_1^2 + c_2\\
&C_3 = c_1^3 + c_1 c_2\\
&C_4 = c_1^4 + c_1^2 c_2 + c_2^2 + c_4\\
(23)\quad &C_5 = c_1^5 + c_1^3 c_2 + c_1 (c_2^2 + c_4)\\
&C_6 = c_1^6 + c_1^4 c_2 + c_1^2 (c_2^2 + c_4) + c_2^3 + c_2 c_4 + c_6\\
&C_7 = c_1^7 + c_1^5 c_2 + c_1^3 (c_2^2 + c_4) + c_1 (c_2^3 + c_2 c_4 + c_6)\\
&C_8 = c_1^8 + c_1^6 c_2 + c_1^4 (c_2^2 + c_4) + c_1^2 (c_2^3 + c_2 c_4 + c_6) + c_2^4 + c_2^2 c_4 + c_2 c_6 + c_4^2 + c_8\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Del rimanente la serie di queste espressioni si può calcolare direttamente con la stessa regola del n° 7. Ed oltre a ciò faremo osservare che, se i è un numero dispari, si ha semplicemente $C_i = c_1 C_{i-1}$.

Applicando a'singoli fattori de'termini delle precedenti espressioni i soliti divisori numerici, si ottengono i valori di A_i convenienti al calcolo delle componenti $V_1^{(r)}$; e si ha per conseguenza:

$$
\begin{aligned}
&A_1 = c_1\\
&A_2 = \frac{c_1^2}{2'} + c_2\\
&A_3 = \frac{c_1^3}{3'} + c_1 c_2\\
(24)\quad &A_4 = \frac{c_1^4}{4'} + \frac{c_1^2}{2'} c_2 + \frac{c_2^2}{2'} + c_4\\
&A_5 = \frac{c_1^5}{5'} + \frac{c_1^3}{3'} c_2 + c_1 \left(\frac{c_2^2}{2'} + c_4\right)\\
&A_6 = \frac{c_1^6}{6'} + \frac{c_1^4}{4'} c_2 + \frac{c_1^2}{2'} \left(\frac{c_2^2}{2'} + c_4\right) + \frac{c_2^3}{3'} + c_2 c_4 + c_6\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

11. Caso II. *Per le componenti che hanno la base uguale a 2.* Una componente $V_2^{(r)}$, per cui $m=2$, si trova in tutte quelle partizioni nelle quali tra i dati elementi v'ha de' numeri pari $a_1, a_2, .., a_r$. Ora, siccome nella formola (17) il Σ si estende alle radici primitive di $1-x^m=1-x^2=0$, e però alla sola $\rho=-1$, essendo $b_1, b_2, .., b_s$ numeri dispari, sarà

$$\rho^{b_1}=\rho^{b_2}=\ldots=\rho^{b_s}=-1\ ;$$

e la formola diverrà:

$$V_2^{(r)}=\frac{(-1)^n}{2^r.a_1a_2\ldots a_r}A_{r-1}\ . \tag{25}$$

Inoltre, siccome i numeri U_i si rapportano alla base $\rho^{-b}=-1$, essendo che b figura un numero dispari, saranno nulli quelli ad indice pari, salvo il caso di $i=0$, per cui si ha $U_0=-\frac{1}{2}$; e da ciò risulta che tra i termini della serie $c_1, c_2, c_3, \ldots$, definiti in generale dalla (18), debbono sparire tutti quelli ad indice dispari, eccetto il primo c_1, la di cui espressione si riduce ad $n+\frac{1}{2}(\Sigma a+\Sigma b)$. Ma v'ha di più che i numeri U_i relativi alla base -1 si possono esprimere mediante i numeri B_i, cui sono legati dalla relazione (Nota in fine):

$$U_i=(-1)^{\frac{i-1}{2}}\frac{2^{i+1}-1}{i+1}B_i\ ,$$

di guisa che si avrà in generale:

$$c_{2h}=(-1)^h\frac{B_{2h-1}}{(2h)'(2h)}\left[\Sigma a^{2h}+(2^{2h}-1)\Sigma b^{2h}\right]\ .$$

Segue da queste osservazioni che nel calcolo della componente $W_2^{(r)}$ le espressioni a doversi adottare per la quantità A_i sono le stesse di quelle definite nel n° precedente; vale a dire quelle che risultano dalla (22) o dalle (24); ma rispetto a' valori di c_1, c_2, c_4, etc: si avrà:

$$\begin{aligned}
c_1&=n+\frac{1}{2}\left[\Sigma a+\Sigma b\right]\\
c_2&=-\frac{B_1}{2'2}\left[\Sigma a^2+(2^2-1)\Sigma b^2\right]\\
c_4&=+\frac{B_3}{4'4}\left[\Sigma a^4+(2^4-1)\Sigma b^4\right]\\
c_6&=-\frac{B_5}{6'6}\left[\Sigma a^6+(2^6-1)\Sigma b^6\right]\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{26}$$

12. Caso III. *Per le componenti di prim'ordine.* Nelle componenti di questa specie la base m è divisore di un solo elemento a_1. Ora essendo $r=1$, sarà $A_{r-1}=A_0=1$; e la formola (17) diverrà semplicemente:

$$(27) \qquad V_m = \frac{1}{a_1} \sum \frac{\rho^{-n}}{(1-\rho^{b_1})(1-\rho^{b_2})\ldots(1-\rho^{b_s})} .$$

Qui dunque altro non resta che cercare la funzione intera equivalente alla frazione $\frac{1}{(1-\rho^{b_1})(1-\rho^{b_2})\ldots}$, moltiplicarla per ρ^{-n}, e poi cangiare ogni potenza ρ^{-i} nella somma corrispondente S_i.

È chiaro che se i dati elementi sono tutti numeri primi, o anche primi tra loro, salvo la componente che ha per base l'unità, tutte le altre sono di prim'ordine. Del resto in qualunque partizione esistono generalmente più componenti di questa specie; e tale per lo meno è quella che ha per base il più grande degli elementi, il quale è divisore solo di se stesso.

13. A questo punto il problema che ci siamo proposti è completamente risoluto, ed è tolta alla quistione tutta la sua difficoltà. Aggiungiamo una tavola con diversi esempii di partizione, dove abbiamo iscritti i soli risultamenti; nè la loro deduzione ha bisogno di spiega ulteriore, poichè derivano immediatamente, e con procedimento uniforme, sia dalle formole stabilite dal n° 8 e seguenti, sia da'principii esposti nell'art. I. Tuttavolta ci è sembrato utile di sviluppare la intera soluzione per qualcuno de'suddetti esempii in cui si verificano tutti i casi che il problema può presentare; e ciò tanto per mostrare col fatto la semplicità de'procedimenti, quanto per dare un modello della condotta del calcolo in tali ricerche.

Prenderemo adunque a considerare l'esempio 5°, nel quale si cerca il valore di $P_n(1,2,3,6,8,10)$; che è quanto dire: *trovare in quanti modi il numero* n *si può comporre per mezzo de' sei elementi* 1, 2, 3, 6, 8, 10. I divisori disuguali di questi elementi essendo in numero di otto, cioè 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, anche otto saranno le componenti di P_n; ma siccome la base 1 divide tutti i sei elementi; 2 ne divide quattro; 3 ne divide due; 4 anche due; e ciascuna delle rimanenti basi 4, 5, 6, 8, 10 divide un solo elemento, così le otto componenti saranno rappresentate da $V_1^{(6)}$, $V_2^{(4)}$, $V_3^{(2)}$, V_4, V_5, V_6, V_8, V_{10}; e si avrà:

$$P_n(1,2,3,6,8,10) = V_1^{(6)} + V_2^{(4)} + V_3^{(2)} + V_4 + V_5 + V_6 + V_8 + V_{10} .$$

Calcolo di $V_1^{(6)}$. Poichè la base è 1, si è nel caso del n° 10, da cui:

$$V_1^{(6)}=\frac{A_5}{1.2.3.6.3.10}\quad,\quad A_5=c_1\left(\frac{c_1^4}{120}+\frac{c_1^2}{6}c_2+\frac{c_2^2}{2}+c_4\right);$$

$$c_1=n+\frac{\Sigma a}{2}\quad,\quad c_2=-\frac{\Sigma a^2}{4.6}\quad,\quad c_4=\frac{\Sigma a^4}{4.24.30}.$$

Essendo attualmente $a=1, 2, 3, 6, 8, 10$, sarà $\Sigma a=30$, $\Sigma a^2=214$, $\Sigma a^4=15490$; quindi $c_1=n+15$, $c_2=-\frac{107}{12}$, $c_4=\frac{1549}{2.12^2}$; e perciò:

$$V_1^{(6)}=\frac{n+15}{1.2.3.6.8.10}\left[\frac{(n+15)^4}{120}-\frac{107}{12}\frac{(n+15)^2}{6}+\frac{6499}{12^2}\right].$$

Calcolo di $V_2^{(4)}$. La base essendo 2, bisogna far capo dal n° 11, dal quale:

$$V_2^{(4)}=(-1)^n\frac{A_3}{2^2.2.6.8.10}\quad,\quad A_3=c_1\left(\frac{c_1^2}{6}+c_2\right);$$

$$c_1=n+\frac{1}{2}\left(\Sigma a+\Sigma b\right)\quad,\quad c_2=-\frac{1}{24}\left(\Sigma a^2+3\Sigma b^2\right).$$

Ora abbiamo $a=2, 6, 8, 10$; $b=1, 3$; quindi $\Sigma a=26$, $\Sigma a^2=204$, $\Sigma b=4$, $\Sigma b^2=10$; in seguito $c_1=n+15$, $c_2=-\frac{39}{4}$; e perciò:

$$V_2^{(4)}=\frac{n+15}{2^8.3.5}\left[\frac{(n+15)^2}{6}-\frac{39}{4}\right].$$

Calcolo di $V_3^{(2)}$. Per questa componente bisogna tener presenti le relazioni $\rho^3=1$; $(1-\rho)(1-\rho^2)=3$; $1+\rho+\rho^2=0$; ed intanto si ha dal n° 8:

$$V_3^{(2)}=\frac{1}{3.6}\Sigma\frac{A_1\rho^{-n}}{(1-\rho)(1-\rho^2)(1-\rho^8)(1-\rho^{10})}=\frac{1}{3^2.3.6}\Sigma A_1\rho^{-n},$$

$$A_1=c_1=n+\frac{1}{2}\Sigma a+\Sigma(bU_0).$$

Posto ciò, siccome $a=3, 6$, sarà $\Sigma a=9$. Inoltre, essendo $b=1, 2, 8, 10$, si avrà:

$$\Sigma(bU_0)=-\left(\frac{\rho}{1-\rho}+2\frac{\rho^2}{1-\rho^2}+8\frac{\rho^8}{1-\rho^8}+10\frac{\rho^{10}}{1-\rho^{10}}\right)=-\left(11\frac{\rho}{1-\rho}+10\frac{\rho^2}{1-\rho^2}\right);$$

ma trasformando la funzione fratta come nell'ultimo esempio del § 4°, art. I, si avrà successivamente:

$$\Sigma(bU_0)=\frac{1}{3}(42+10\rho+11\rho^2)=\frac{1}{3}(31-\rho)\ ^{(*)} .$$

Avremo aduque

$$A_1=n+\frac{9}{2}+\frac{1}{3}(31-\rho)=n+\frac{89}{6}-\frac{1}{3}\rho ;$$

quindi:

$$V_3^2=\frac{1}{2.3^4}\Sigma\left(n+\frac{89}{6}-\frac{1}{3}\rho\right)\rho^{-n}$$

e, prendendo la somma, verrà:

$$V_3^{(2)}=\frac{1}{2.3^4}\left[\left(n+\frac{89}{6}\right)S_n-\frac{1}{3}S_{n-1}\right] .$$

Calcolo di $V_4, V_5, V_6, V_8, V_{10}$. Queste cinque componenti, tutte del prim'ordine, sono nel caso del n° 12.

1° In quanto a V_4 per cui $\rho^4=1$, $\rho^2=-1$, $(1-\rho)(1-\rho^2)(1-\rho^3)=4$, si ha:

$$V_4=\frac{1}{8}\Sigma\frac{\rho^{-n}}{(1-\rho)(1-\rho^2)(1-\rho^3)(1-\rho^6)(1-\rho^{10})}=\frac{1}{4.8}\Sigma\frac{\rho^{-n}}{(1-\rho^2)^2}=\frac{1}{4^2.8}\Sigma\rho^{-n}=\frac{1}{2^7}S_n .$$

2° In quanto a V_5, per cui $\rho^5=1$ ed $(1-\rho)(1-\rho^2)(1-\rho^3)(1-\rho^4)=5$, si ha:

$$V_5=\frac{1}{10}\Sigma\frac{\rho^{-n}}{(1-\rho)(1-\rho^2)(1-\rho^3)(1-\rho^6)(1-\rho^8)}=\frac{1}{5^2.10}\Sigma(1-\rho^2)(1-\rho^4)^2\rho^{-n} ;$$

ma il prodotto de' due binomii equivale a $2\rho-\rho^2+\rho^3-2\rho^4$; dunque:

$$V_5=\frac{1}{2.5^3}\left(2S_{n-1}-S_{n-2}+S_{n-3}-2S_{n-4}\right) .$$

(*) L'espressione $42+10\rho+11\rho^2$ si riduce a $31-\rho$ mediante la relazione $1+\rho+\rho^2=0$. Ora questa riduzione (e facciamo osservarlo in tesi generale) non è punto necessaria; ma è diretta unicamente ad avere risultamenti più semplici. Nel caso presente, impiegando la prima, si troverebbe:

$$(1)\qquad V_3^{(2)}=\frac{1}{2.3^4}\left[\left(n+\frac{111}{6}\right)S_n+\frac{10}{3}S_{n-1}+\frac{11}{3}S_{n-2}\right]$$

valore solo nella forma diverso da quello dato nel testo. In fatti S_i, esprimendo in generale la somma delle potenze di grado i delle radici primitive dell'equazione $1-\rho^3=0$, esprimerà la stessa somma anche a riguardo delle radici di $1+\rho+\rho^2=0$; quindi per teorie conosciute sussisterà la relazione $S_n+S_{n-1}+S_{n-2}=0$; ed allora, eliminando S_{n-2} tra questa e l'equazione (1), si ritorna all'espressione di $V_3^{(2)}$ data più sopra.

3° In quanto a V_6, essendo $\rho^6=1$ ed $(1-\rho)(1-\rho^2)\ldots(1-\rho^5)=6$, si ha dapprima:

$$V_6=\frac{1}{6}\sum\frac{\rho^{-n}}{(1-\rho)(1-\rho^2)(1-\rho^3)(1-\rho^6)(1-\rho^{10})}=\frac{1}{6.6}\sum\frac{1-\rho^5}{1-\rho^2}\rho^{-n}.$$

Ora si può trasformare la frazione, applicando la seconda formola del n° V del § 1°, art. I; così, stante le relazioni $\rho^3=-1$ ed $1-\rho+\rho^2=0$, si trova che la detta frazione equivale ad $\frac{1}{3}(\rho+\rho^2)$; e ne risulta:

$$V_6=\frac{1}{3.6.6}\sum(\rho+\rho^2)\rho^{-n}=\frac{1}{2^2.3^3}(S_{n-1}+S_{n-2}).$$

4° In quanto a V_8, per cui $\rho^8=1$, $(1-\rho)(1-\rho^2)\ldots(1-\rho^7)=8$, si ha:

$$V_8=\frac{1}{8}\sum\frac{\rho^{-n}}{(1-\rho)(1-\rho^2)(1-\rho^3)(1-\rho^6)(1-\rho^{10})}=\frac{1}{8.8}\sum(1+\rho^2)(1-\rho^5)(1-\rho^7)\rho^{-n};$$

ma l'espressione $(1+\rho^2)(1-\rho^5)(1-\rho^7)$, sussistendo ancora la relazione $\rho^4=-1$, si riduce a $2\rho^3$; dunque:

$$V_8=\frac{1}{4.8}\sum\rho^3.\rho^{-n}=\frac{1}{32}S_{n-3}.$$

5° Da ultimo per V_{10}, essendo $\rho^{10}=1$ ed $(1-\rho)(1-\rho^2)\ldots(1-\rho^9)=10$, si ottiene:

$$V_{10}=\frac{1}{10}\sum\frac{\rho^{-n}}{(1-\rho)(1-\rho^2)(1-\rho^3)(1-\rho^6)(1-\rho^5)}=\frac{1}{10.10}\sum(1-\rho^4)(1-\rho^5)(1-\rho^7)(1-\rho^9)\rho^{-n};$$

ma il prodotto de' quattro binomii, visto che $\rho^5=-1$, torna equivalente a $2(\rho^2+\rho^3)$; dunque in fine:

$$V_{10}=\frac{1}{5.10}\sum(\rho^2+\rho^3)\rho^{-n}=\frac{1}{50}(S_{n-2}+S_{n-3}).\ (*)$$

(*) È quasi superfluo di avvertire che, nel sistema delle espressioni delle componenti relative ad una stessa partizione, la somma delle potenze simili di radici primitive, rappresentata generalmente da S_i, cambia sempre di valore dall'una all'altra espressione; ma ciò che importa di tener presente si è che nella espressione di una componente qualunque rappresentata dal simbolo $V_m^{(r)}$, il grado dell'equazione binomia, cui si rapportano le dette somme, è sempre eguale all'ordine m della componente, vale a dire al numero m che figura come indice inferiore del simbolo.

Per considerare un caso particolare di questo esempio supporremo $n=30$; sarà:

$$V_1^{(6)}=\frac{4493899}{2^{10}.3^2}.$$

$$V_2^{(4)}=\frac{3933}{2^{10}}.$$

$$V_3^{(2)}=\frac{1}{2.3^4}\left[\left(30+\frac{89}{6}\right)S_{30}-\frac{1}{3}S_{29}\right]=\frac{2}{2.3^4}\left[\left(30+\frac{89}{6}\right)2+\frac{1}{3}\right]=\frac{5}{3^2}.$$

$$V_4=\frac{1}{2^7}S_{30}=\frac{1}{2^7}S_2=-\frac{2}{2^7}=-\frac{1}{2^6}.$$

$$V_5=\frac{1}{2.5^3}\left(2S_{29}-S_{28}+S_{27}-S_{26}\right)=\frac{1}{2.5^3}\left(-2+1-1+2\right)=0.$$

$$V_6=\frac{1}{2^2 3^3}\left(S_{29}+S_{28}\right)=\frac{1}{2^2 3^3}\left(S_5+S_4\right)=\frac{1}{2^2 3^3}\left(1-1\right)=0.$$

$$V_8=\frac{1}{2^5}S_{27}=0.$$

$$V_{10}=\frac{1}{2.5^2}\left(S_{28}+S_{27}\right)=\frac{1}{2.5^2}\left(S_8+S_7\right)=\frac{1}{2.5^2}\left(-1+1\right)=0.$$

E quindi, addizionando questi valori, risulta:

$$P_n(1,2,3,6,8,10)=492.$$

14. Tra i casi particolari che può presentare il problema, di cui ci siamo occupati, merita di esser notato quello in cui gli elementi dati formano una serie di q numeri consecutivi $1, 2, 3, \ldots, q$. In questa ipotesi i loro divisori disuguali non sono altra cosa che gli stessi q numeri, e ne risulta una serie di q componenti aventi rispettivamente per basi i numeri medesimi. Ora è chiaro che le prime $\frac{q}{2}$ componenti, se q è pari, o le prime $\frac{q-1}{2}$, se q è impari, sono di ordine superiore al primo; ma tutte le altre sono di prim'ordine. Faremo intanto osservare che di queste componenti di prim'ordine si possono dare le espressioni generali immediate in funzione di q; e, non sembrandoci superfluo di farne conoscere alcune, andremo a sviluppare quelle delle *due prime* e delle *due ultime*.

Per ciò che riguarda le prime due convien distinguere due ipotesi, secondochè q è impari o pari; ed allora si perviene alle seguenti conchiusioni:

Prima ipotesi — q *numero impari.* Posto:

$$q = 2\mu - 1$$

saranno V_μ e $V_{\mu+1}$ le due prime componenti di prim'ordine; ed i loro valori risulteranno definiti dalle formole:

$$V_\mu = \frac{1}{\mu^3} S_n \tag{28}$$

$$V_{\mu+1} = \frac{1}{(\mu+1)^3}\left[S_n - S_{n+1} - S_{n+2} + S_{n+3}\right]. \tag{29}$$

Si dimostra la prima osservando che in virtù della (27) si ha:

$$V_\mu = \frac{1}{\mu}\Sigma\frac{\rho^{-n}}{(1-\rho)(1-\rho^2)\ldots(1-\rho^{\mu-1})\times(1-\rho^{\mu+1})(1-\rho^{\mu+2})\ldots(1-\rho^{2\mu-1})}.$$

Ora, essendo $1-\rho^\mu=0$, si possono diminuire di μ gli esponenti di ρ in tutt'i binomii che formano la seconda parte del denominatore, la quale in tal guisa diviene uguale alla prima parte; ma questa prima parte equivale a μ; dunque risulta:

$$V_\mu = \frac{1}{\mu^3}\Sigma\rho^{-n} = \frac{1}{\mu^3}S_n.$$

Rispetto alla formola (29) si ha dapprima dalla (27)

$$V_{\mu+1} = \frac{1}{\mu+1}\Sigma\frac{\rho^{-n}}{(1-\rho)(1-\rho^2)\ldots(1-\rho^{\mu})\times(1-\rho^{\mu+2})(1-\rho^{\mu+3})\ldots(1-\rho^{2\mu-1})}.$$

Siccome $1-\rho^{\mu+1}=0$, la prima parte del denominatore sarà uguale a $\mu+1$; e la seconda, diminuendo di $\mu+1$ gli esponenti di ρ, diverrà $(1-\rho)(1-\rho^2)\ldots(1-\rho^{\mu-2})$; ma si renderà uguale alla prima moltiplicando i due termini della frazione per $(1-\rho^{\mu-1})(1-\rho^\mu)$; e perciò:

$$V_{\mu+1} = \frac{1}{(\mu+1)^3}\Sigma\left(1-\rho^{\mu-1}-\rho^\mu+\rho^{2\mu-1}\right)\rho^{-n}.$$

Le tre potenze $\rho^{\mu-1}$, ρ^μ, $\rho^{2\mu-1}$ si possono ridurre a ρ^{-2}, ρ^{-1}, ρ^{-3}; ed in se-

guito, moltiplicando per ρ^{-n}, e poi prendendo la somma, si avrà la formola (29).

Seconda ipotesi — q *numero pari*. Posto:

$$q=2\mu-2\ ,$$

le due prime componenti di prim'ordine saranno ancora V_μ e $V_{\mu+1}$; ed i loro valori si avranno dalle formole:

$$(30)\qquad V_\mu=\frac{1}{\mu^3}\Big[S_n-S_{n-1}\Big]$$

$$(31)\qquad V_{\mu+1}=\frac{1}{(\mu+1)^3}\Big[S_n-S_{n-1}-S_{n-2}+S_{n-4}+S_{n-5}-S_{n-6}\Big]$$

le quali si dimostrano come le precedenti.

In quanto alle due ultime componenti, le quali sono rappresentate da V_{q-1} e V_q, i loro valori si hanno dalle formole:

$$(32)\qquad V_{q-1}=-\frac{1}{(q-1)^3}\Big[S_{n-1}+2S_{n-2}+3S_{n-3}+\ldots+(q-2)S_{n-q-2}\Big]$$

$$(33)\qquad V_q=\frac{1}{q^2}S_n\,.$$

La dimostrazione dell'ultima segue immediatamente dalla formola (27). Rispetto alla (32) si ha dapprima:

$$V_{q-1}=\frac{1}{q-1}\Sigma\frac{\rho^{-n}}{(1-\rho)(1-\rho^2)\ldots(1-\rho^{q-2})(1-\rho^q)}=\frac{1}{(q-1)^2}\Sigma\frac{\rho^{-n}}{1-\rho}\ ;$$

ma (art. I, § 1, V):

$$\frac{1}{1-\rho}=-\frac{1}{q-1}\Big(\rho+2\rho^2+3\rho^3+\ldots+(q-2)\rho^{q-2}\Big)\,,$$

dunque:

$$V_{q-1}=-\frac{1}{(q-1)^3}\Sigma\Big(\rho+2\rho^2+3\rho^3+\ldots+(q-2)\rho^{q-2}\Big)\rho^{-n}\ ;$$

e prendendo la somma si perviene alla formola (32).

Se q è un numero impari, l'espressione di V_{q-1} data da questa formola (32) si può rendere alquanto più semplice. In fatti in questa ipotesi essendo impari il numero de'termini del polinomio chiuso tra parentesi,

ed uguale a $q-2$, vi sarà il termine medio $\frac{q-1}{2}S_{n-\frac{q-1}{2}}$, il quale posto per compendio $\frac{q-1}{2}=\varepsilon$, si muta in $\varepsilon S_{n-\varepsilon}$; ed il polinomio si potrà scrivere come segue, distribuito in tre parti:

$$\left[S_{n-1}+S_{n-2}+\ldots+(\varepsilon-1)S_{n-\varepsilon+1}\right]$$

$$+\varepsilon S_{n-\varepsilon}$$

$$+\left[(\varepsilon+1)S_{n-\varepsilon-1}+(\varepsilon+2)S_{n-\varepsilon-2}+\ldots+(2\varepsilon-1)S_{n-2\varepsilon+1}\right].$$

Ora, siccome $1-\rho^{q-1}=0$, e $q-1=2\varepsilon$, gl'indici delle S nella seconda e terza parte si potranno accrescere di ε, ma queste parti muteranno di segno (art. I, § 3, I). Così la seconda parte diviene $-\varepsilon S_n$, e la terza si potrà mettere nella forma:

$$-\varepsilon\left[S_{n-1}+S_{n-2}+\ldots+S_{n-\varepsilon+1}\right]-\left[S_{n-1}+S_{n-2}+\ldots+(\varepsilon-1)S_{n-\varepsilon+1}\right];$$

ma l'ultimo di questi due polinomii si elide con la prima parte; dunque restituendo ad ε il suo valore, risulta:

$$(34)\qquad V_{q-1}=\frac{1}{2(q-1)^2}\left[S_n+S_{n-1}+S_{n-2}+\ldots+S_{n-\frac{q-1}{2}+1}\right].$$

Questa formola pertanto ha luogo solamente se q è numero impari; ed allora è da preferirsi alla (32), la quale è vera qualunque sia q.

15. Formole analoghe si possono trovare se i dati elementi formano una serie di numeri consecutivi che comincia da 2. In questa ipotesi, supponendo dati i $q-1$ elementi $2, 3, 4, .., q$, è chiaro che ne risulta sempre un sistema di q componenti aventi per basi i numeri $1, 2, 3, ..., q$; e qui pure, come nel caso precedente, saranno di ordine superiore le prime $\frac{q}{2}$ componenti, se q è pari, o le prime $\frac{q-1}{2}$, se q è impari; e tutte le rimanenti saranno del prim'ordine. Ora, distinguendo i due casi di q impari, e di q pari, si trovano agevolmente le formole seguenti:

Prima ipotesi — q *impari*. Posto:

$$q=2\mu-1\ ,$$

le due prime componenti di prim'ordine saranno rappresentate da V_μ e $V_{\mu+1}$, e si avrà:

$$V_\mu=\frac{1}{\mu^3}\left[S_n-S_{n-1}\right] \tag{35}$$

$$V_{\mu+1}=-\frac{1}{(\mu+1)^3}\left[S_{n-1}-2S_n+2S_{n+2}-S_{n+3}\right]\ . \tag{36}$$

Seconda ipotesi — q *pari*. Posto:

$$q=2\mu-2\ ,$$

si ottiene

$$V_\mu=-\frac{1}{\mu^3}\left[S_{n-1}-2S_n+S_{n+1}\right] \tag{37}$$

$$V_{\mu+1}=-\frac{1}{(\mu+1)^3}\left[S_{n-1}-2S_n+S_{n+2}+S_{n+3}-2S_{n+5}+S_{n+6}\right]\ . \tag{38}$$

Per ciò che riguarda le due ultime componenti V_{q-1} e V_q si ha, qualunque sia q:

$$V_{q-1}=\frac{1}{(q-1)^2}S_n \tag{39}$$

$$V_q=\frac{1}{q^2}\left(S_n-S_{n-1}\right)\ . \tag{40}$$

16. Ecco ora la tavola in cui sono raccolti i risultamenti per diverse partizioni:

$$1^\circ\ ;\ P_n(1,2)=V_1^{(2)}+V_2$$

$$V_1^{(2)}=\frac{1}{1.2}\left(n+\frac{3}{2}\right)\quad,\quad V_2=\frac{(-1)^n}{4}$$

$$2^\circ\ ;\ P_n(1,2,3)=V_1^{(3)}+V_2+V_3$$

$$V_1^{(3)}=\frac{1}{1.2.3}\left[\frac{(n+3)^2}{2}-\frac{7}{12}\right]\quad,\quad V_2=\frac{(-1)^n}{8}\quad,\quad V_3=\frac{1}{9}S_n$$

$$3^\circ\ ;\ P_n(1,2,3,4)=V_1^{(4)}+V_2^{(2)}+V_3+V_4$$

$$V_1^{(4)}=\frac{n+5}{1.2.3.4}\left[\frac{(n+5)^2}{1.2.3}-\frac{5}{4}\right]\quad,\quad V_3=\frac{1}{27}\left(S_n+S_{n+1}\right)$$

$$V_2^{(2)}=\frac{(-1)^n}{2^2 2.4}(n+5)\quad,\quad V_4=\frac{1}{16}S_n$$

$$4^\circ\ ;\ P_n(1,2,3,4,5)=V_1^{(5)}+V_2^{(2)}+V_3+V_4+V_5$$

$$V_1^{(5)}=\frac{1}{5!}\left[\frac{\left(n+\frac{15}{2}\right)^4}{4!}-\frac{55}{24}\frac{\left(n+\frac{15}{2}\right)^2}{2}+\frac{17083}{5760}\right]\quad,\quad V_3=\frac{1}{27}S_n$$

$$V_2^{(2)}=\frac{(-1)^n}{2^3 2.4}\left(n+\frac{15}{2}\right)\quad,\quad V_4=\frac{1}{32}\left(S_n+S_{n-1}\right)$$

$$V_5=\frac{1}{25}S_n$$

$$5^\circ\ ;\ P_n(1,2,3,4,5,6)=V_1^{(6)}+V_2^{(3)}+V_3^{(2)}+V_4+V_5+V_6 \quad (*)$$

$$V_1^{(6)}=\frac{n+\frac{21}{2}}{6!}\left[\frac{\left(n+\frac{21}{2}\right)^4}{5!}-\frac{91}{94}\frac{\left(n+\frac{21}{2}\right)^2}{3!}+\frac{9191}{1152}\right]\quad,\quad V_4=\frac{1}{64}\left(S_n-S_{n-1}\right)$$

$$V_2^{(3)}=\frac{(-1)^n}{2^3 2.4.6}\left[\frac{\left(n+\frac{21}{2}\right)^2}{2}-\frac{161}{24}\right]\quad,\quad V_5=\frac{-1}{125}\left(S_{n-1}+2S_{n-2}+3S_{n-3}+4S_{n-4}\right)$$

$$V_3^{(2)}=\frac{1}{3^3 6}\left[\left(n+\frac{65}{6}\right)S_n+\frac{2}{3}S_{n-1}\right]\quad,\quad V_6=\frac{1}{36}S_n\,.$$

(*) Questo esempio, come già si disse nella nota a pag. 17, è quello al quale il Sylvester ha applicato il suo teorema, sviluppando in parte il calcolo per trovare le espressioni delle sei componenti. Ora secondo la nostra soluzione non vi è che la componente $V_3^{(2)}$ la quale possa richiedere un qualche lavoro di pochissimo conto; mentre le espressioni delle altre cinque derivano immediatamente da formole generali, che non esigono sviluppi di sorta.

Intanto per la ragione addotta in quella nota le espressioni superiori delle sei componenti non sono tutte di accordo con quelle date dal Sylvester; ed il divario si riscontra specialmente per le tre componenti $V_3^{(2)}$, V_4, V_5. Siccome la divergenza nasce da ciò che nella formola impiegata dal Sylvester si è tenuto il ρ^n invece del ρ^{-n}, si comprende che questa diversità non poteva influire sulle espressioni delle componenti che hanno per base o 1 o 2; dappoichè per le prime essendo $\rho=1$, si

$$6^\circ;\ P_n(1,2,3,4,5,6,7)=V_1^{(7)}+V_2^{(3)}+V_3^{(2)}+V_4+V_5+V_6+V_7$$

$$V_1^{(7)}=\frac{1}{7'}\left[\frac{(n+14)^6}{6'}-\frac{35}{2}\,\frac{(n+14)^4}{4'}+\frac{13419}{720}\,\frac{(n+14)^2}{2}-\frac{1764635}{24.36.42}\right]$$

$$V_2^{(3)}=\frac{(-1)^n}{2^4.2.4.6}\left[\frac{(n+14)^2}{2}-\frac{77}{6}\right]\quad,\quad V_4=\frac{1}{64}S_n$$

$$V_3^{(2)}=\frac{1}{3^5}\left[(n+14)S_n+\frac{1}{2}\left(n+\frac{23}{2}\right)S_{n-1}\right]\quad,\quad V_5=\frac{1}{125}\left(S_n-S_{n+1}-S_{n+2}+S_{n+3}\right)$$

$$V_6=\frac{1}{72}\left(S_n+S_{n-1}+{}_nS_{-2}\right)$$

$$V_7=\frac{1}{49}S_n$$

$$7^\circ;\ P_n(1,2,3,4,5,6,7,8)=V_1^{(8)}+V_2^{(4)}+V_3^{(2)}+V_4^{(2)}+V_5+V_6+V_7+V_8$$

$$V_1^{(8)}=\frac{n+18}{8'}\left[\frac{(n+18)^6}{7'}-\frac{17}{2}\,\frac{(n+18)^4}{5'}+\frac{8789}{240}\,\frac{(n+18)^2}{3'}-\frac{17.103.269}{60.72}\right]$$

$$V_2^{(4)}=\frac{(-1)^n(n+18)}{2^4.2.4.6.8}\left[\frac{(n+18)^2}{6}-\frac{31}{2}\right]\quad,\quad V_5=\frac{1}{125}\left(S_n-S_{n+1}\right)$$

$$V_3^{(2)}=\frac{1}{3^4.6}\left[\left(n+\frac{107}{6}\right)S_n+\frac{5}{3}S_{n-1}\right]\quad,\quad V_6=\frac{-1}{108}\left(S_{n+1}+S_{n+2}\right)^{(*)}$$

$$V_4^{(2)}=\frac{1}{2^9}\left[(n+12)S_n+2S_{n-1}\right]\quad,\quad V_7=\frac{-1}{343}\left(S_{n-1}+2S_{n-2}+3S_{n-3}+4S_{n-4}+5S_{n-5}\right)$$

$$V_8=\frac{1}{64}S_n$$

---

ha $\rho^n=\rho^{-n}=1$; e per le seconde, essendo $\rho=-1$, si ha $\rho^n=\rho^{-n}=(-1)^n$; e da ciò poi segue che i valori di $V_1^{(6)}$ e $V_2^{(4)}$ sono quali esser debbono anche nella soluzione del Sylvester. In quanto al valore di V_6 nella nostra soluzione si avrebbe, $V_6=\frac{1}{36}\Sigma\rho^{-n}$, ed in quella del Sylvester $V_6=\frac{1}{36}\Sigma\rho^n$; ma è chiaro che dall'una e dall'altra risulta sempre $V_6=\frac{1}{36}S_n$.

(*) La componente V_6 è in questo esempio la seconda di quelle del prim'ordine; e perciò, essendo $q=8$ numero pari, la sua espressione risulta dalla formola (31), da cui si avrebbe:

$$V_6=\frac{1}{216}\left(S_n-S_{n+1}-S_{n+2}+S_{n+4}+S_{n+5}-S_{n+6}\right).$$

Ma poichè le somme S_i si rapportano alle radici primitive dell'equazione $1-\rho^6=0$, sarà $S_{n+4}=-S_{n+1}$, $S_{n+5}=-S_{n+2}$, $S_{n+6}=S_n$; e quindi questa espressione si riduce a quella del testo.

$$8^{\circ}\ ;\ P_n(2,3)=V_1^{(2)}+V_2+V_3$$

$$V_1^{(2)}=\frac{1}{2.3}\left(n+\frac{5}{2}\right)\quad,\quad V_2=\frac{(-1)^n}{4}\quad,\quad V_3=\frac{1}{9}\left(S_n-S_{n-1}\right)$$

$$9^{\circ}\ ;\ P_n(2,3,4)=V_1^{(3)}+V_2^{(2)}+V_3+V_4$$

$$V_1^{(3)}=\frac{1}{2.3.4}\left[\frac{1}{2}\left(n+\frac{9}{2}\right)^2-\frac{29}{24}\right]\quad,\quad V_3=\frac{1}{9}S_n$$

$$V_2^{(2)}=\frac{(-1)^n}{2.2.4}\left(n+\frac{9}{2}\right)\quad,\quad V_4=\frac{1}{16}\left(S_n-S_{n-1}\right)$$

$$10^{\circ}\ ;\ P_n(2,3,4,5)=V_1^{(4)}+V_2^{(2)}+V_3+V_4+V_5$$

$$V_1^{(4)}=\frac{n+7}{2.3.4.5}\left[\frac{(n+7)^2}{3^2}-\frac{54}{24}\right]\quad,\quad V_3=\frac{1}{27}\left(S_n-S_{n-1}\right)$$

$$V_2^{(2)}=\frac{(-1)^n}{2^2.2.4}(n+7)\quad,\quad V_4=\frac{1}{16}S_n$$

$$V_5=\frac{1}{25}\left(S_n-S_{n-1}\right)$$

$$11^{\circ}\ ;\ P_n(2,3,4,5,6)=V_1^{(5)}+V_2^{(3)}+V_3^{(2)}+V_4+V_5+V_6$$

$$V_1^{(5)}=\frac{1}{2.3.4.5.6}\left[\frac{(n+10)^4}{4^2}-\frac{15}{4}\,\frac{(n+10)^2}{2}+\frac{1877}{240}\right]\quad,\quad V_4=\frac{1}{32}S_n\ (*)$$

$$V_2^{(3)}=\frac{(-1)^n}{2^2.2.4.6}\left[\frac{(n+10)^2}{2}-\frac{79}{12}\right]\quad,\quad V_5=\frac{1}{25}S_n$$

$$V_3^{(2)}=\frac{1}{3^2.6}\left[\left(n+\frac{23}{2}\right)S_n-\left(n+\frac{17}{2}\right)S_{n-1}\right]\quad,\quad V_6=\frac{1}{36}\left(S_n-S_{n-1}\right)$$

(*) Dalla formola (37) si avrebbe:

$$V_4=-\frac{1}{64}\left(S_{n-1}-2S_n+S_{n-1}\right);$$

ma essendo $S_{n-1}=-S_{n+1}$, risulta $V_4=\frac{1}{32}S_n$.

12° ; $P_n(2,3,4,5,6,7) = V_1^{(6)} + V_2^{(3)} + V_3^{(2)} + V_4 + V_5 + V_6 + V_7$

$$V_1^{(6)} = \frac{n+\frac{27}{2}}{2.3.4.5.6.7}\left[\frac{\left(n+\frac{27}{2}\right)^4}{5^2} - \frac{139}{24}\frac{\left(n+\frac{27}{2}\right)^2}{3^2} + \frac{21191}{1152}\right]$$

$$V_2^{(3)} = \frac{(-1)^n}{2^3.2.4.6}\left[\frac{\left(n+\frac{27}{2}\right)^2}{2} - \frac{305}{24}\right] \quad , \quad V_4 = \frac{1}{64}(S_n - S_{n-1})$$

$$V_3^{(2)} = \frac{1}{3^3.6}\left[\left(n+\frac{77}{6}\right)S_n + \frac{4}{3}S_{n-1}\right] \quad , \quad V_5 = \frac{-1}{125}(S_{n-1} - 2S_n + 2S_{n-2} - S_{n-3})$$

$$V_6 = \frac{1}{36}S_n$$

$$V_7 = \frac{1}{49}(S_n - S_{n-1})$$

13° ; $P_n(2,3,4,5,6,7,8) = V_1^{(7)} + V_2^{(4)} + V_3^{(2)} + V_4^{(2)} + V_5 + V_6 + V_7 + V_8$

$$V_1^{(7)} = \frac{1}{2.3.4.5.6.7.8}\left[\frac{\left(n+\frac{35}{2}\right)^6}{6^2} - \frac{203}{24}\frac{\left(n+\frac{35}{2}\right)^4}{4^2} + \frac{24843}{640}\frac{\left(n+\frac{35}{2}\right)^2}{2} - \frac{124907633}{576.1680}\right]$$

$$V_2^{(4)} = \frac{(-1)^n\left(n+\frac{35}{2}\right)}{2^3.2.4.6.8}\left[\frac{\left(n+\frac{35}{2}\right)^2}{3^2} - \frac{123}{8}\right] \quad , \quad V_5 = -\frac{1}{125}(S_{n-1} - 2S_n + S_{n+1})$$

$$V_3^{(2)} = \frac{1}{3^4.6}\left[\left(n+\frac{109}{6}\right)S_n - \left(n+\frac{31}{2}\right)S_{n-1}\right] \quad , \quad V_6 = \frac{1}{108}(S_n + S_{n-1})^{(*)}$$

$$V_4^{(2)} = \frac{1}{4^2.8}\left[(n+20)S_n - \left(n+\frac{25}{2}\right)S_{n-1}\right] \quad , \quad V_7 = \frac{1}{49}S_n$$

$$V_8 = \frac{1}{64}(S_n - S_{n-1})$$

(*) Per V_6 la formola (38) dà:

$$V_6 = \frac{1}{216}\left(S_{n-1} - 2S_n + S_{n+2} + S_{n+3} - 2S_{n+5} - S_{n+6}\right) ;$$

ma, essendo $S_{n+2} = -S_{n-1}$, $S_{n+3} = -S_n$, $S_{n+5} = S_{n-1}$, $S_{n+6} = S_n$, risulta l'espressione scritta nel testo

14° ; $P_n(1,3,6,8)=V_1^{(4)}+V_2^{(2)}+V_3^{(2)}+V_4+V_6+V_8$

$$V_1^{(4)}=\frac{n+9}{1.3.6.8}\left[\frac{(n+9)^2}{3}-\frac{55}{12}\right] \quad , \quad V_4=\frac{1}{32}S_n$$

$$V_2^{(2)}=\frac{(-1)^n}{2^2.6.8}(n+9) \quad , \quad V_6=\frac{1}{36}\left(S_{n-1}+S_{n-2}\right)$$

$$V_3^{(2)}=\frac{1}{3^2.6}\left[\left(n+\frac{65}{6}\right)S_n+\frac{7}{3}S_{n-1}\right] \quad , \quad V_8=\frac{1}{16}S_{n-1}$$

15° ; $P_n(1,3,4,6,8)=V_1^{(5)}+V_2^{(3)}+V_3^{(2)}+V_4^{(2)}+V_6+V_8$

$$V_1^{(5)}=\frac{1}{1.3.4.6.8}\left[\frac{(n+11)^4}{4}-\frac{21}{4}\,\frac{(n+11)^2}{2}+\frac{757}{1536}\right] \quad , \quad V_6=\frac{1}{9}\left(S_n+S_{n-2}\right)$$

$$V_2^{(3)}=\frac{(-1)^n}{2^2.4.6.8}\left[\frac{(n+11)^2}{2}-\frac{73}{12}\right] \quad , \quad V_4=\frac{1}{32}S_{n-1}$$

$$V_3^{(2)}=\frac{1}{3^2.6}\left[\left(n+\frac{25}{2}\right)S_n-\left(n+\frac{19}{2}\right)S_{n-1}\right]$$

$$V_4^{(2)}=\frac{1}{4^2.8}\left[(n+11)S_n+S_{n-1}\right]$$

16° ; $P_n(1,2,3,5,7)=V_1^{(5)}+V_2+V_3+V_5+V_7$

$$V_1^{(5)}=\frac{1}{1.2.3.5.7}\left[\frac{(n+9)^4}{4}-\frac{11}{3}\,\frac{(n+9)^2}{2}+\frac{5621}{720}\right] \quad , \quad V_2=\frac{(-1)^n}{32}$$

$$V_3=\frac{1}{27}S_n$$

$$V_5=\frac{1}{25}\left(S_n-S_{n-2}\right)$$

$$V_7=\frac{1}{49}\left(S_n-S_{n+1}-S_{n+3}+S_{n+4}\right)$$

$$17^{\circ}\ ;\ P_n(1,2,3,6,8,10)=V_1^{(6)}+V_2^{(4)}+V_3^{(2)}+V_4+V_5+V_6+V_8+V_{10}$$

$$V_1^{(6)}=\frac{n+15}{1.2.3.6.8.10}\left[\frac{(n+15)^4}{5'}-\frac{107}{12}\frac{(n+15)^2}{6}+\frac{6499}{12^2}\right]\ ,\quad V_4=\frac{1}{2^7}S_n$$

$$V_2^{(4)}=(-1)^n\frac{n+15}{2^8.3.5}\left[\frac{(n+15)^2}{6}-\frac{39}{4}\right]\ ,\quad V_5=\frac{1}{2.5^3}\left(2S_{n-1}-S_{n-2}+S_{n-3}-2S_{n-4}\right)$$

$$V_3^{(2)}=\frac{1}{2.3^4}\left[\left(n+\frac{89}{6}\right)S_n-\frac{1}{3}S_{n-1}\right]\quad ,\quad V_6=\frac{1}{2^2.3^3}\left(S_{n-1}+S_{n-2}\right)$$

$$V_8=\frac{1}{32}S_{n-3}\ ,\ V_{10}=\frac{1}{50}\left(S_{n-2}+S_{n-3}\right)$$

$$18\ ;\ P_n(1,4,5,7,8,10,15)=V_1^{(7)}+V_2^{(3)}+V_3+V_4^{(2)}+V_5+V_7+V_8+V_{10}+V_{15}$$

$$V_1^{(7)}=\frac{1}{1.4.5.7.8.10.15}\left[\frac{(n+25)^6}{6'}-\frac{5}{3}\frac{(n+25)^4}{4'}+\frac{33889}{80}\frac{(n+25)^2}{2}-\frac{25833253}{3024}\right]$$

$$V_2^{(3)}=\frac{(-1)^n}{2^4.4.8.10}\left[\frac{(n+25)^2}{2}-45\right]\ ,\ V_3=-\frac{1}{45}S_{n-1}\ ,\quad V_4^{(2)}=\frac{1}{2^3}\left[(n+25)S_n+S_{n-1}\right]$$

$$\overset{*}{V}{}_5^{(3)}=\frac{1}{12.5^5}\left[\left(5n^2+258n+\frac{40823}{15}\right)S_n+16(n+25)S_{n-1}+(14n+271)S_{n-2}+(2n-35)S_{n-3}\right]$$

$$V_7=\frac{1}{49}\left(S_{n-1}+S_{n-2}+S_{n-3}+S_{n-4}+S_{n-5}\right)\ ,\quad V_8=\frac{1}{64}\left(S_n+2S_{n-1}+S_{n-2}\right)$$

$$V_{10}=\frac{1}{200}\left(S_{n-1}+S_{n-2}-S_{n-3}-S_{n-4}\right)$$

$$V_{15}=\frac{1}{225}\left(-10S_n-10S_{n-1}+10S_{n-2}-4S_{n-3}+5S_{n-4}-5S_{n-5}-5S_{n-6}+10S_{n-7}\right).$$

(*) Il calcolo della componente $V_5^{(3)}$ esige le trasformate intere delle due espressioni:

$$\Sigma(U_0 b)=\left[\frac{\rho}{1-\rho}+\frac{7\rho^2}{1-\rho^2}+\frac{8\rho^3}{1-\rho^3}+\frac{4\rho^4}{1-\rho^4}\right]$$

$$\Sigma(U_1 b^2)=-\left[\frac{\rho}{(1-\rho)^2}+\frac{49\rho^2}{(1-\rho^2)^2}+\frac{64\rho^3}{(1-\rho^3)^2}+\frac{16\rho^4}{(1-\rho^4)^2}\right],$$

dove ρ è radice primitiva di $1-\rho^5=0$; e questa ricerca è già compiuta nell'ultimo esempio del § 4°, art 1.

NOTA

Sugli sviluppi delle funzioni

$$\log(1-e^{-at}) \qquad \text{e} \qquad \log(1-\rho^h e^{-bt})$$

e sul calcolo de' numeri Bernoulliani ed ultra-Bernoulliani

Questi sviluppi dipendono da quelli delle due funzioni $\frac{1}{e^x-1}$ ed $\frac{1}{\mu e^x-1}$, dove μ dinota una costante.

Lo sviluppo della prima è ben conosciuto; e si ha:

$$\frac{1}{e^x-1}=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}+\frac{B_1}{2'}x-\frac{B_3}{4'}x^3+\frac{B_5}{6'}x^5-\text{etc: etc:}$$

B_1, B_3, B_5, etc: indicando, come all'ordinario, i numeri di Bernoulli. Posto ciò, essendo:

$$d.\log(1-e^{-x})=\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}dx=\frac{1}{e^x-1}dx\ ,$$

sostituendo al fattore frazionario il suo sviluppo, e poscia integrando, verrà:

$$\log(1-e^{-x})=C+\log x-\frac{x}{2}+\frac{B_1}{2.2'}x^2-\frac{B_3}{4'.4}x^4+\frac{B_5}{6'.6}x^6-\text{etc:}$$

Per determinare la costante C scriveremo questa formola nel modo seguente:

$$\log\frac{1-e^{-x}}{x}=C-\frac{x}{2}+\frac{B_1}{2'.2}x^2-\frac{B_3}{4'.4}x^4+\frac{B_5}{6'.6}x^6-\text{etc:}\ ;$$

ed ora posto $x=0$, ed osservando che in questa ipotesi si ha $\frac{1-e^{-x}}{x}=\frac{0}{0}=1$, risulterà $C=0$; e conseguentemente:

$$\log(1-e^{-x})=\log x-\frac{x}{2}+\frac{B_1}{2'.2}x^2-\frac{B_3}{4'.4}x^4+\frac{B_5}{6'.6}x^6-\text{etc:}$$

Cangiando in questa formola la x in at, si ha lo sviluppo di $\log(1-e^{-at})$, com'è dato a pag. 21.

Men comune, ma non ignoto è lo sviluppo della funzione $\frac{1}{\mu e^x - 1}$ (V. Lacroix, *Traitè de calcul* etc: v. 3°, n° 977, ed una nostra memoria *sugli sviluppi delle funzioni* $\frac{1}{(e^x-1)^m}$, $\frac{1}{(\mu e^x-1)^m}$, *e su'numeri ultra-Bernoulliani*). Supponendo:

$$(1)\qquad \frac{1}{1-\mu e^x} = U_0 + U_1\frac{x}{1'} + U_2\frac{x^2}{2'} + U_3\frac{x^3}{3'} + \ldots + U_n\frac{x^n}{n'} + \ldots$$

si trova:

$$(2)\quad U_0 = \frac{1}{1-\mu}\,,\quad U_1 = \frac{1}{(1-\mu)^2}\,,\quad U_2 = \frac{\mu+\mu^2}{(1-\mu)^3}\,,\quad U_3 = \frac{\mu+4\mu^2+\mu^3}{(1-\mu)^4}\,,\ \text{etc:}$$

ma in generale un coefficiente qualunque U_n è definito da una espressione della forma:

$$U_n = \frac{1}{(1-\mu)^{n+1}}\left(A_{n,1}\mu + A_{n,2}\mu^2 + A_{n,3}\mu^3 + \ldots + A_{n,n}\mu^n\right),$$

nella quale, scrivendo, com'è costume, $(k)_r$ per dinotare l'espressione numerica $\frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-r+1)}{1.2.3\ldots r}$, si ha:

$$(3)\quad \begin{aligned}
A_{n,1} &= 1^n \\
A_{n,2} &= 2^n - (n+1)_1 1^n \\
A_{n,3} &= 3^n - (n+1)_1 2^n + (n+1)_2 1^n \\
A_{n,4} &= 4^n - (n+1)_1 3^n + (n+1)_2 2^n - (n+1)_3 1^n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_{n,n} &= n^n - (n+1)_1 (n-1)^n + (n+1)_2 (n-2)^n - \ldots + (-1)^{n-1}(n+1)_{n-1} 1^n .
\end{aligned}$$

I coefficienti dello sviluppo della funzione $\frac{1}{1-\mu e^x}$, o meglio le quantità U_0, U_1, U_2, etc: sono evidentemente i valori che prendono per $x=0$ la funzione istessa e le sue successive derivate, talchè si ha in generale:

$$U_n = D^n\left(\frac{1}{1-\mu e^x}\right)_{x=0}.$$

Ora questi coefficienti, funzioni della costante μ, cui può attribuirsi qualunque valore diverso da 1, sono quelli che nella citata memoria ab-

biamo chiamati numeri *ultra-Bernoulliani* relativi alla *base* μ, distinguendoli per ordini; l'ordine del numero U_n essendo uguale all'ordine della derivata da cui trae origine.

Posto per compendio:

$$\varphi_n(\mu) = A_{n,1}\mu + A_{n,2}\mu^2 + A_{n,3}\mu^3 + \ldots + A_{n,n}\mu^n,$$

l'espressione di U_n diviene:

$$U_n = \frac{\varphi_n(\mu)}{(1-\mu)^{n+1}};$$

ed è chiaro che la costruzione del valore di U_n riducesi a quella della funzione intera $\varphi_n(\mu)$, e quindi a quella de'suoi coefficienti $A_{n,1}, A_{n,2}, \ldots A_{n,n}$, i di cui valori sono già definiti dalle formole (3). Aggiungiamo intanto che la serie di questi coefficienti presenta alcune osservabili proprietà, le quali valgono ad abbreviarne il calcolo; ma qui ci basta di rammentare che ciascuno de'termini estremi $A_{n,1}$ ed $A_{n,n}$ è uguale all'*unità*, e che due termini qualunque equidistanti dagli estremi sono uguali tra loro: ond'è che si ha $A_{n,2} = A_{n,n-1}$, $A_{n,3} = A_{n,n-2}$. Segue da ciò che per costruire la funzione $\varphi_n(\mu)$ basta costruire i soli suoi primi $\frac{n}{2}$ coefficienti, o i primi $\frac{n+1}{2}$, secondochè n è pari o impari.

Ma oltre a ciò crediamo utile di esporre un metodo estremamente semplice mediante il quale i valori delle successive funzioni $\varphi_0(\mu)$, $\varphi_1(\mu)$, $\varphi_2(\mu)$, etc: si possono ottenere l'uno dopo l'altro di una maniera rapidissima, indipendente dalle formole (3). Considerando le due funzioni consecutive:

$$\varphi_{n-1}(\mu) = A_{n-1,1}\mu + A_{n-1,2}\mu^2 + \ldots + A_{n-1,n-1}\mu^{n-1}$$
$$\varphi_n(\mu) = A_{n,1}\mu + A_{n,2}\mu^2 + \ldots + A_{n,n}\mu^n.$$

è stato dimostrato nella citata memoria che i loro coefficienti sono legati dalle relazioni:

$$\begin{aligned}
A_{n,1} &= 1.A_{n-1,1} \\
A_{n,2} &= 2\,A_{n-1,2} + (n-1)A_{n-1,1} \\
A_{n,3} &= 3\,A_{n-1,3} + (n-2)A_{n-1,2} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_{n,n-2} &= (n-2)A_{n-1,n-2} + 3\,A_{n-1,n-3} \\
A_{n,n-1} &= (n-1)A_{n-1,n-1} + 2\,A_{n-1,n-2} \\
A_{n,n} &= 1\,A_{n-1,n-1}.
\end{aligned}$$

le quali si riassumono nella relazione generale:

$$A_{n,r} = rA_{n-1,r} + (n-r+1)A_{n-1,r-1},$$

dappoichè se ne deducono tutte dando ad r i valori successivi $1, 2, 3, \ldots, n$, e tenendo presente che nel secondo membro è nullo l'ultimo termine per $r=1$, ed è nullo il primo per $r=n$. Adunque, supponendo conosciuti i valori numerici de' coefficienti della funzione $\varphi_{n-1}(\mu)$, col mezzo delle formole precedenti si possono subito calcolare quelli della funzione $\varphi_n(\mu)$; ma lo stesso intento si raggiunge assai più semplicemente con la regola seguente, la quale riduce tutto il calcolo al quadro sottoposto.
« I termini della serie $A_{n,1}, A_{n,2}, \ldots, A_{n-1,n-1}$ si moltiplichino uno ad uno per « i numeri naturali $1, 2, 3, \ldots, n-1$, ed i prodotti si dispongano in una « prima linea orizzontale; indi in una seconda linea, al di sotto de' termini « della prima, a cominciar però dal secondo termine, si ripetano in ordi- « ne inverso i termini della prima; e poi si formi una terza linea con le « somme de' termini che nelle prime due linee si corrispondono vertical- « mente. I termini di questa terza linea saranno i valori di $A_{n,1}, A_{n,2}, \ldots, A_{n,n}$ ».
Ecco intanto il quadro in cui si riassume tutto il procedimento:

$$\begin{array}{llllll}
1.A_{n-1,1}, & 2A_{n-1,2}, & 3A_{n-1,3}, \ldots, & (n-2)A_{n-1,n-2}, & (n-1)A_{n-1,n-1} & \\
 & (n-1)A_{n-1,n-1}, & (n-2)A_{n-1,n-2}, \ldots, & 3A_{n-1,3}, & 2A_{n-1,2}, & 1.A_{n-1,1} \\
\hline
A_{n,1} & A_{n,2}, & A_{n,3}, \ldots, & A_{n,n-2}, & A_{n,n-1}, & A_{n,n}.
\end{array}$$

Cominciando ad applicare questa regola dalla funzione $\varphi_1(\mu)=\mu$, si ottengono di una maniera rapidissima le funzioni consecutive $\varphi_2(\mu), \varphi_3(\mu)$, etc:; e quindi avendosi direttamente $\varphi_0(\mu)=1$, per la serie completa di queste funzioni si trova:

$\varphi_0(\mu) = 1$

$\varphi_1(\mu) = \mu$

$\varphi_2(\mu) = \mu + \mu^2$

$\varphi_3(\mu) = \mu + 4\mu^2 + \mu^3$

$\varphi_4(\mu) = \mu + 11\mu^2 + 11\mu^3 + \mu^4$

$\varphi_5(\mu) = \mu + 26\mu^2 + 66\mu^3 + 26\mu^5$

$\varphi_6(\mu) = \mu + 57\mu^2 + 302\mu^3 + 302\mu^4 + 57\mu^5 + \mu^6$

$\varphi_7(\mu) = \mu + 120\mu^2 = 1191\mu^3 + 2416\mu^4 + 1191\mu^5 + 120\mu^6 + \mu^7$

$\varphi_8(\mu) = \mu + 247\mu^2 + 4293\mu^3 + 15619\mu^4 + 15619\mu^5 + 4293\mu^6 + 247\mu^7 + \mu^8$

etc: etc: etc: etc: etc: etc:

Merita attenzione il caso in cui i numeri ultra-Bernoulliani si rapportano alla base $\mu=-1$, essendo nulli quelli di ordine pari, eccetto l'ordine *zero*, per cui si ha $U_0=\frac{1}{2}$. Ma v'ha di più che in questa ipotesi i detti numeri sono legati ai numeri Bernoulliani mediante la relazione:

$$U_i=(-1)^{\frac{r-1}{2}}\frac{2^{r-1}-1}{r+1}B_r\,,$$

dalla quale si trae reciprocamente:

$$B_r=(-1)^{\frac{r-1}{2}}\frac{r+1}{2^{r-1}-1}U_r\,;$$

ma nel caso attuale si ha $U_r=\frac{\varphi_r(-1)}{2^{r-1}}$; dunque risulta:

$$B_r=(-1)^{\frac{r-1}{2}}\frac{r+1}{(2^{r-1}-1)2^{r-1}}\varphi_r(-1)\,.$$

Ora questa formola può farsi opportunamente servire al calcolo de' numeri Bernoulliani, vista la facilità grandissima con cui si calcolano i valori di $\varphi_r(-1)$. Così si avrebbe per esempio:

$$B_1=-\frac{1}{6}\varphi_1(-1)\,,\ B_3=\frac{1}{60}\varphi_3(-1)\,,\ B_5=-\frac{1}{21.2^3}\varphi_5(-1)\,,\ B_7=\frac{1}{255.2^5}\varphi_7(-1)\,,\ \text{etc:}$$

ma $\varphi_1(-1)=-1$, $\varphi_3(-1)=2$, $\varphi_5(-1)=-2^4$, $\varphi_7(-1)=2^4.\,17$, etc: dunque:

$$B_1=\frac{1}{6}\,,\ B_3=\frac{1}{30}\,,\ B_5=\frac{1}{42}\,,\ B_7=\frac{1}{30}\,,\ \text{etc: etc:}$$

Ottenuto lo sviluppo della funzione $\frac{1}{1-\mu e^x}$, si può subito dedurne quello di $\log(1-\lambda e^{-x})$, dove λ è una costante qualunque. In effetti si ha differenziando:

$$d.\log(1-\lambda e^{-x})=-\frac{1}{1-\lambda^{-1}e^x}dx=-\frac{1}{1-\mu e^x}dx\,,$$

avendo fatto per brevità $\mu = \lambda^{-1}$. Sostituendo al fattore $\frac{1}{1-\mu e^{x}}$ il suo sviluppo dato dalla formola (1), e poscia integrando verrà:

$$\log(1-\lambda e^{-x}) = C - \frac{U_0}{1'} x - \frac{U_1}{2'} x^2 - \frac{U_2}{3'} x^3 - \text{etc:}$$

ma per $x=0$ si ha $C=\log(1-\lambda)$; dunque:

$$\log(1-\lambda e^{-x}) = \log(1-\lambda) - \frac{U_0}{1'} x - \frac{U_1}{2'} x^2 - \frac{U_3}{3'} x^3 - \text{etc:}$$

dove i numeri ultra-Bernoulliani $U_0, U_1, U_2, \ldots$ si rapportano alla base $\mu = \lambda^{-1}$. Cambiando ora in questa formola la x in bt, e ponendovi inoltre $\lambda = \rho^{-b}$, si avrà come a pag. 21:

$$\log(1-\rho^{b} e^{-bt}) = \log(1-\rho^{b}) - \frac{U_0 b}{1'} t - \frac{U_1 b^2}{2'} t^2 - \frac{U_2 b^3}{3'} t^3 - \text{etc:}$$

e qui i numeri $U_0, U_1, U_2, \ldots$ si rapportano alla base $\mu = \rho^{-b}$, talchè si ha dalle (2):

$$U_0 = -\frac{\rho^{b}}{1-\rho^{b}}$$

$$U_1 = \frac{\rho^{b}}{(1-\rho^{b})^2}$$

$$U_2 = -\frac{\rho^{b}+\rho^{2b}}{(1-\rho^{b})^3}$$

$$U_3 = \frac{\rho^{b}+4\rho^{2b}+\rho^{3b}}{(1-\rho^{b})^4}$$

etc: etc: etc:

N. Y. ACADEMY LIBRARY OF SCIENCES